MATEMAATIKA-OLÜMPIAADI VABARIIKLIKUST VOORUST

EVI MITT,
TRÜ matemaatika õpetamise kateedri dotsendi kt.

1976/77. õppeaasta koolinoorte täppisteaduste olümpiaad on lõpule jõudnud ja parimate täppisteadlaste nimedki teatavaks saanud. Käesolevas analüüsime täppisteaduste olümpiaadi kolmanda, vabariikliku vooru matemaatika ülesannete lahendatust ja lahendustes tehtud tüüpilisi vigu.

Kõige paremini lahendati 8. klassi ülesandeid. Esikohale tulnu punktide arv (47) oli kõige lähedasem maksimaalsele (50). Iga õpilane saavutas keskmiselt 23 punkti. 11. klassi esikoha omanikud (2 õpilast) saavutasid 40 punkti. Punktide keskmine arv õpilase kohta oli ka siin 23. Kõige raskemateks osutusid aga 10. klassi ülesanded. Esikoht saavutati siin 26 punktiga, punktide keskmine arv õpilase kohta oli vaid 14.

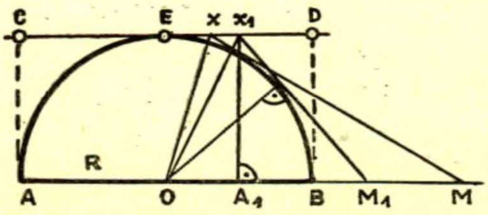
Analüüsides ülesannete lahendust ilmneb, et kõige raskemateks osutusid geomeetria ülesanded. Need hõlmavad 40% ülesannete koguarvust, nende lahendustele langeb aga vaid 16% kogutud punktidest. Võrdluseks olgu esitatud samad näitajad ka algebra ülesannete kohta, mis on vastavalt 35% ja 49%. Geomeetria ülesannete lahenduste eest saadud punktide kaalutud keskmine on 2,2, algebra ülesannete eest on see aga 5,4 (iga ülesande õige lahendus andis 10 punkti). Kõige suurem punktide keskmine ühe ülesande kohta on 8,4, kõige väiksem aga 0,5. Ülejäänud 5 ülesannet ei moodusta terviklikku ainevaldkonda, seetõttu ei saa üldistusi teha. Nende hulgas oli ülesandeid arvude jaguvusest, jadadest ning loogilise arutelu abil lahenduvaid ülesandeid.

Järgnevalt anname raskemateks osutunud geomeetria ülesannete lahendusideed ning selgitame tüüpilisemaid vigu esitatud lahendustes. Iga ülesande teksti lõpus on sulgudes selle lahendamise eest saadud punktide keskmine; tärn ülesande teksti numbri juures aga näitab, et see on võetud täppisteaduste olümpiaadi üleliidulise komisjoni poolt soovitatud ülesannete hulgast. Ülesandeid tähistame klassi numbriga, mille indeks näitab ülesande järjekorranumbrit.

8_1. Kolmnurgas OM_1X_1 on $A_1X_1 = OP_1 = R$ kui võrdsetele haaradele tõmmatud kõrgused (vt. joon. 1). Ka diameetri pikenduse mis tahes punkti M korral tekib võrdhaarne kolmnurk OMX, milles ühele võrdsetest haaradest MX, mis asub ringjoont puudutaval kiirel, tõmmatud kõrgus on alati võrdne ringjoone raadiusega. Seega asuvad kõik punktid X antud ringjoone diameetrist raadiuse kaugusel, s. t. sirgel CD, mis on paralleelne sirgega AB. Ülesande tingimuste kohaselt on X=[C; E [U] E; D].

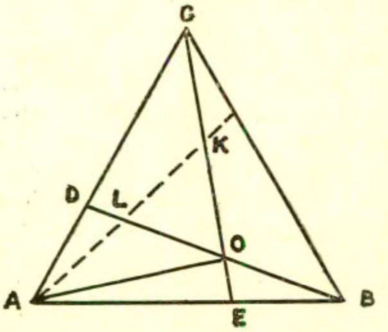
Vaadeldava ülesande lahendamisel

Joonis 1



mõned õpilased ei vaevunud analüüsi lõpuni viima ja kiirustasid vastuse esitamisega. Niipea, kui selgus, et konstrueeritavad punktid X asuvad antud poolringjoone diameetriga paralleelsel sirgel, esitatigi saadud tulemus vastusena. Seega pakuti vastuseks kas kogu sirget CD või lõiku CD või punktihulka [A; E [U] E; B]. Küllalt paljud (27%) ei olnud aga ülesandest üldse aru saanud ja juba joonis oli vale.

Joonis 2

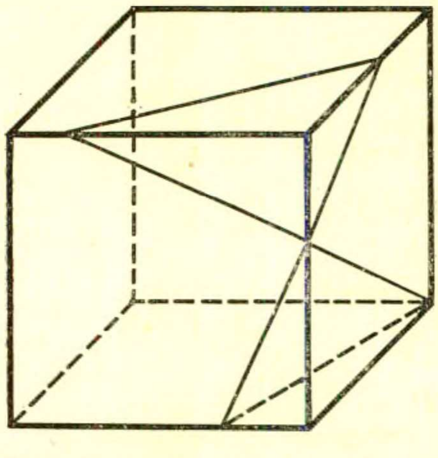


9_5. Kolmnurkade BEO ja ABO sarnasusest järeldub, et BO=3x, kui EO=x (vt. joon. 2). Et kolmnurkadel BCO ja ABO on ühine alus BO, vastavad kõrgused aga suhtuvad nagu 2:1, siis $S_{BCO}:S_{ABO}=2:1$. Leiame veel, et $S_{ABO}:S_{BEO}=3:1$ ja $S_{BCO}:S_{BEO}=6:1$. Et kolmnurkadel BCO ja BEO on ühine kõrgus, siis on järelikult nende aluste suhe OC:OE=6:1. Seega seesmise võrdkülgse kolmnurga KLO külg $KO = 6x - 3x = 3x$. Järelikult on kolmnurk ALO võrdhaarne, tema alusnurk $\alpha=(180^\circ - 120^\circ):2=30^\circ$. Siit saame, et $\angle AOC=30^\circ+60^\circ=90^\circ$, mida oligi tarvis tõestada.

Tüüpiline viga vaadeldava ülesande lahendustes tulenes geomeetria põhitõdede mittetundmisest. Et võrdkülgses kolmnurgas oli külg jaotatud kolmeks võrdseks osaks, siis arvati selle külje vastasnurkki jaotuvat kolmeks võrdseks osaks (aluse jaotuspunkte ja vastastippu ühendavate lõikude poolt).

10_4. Ülesande tingimuste kohaselt peab kuubi igal serval olema vähemalt üks hulktahuka tipp (vt. joon. 3). See tähendab, et kuubi tippude juurest võib ära lõigata tetraeedrid, kusjuures ühe serva juurest äralõigatud tetraeedrite kõrguste summa on ülimalt võrdne kuubi servaga. Ühegi tetraeedri põhja pindala ei saa ületada $^1/_2$ kuubi tahu pindalast.

Joonis 3



Seega kuubi ühe serva juures olevate tetraeedrite ruumalade summa ei ületa suurust $^1/_6$ ning kõigi tetraeedrite ruumalade summa

$$V_t \leqslant \frac{2}{3}.$$

Järelikult on kuubis antud hulktahuka ruumala

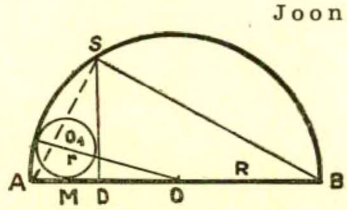
$$V_h \geqslant \frac{1}{3}$$

Vaadeldud ülesande lahendasid õigesti vaid kolm õpilast. Üle poole õpilastest ei osanud ülesande lahendamisele üldse asudagi. Ilmselt ehmatas ülesanne oma uudsusega ega hakatud proovimagi.

10_1. Kasutades teoreemi ringjoone puutujast ja lõikajast ning Eukleidese teoreemi, on ülesande lahendus lühidalt järgmine.

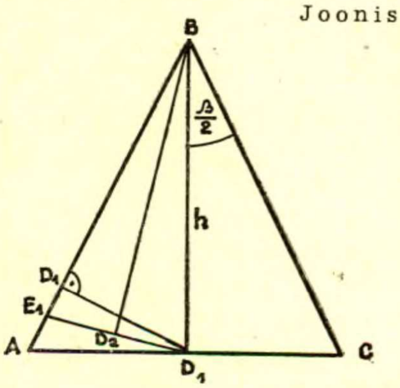
Et $BS^2=AB\cdot BD$ ja $DO=MO-MD=\sqrt{R(R-2r)}-r$, siis $BS^2=2R(R+\sqrt{R(R-2r)}-r)=(R+\sqrt{R(R-2r)})^2$ ehk $BS=R+\sqrt{R(R-2r)}$. Et $BM=BO+OM=R+\sqrt{R(R-2r)}$, siis $BS=BM$ (vt. joon. 4).

Joonis 4



Põhilised raskused selle ülesande lahendamisel tulenesid asjaolust, et joonist ei täiendatud otstarbekalt, ei seostatud ringjoont antud punktiga B. Paljud õpilased tegid järeldusi joonise põhjal ja kirjutasid välja näivaid (olematuid) seoseid. Sarnastena näivate kolmnurkade sarnasust ei püütudki tõestada. Lubamatu on olümpiaadist osavõtva 10. klassi õpilase väide, et kaks täisnurkset kolmnurka on võrdsed, kui neil on ühine hüpotenuus. Taunitav on ka teoreemi tõestamine, mille käigus kasutatakse tõestatavat väidet ja lõpuks jõutakse sellesama väiteni. Leidus isegi kaks õpilast, kellel pole selge mõiste «sissekujundatud ringjoon».

Joonis 5



11_4. Selle ülesande lahendamises on kaks etappi. Esiteks tuleb leida vaadeldava jada üldliikme avaldis. Osutub, et

$$BD_n = b\cos\frac{\beta}{2}\cdot\cos\frac{\beta}{4}\cdot\ldots\cdot\cos\frac{\beta}{2^n}\ \text{(vt. joon. 5).}$$

Teine, raskem etapp on selle jada piirväärtuse leidmine. Kasutades kunstlikku võtet — korrutades ja jagades jada üldliiget avaldisega

$$2^n \sin\frac{\beta}{2^n}$$

— saab jada üldliikme teisendada kujule

$$\frac{b\sin\beta}{2^n\sin\frac{\beta}{2^n}}.$$

Seejärel leiame, et

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b\sin\beta}{2^n\sin\frac{\beta}{2^n}} = \frac{b\sin\beta}{\beta}\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{\beta}{2^n}}{\sin\frac{\beta}{2^n}} = \frac{b\sin\beta}{\beta}.$$

Arvutades β ja sin β ning tehes asendused, saame otsitavaks piirväärtuseks avaldise

$$\frac{a\sqrt{4b^2-a^2}}{4b\arcsin\frac{a}{2b}}.$$

Mitmed õpilased oletasid (kontrollimata), et uuritav jada on geomeetriline progressioon. Teine rühm lahendajatest aga näitas, et vaadeldava jada saamise protsessis iga järgmise kolmnurga nurk tipu B juures muutub 2 korda väiksemaks, järelikult läheneb 0-le. Et tegemist on võrdhaarsete kolmnurkadega, siis alusnurga suurus läheneb 90°-le. Siit tehti järeldus, et kõrguste jada piirväärtuseks on lõik BD_n lähtekolmnurga haaral AB, kus D_n on punktist D_1 haarale AB tõmmatud ristlõigu aluspunkt. Tegelikult selline arutelu määrab kindlaks vaid piirprotsessis tekkiva kolmnurga kuju, mitte aga selle haara pikkuse.

Kõigi ülesannete hulgas oli kolm sellist, mille lahendamise eest ei saanud keegi 10 punkti. Tutvume ka nende ülesannete lahendustega.

9_2 Et

$$a_1 = 1 > 0 \text{ ja } \sqrt{\frac{a_n^2}{4}+\frac{1}{a_n}} > \frac{a_n}{2}, \text{ siis } a_{n+1} > a_n.$$

Seega on vaadeldav jada kasvav. Tuleb veel näidata, et sellel jadal puudub piirväärtus. Oletame, et vaadeldaval jadal on piirväärtus, s. t.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = A \quad \text{Siis} \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \frac{A}{2} + \sqrt{\frac{A^2}{4}+\frac{1}{A}}.$$

Et tegemist on sama jadaga, siis peaks olema ka

$$\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = A. \text{ Et aga } \frac{A}{2} + \sqrt{\frac{A^2}{4}+\frac{1}{A}} > A,$$

siis järelikult vaadeldaval jadal piirväärtus puudub. Et jada

$$\{a_n\}$$

on kasvav ja piirväärtust ei oma, siis on ta tõkestamata.

Vead vaadeldud ülesande lahendustes on põhiliselt kahte tüüpi. Tõestatakse, et jada on kasvav ja sellest tehakse kohe järeldus, et jada ei ole tõkestatud. Teine rühm õpilasi arvab jada olevat aritmeetilise või geomeetrilise progressiooni (!), leiab siis progressiooni üldliikme ega lase ennast häirida isegi sellest, et selliselt saadud üldliige erineb antud jada üldliikmest. Leidub õpilasi, kes siis veel ülesandele vastuse saamiseks arvutavad n-liikme summa ning seejärel selle summa piirväärtuse.

10_3. Avaldise $4ab + 22a + 47b$ jaguvuseks avaldisega $a^2 + 7b^2 + 811$ on tarvilik, et $4ab + 22a + 47b \geqslant a^2 + 7b^2 + 811$ ehk $a^2 - 2(2b + 11)a + 7b^2 - 47b + 811 \leqslant 0$. Järelikult peavad saadud ruutkolmliikmel (a suhtes) olema reaalsed nullkohad a_1 ja a_2:

$$a_{1,2} = (2b+11) \pm \sqrt{-3b^2 + 91b - 690}.$$

Selleks peab aga olema $-3b^2 + 91b - 690 \geqslant 0$. Siit $15 \leqslant b \leqslant$

$15\frac{1}{3}$. Et $b \in N$, siis $b = 15$ ja $a_1 = a_2 = a = 41$.

Enamik õpilasi ei osanud ülesandele üldse läheneda. Ainult 4 õpilast oli jaguvuseks vajaliku võrratuse välja kirjutanud, kahjuks aga hiljem ruutkolmliikme uurimisel vea teinud.

11_2. Selle ülesande lahendus koordinaatideks on lühidalt järgmine. Olgu $M(x, y)$, $A(x_1, y_1)$, $C(x_2, y_2)$, $D(x_3, y_3)$, $B(x_4, y_4)$. Oletame vastuväiteliselt, et

$$AC \neq DB$$

ja näitame, et siis ka eeldus ei kehti, s. t. et $MA \cdot MB = MC \cdot MD$.

Oletades, et

$$AC \neq DB$$

saame seosed koordinaatides:

kas $x_2 - x_1 \neq x_4 - x_3$ või $y_2 - y_1 \neq y_4 - y_3$
ehk $x_2 - x_1 - x_4 + x_3 \neq 0$ või $y_2 - y_1 - y_4 + y_3 \neq 0$.

Avaldades seose $MA \cdot MB = MC \cdot MD$ koordinaatides ja rühmitades liikmed x ja y järgi, saame võrrandi $x(x_2 - x_1 - x_4 + x_3) + y(y_2 - y_1 - y_4 + y_3) + C = 0$, kus x ja y kordajad ei ole korraga nullid. Seega leidub sirge $Ax + By + C = 0$ (kus $A = x_2 - x_1 - x_4 + x_3$ ja $B = y_2 - y_1 - y_4 + y_3$), mille kõigi punktide (x, y) korral on $MA \cdot MB = MC \cdot MD$. Siin ongi vastuolu eeldusega. Seega tõepoolest, kui $MA \cdot MB$ ja $MC \cdot MD$ ei ole võrdsed, siis $AC = DB$.

Põhilised eksimised selle ülesande lahendustes pole seotud otseselt vektori mõistega, vaid tulenevad teoreemi tõestuse olemuse mittetundmisest. Tõestatava teoreemi asemel tõestatakse kas pöördteoreem või vastandteoreem ja järeldatakse sellest teoreemi tõesus.

Artikli lõpetuseks ja lugeja lohutuseks olgu märgitud, et mitte kõik ülesanded ei osutunud nii rasketeks. Heaks näiteks on siin ülesanne 8_4, mille lahendamise eest sai 23 õpilast 30-st 9—10 punkti. Halvemini ei lahendatud ka ülesannet 11_3 — õige lahendus oli 27 õpilasel 41-st.

ÜLESANDED

8. klass

1.* On antud poolringjoon keskpunktiga O. Igast poolringjoone diameetri pikendusel asuvast punktist M tõmmatakse kiir, mis puudutab antud ringjoont. Sellele kiirele kantakse lõiguga MO võrdne lõik MX. Millise punktihulga moodustavad selliselt saadud punktid X?

(3,0)

2. Leida neljakohaline arv, kui tema äärmiste numbrite ruutude summa on 13, seesmiste numbrite ruutude summa aga 85. Kui sellest arvust lahutada 1089, siis saaksime arvu, mis on kirjutatav samade numbritega, millega otsitav arvgi, kuid vastupidises järjekorras.

(4,0)

3. Täisnurkse kolmnurga kaatet on 7 cm. Leida kolmnurga ülejäänud külgede pikkused, kui need on väljendatavad täisarvudena.

(4,0)

4. Praegu olen ma kaks korda nii vana, kui oli minu vend siis, kui mina olin sama vana, kui on vend praegu; kui minu vend saab sama vanaks, kui olen mina praegu, siis saab meie vanuste summa võrdseks 63 aastaga. Kui vana on kumbki praegu?

(8,4)

5. Lahendada võrrand

$$\frac{x^2}{3} + \frac{48}{x^2} = 10\left(\frac{x}{3} - \frac{4}{x}\right).$$

(3,5)

9. klass

1. Lahendada võrratus

$$(x^2+x+1)^x<1.$$

(6,2)

2.* Jada $\{a_n\}$ on antud järgmiselt:

$$a_1=1 \text{ ja } a_{n+1}=\frac{a_n}{2}+\sqrt{\frac{a_n^2}{4}+\frac{1}{a_n}}.$$

(0,5)

Tõestada, et antud jada ei ole tõkestatud.

3. Leida kahekohaline arv, mille jagatis oma numbrite summaga on võrdne ühe kolmandikuga oma numbrite summast.

(6,1)

4. Tõestada, et positiivsetest täisarvudest moodustatud aritmeetilise progressiooni kõik liikmed ei saa olla algarvud

$(d \neq 0)$.

(5,7)

5.* Punktid D ja E jaotavad võrdkülgse kolmnurga ABC küljed CA ja AB selliselt, et $AD:DC=BE:EA=1:2$; sirged BD ja CE lõikuvad punktis O. Tõestada, et $\angle AOC=90°$.

(1,6)

10. klass

1. Lõigule AB kui diameetrile on joonestatud poolringjoon, millel on võetud suvaline punkt S. Punkt D on punktist S lõigule AB tõmmatud ristlõigu aluspunkt. Ringjoon, mis on joonestatud kõverjoonsesse kolmnurka ASD, puudutab diameetrit AB punktis M. Tõestada, et $SB=BM$.

(2,5)

2. Kaks autot alustavad sõitu samaaegselt linnast A linna B. Mõlemad sõitsid sama teed erinevate, kuid ühtlaste kiirustega. Nende kiiruste vahe on algarv. Linnade A ja B vaheline kaugus on 100 km. Pärast kahetunnist sõitu oli aeglasemalt sõitva auto kaugus linnast A viis korda suurem kui suurema kiirusega sõitva auto kaugus linnast B. Millised on autode keskmised kiirused, kui on teada, et need on naturaalarvulised?

(5,2)

3. Milliste naturaalarvuliste a ja b korral avaldis $4ab+22a+47b$ jagub avaldisega a^2+7b^2+811?

(0,8)

4.* Kuubis serva pikkusega 1 asub kumer hulktahukas selliselt, et tema projektsioonid kuubi kõikidele tahkudele langevad ühte vastavate tahkudega. Tõestada, et sellise hulktahuka ruumala pole väiksem kui $1/3$.

(1,3)

5. Tõestada, et iga kolmnurga külgede a, b ja c korral kehtib võrratus $a(b-c)^2+b(c-a)^2+c(a-b)^2+4abc>a^3+b^3+c^3$.

(4,2)

11. klass

1. Lahendada võrratus

$$x^{2-\log_2^2 x-\log_2 x^2}-\frac{1}{x}>0$$

(7,6)

2.* Punktid A, B, C ja D asuvad tasandil selliselt, et tasandi iga punkti M korral skalaarkorrutised

$$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} \text{ ja } \overrightarrow{MC}\cdot\overrightarrow{MD}$$

pole võrdsed. Tõestada, et

$$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{DB}.$$

(1,4)

3. Toas on teatud hulk mehi, kes kõik on lähedased sugulased, kusjuures sugulussidemetes ollakse ainult kohalolijate kaudu. Kahel mehel neist on kohalolijate hulgas pojapoegi, kolmel poegi, neljal isasid ja kolmel on vanaisasid. Mitmel mehel on selles toas vendi?

(8,0)

4. Võrdhaarses kolmnurgas ABC on $AB=CB$. Haarale AB on kantud lõik BE_1, mis on võrdne kõrgusega BD_1. Saadud võrdhaarse kolmnurga BD_1E_1 haarale kantakse lõik BE_2, mis on võrdne kolmnurga BD_1E_1 kõrgusega BD_2 jne. Leida kõrguste $BD_1, BD_2, \ldots$ jada piirväärtus, kui $AC=a$ ja $AB=b$.

(3,8)

5.* Tõestada, et arvude $1^p; 2^p; 3^p, \ldots, (p-1)^p$ jagamisel p^2-ga tekkinud jääkide summa on $(p^3-p^2):2$, kui p on kahest suurem algarv.

(2,0)