

# EFO Temaatika

## 0 Matemaatika

### 0.1 Summa

Summa lühemalt kirja panemiseks kasutatakse suurt kreeka tähte sigma,  $\sum$ . Seda notatsiooni kasutades saab summa kirja panna järgnevalt:

$$\sum_{i=m}^n a_i = a_m + a_{m+1} + a_{m+2} + \dots + a_{n-1} + a_n,$$

kus  $i$  on indeks üle mille summeeritakse;  $a_i$  on muutuja, mis esindab igat summa liiget;  $m$  tähistab indeksi  $i$  algväärtust ja  $n$  lõppväärtust. Indeks  $i$  suureneb alati ühe võrra alustades täisarvust  $m$  ja lõpetades täisarvuga  $n$ . Mõnikord pole täpsed indeksi alg- ja lõppväärtused teada või olulised, siis jäetakse need ära:  $\sum_i a_i$ . Üldjuhul võib kasutada ükskõik mis tähti summas indeksina (kuni need mitmetimõistetavust ei tekita), levinud on  $i$ ,  $j$ ,  $k$  ja  $n$ . **Näide.** Summeerime kokku arvu ruudud alates kolmest ja lõpedates kuuega. Summa notatsiooni kirja pannes on avaldub see järgnevalt

$$\sum_{i=3}^6 i^2 = 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 = 86.$$

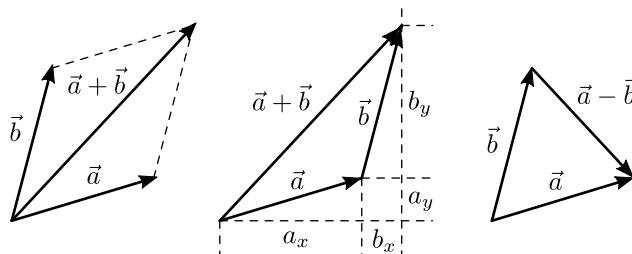
### 0.2 Vektorid

Füüsika kontekstis on vektorid teatud suuna ja pikkusega objektid; me võime neid ette kujutada kui ruumis asuvaid nooli. Tüüpiline näide vektorist on jõud. Jõul on nii suurus kui ka rakendussuund. Veel on vektorid näiteks kiirus, nihe, impulss ning elektri- ja magnetväli.

Vektoreid tähistatakse üldiselt noolega nende kohal, näiteks  $\vec{a}$ . Lisaks võib vektoreid ekvivalentselt kirja panna koordinaatkujul,  $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ , kus me kirjeldame vektori  $x$ -,  $y$ - ja  $z$ -suunalist komponenti. Vektorite pikkus on arvutatav Pythagorase teoreemist kui  $|\vec{a}| = a = (a_x^2 + a_y^2 + a_z^2)^{1/2}$ , kus  $|\dots|$  tähistab vektori pikkust. Edaspidi tähistab ka vektor ilma nooleta vastava vektori pikkust.

Vektoreid saab kokku liita:  $\vec{a} + \vec{b} = (a_x + b_x, a_y + b_y, a_z + b_z)$ , lahutada:  $\vec{a} - \vec{b} = (a_x - b_x, a_y - b_y, a_z - b_z)$  ning skalaariga korrutada:  $\lambda \vec{a} = (\lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z)$ .

Vektorite liitmist ja lahutamist võib ette kujutada ka geomeetriselt, vt joonist 1. Tüüpiliselt esitatakse füüsikas asukoha vektorit kui  $\vec{r}$ .



Joonis 1: vektorite liitmine ja lahutamine

### 0.3 Tuletised ja diferentsiaalid

Funktsiooni tuletis mingi argumenti väärtuse juures tähistab funktsiooni väärtuse muutumise kiirust argumenti muutmisel. Tuletise mugavamaks defineerimiseks defineerime kõigepealt funktsiooni diferentsiaali  $df$  kui funktsiooni  $f$  väärtuse muutuse kui selle argument muutub  $dx$  võrra. Siinkohal tähistab eesliide  $d$  mingi parameetri lõputult väikest muutust. Võrdluseks võib tuua deltaga tähistatavat funktsiooni muutu  $\Delta f$ , mis vastab lõplikule muudule.  $df$  peale võib mõelda kui  $\Delta f$  erijuhtu, kus delta läheneb lõputult väiksele muutusele. Niisiis, on diferentsiaali kaudu funktsiooni tuletis defineeritav kui  $f'(x) = \frac{df}{dx} \approx \Delta f / \Delta x$ . Näeme, et see tuletis  $f'(x)$  vastab  $f(x) - x$  graafiku tõusule  $\tan(\alpha)$ . Funktsiooni tuletise definitsiooni saab formaalsemalt kirja panna ka piirväärtustega:

$$\frac{df}{dx} \equiv \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Füüsikas on tihti tavaks tähistada tuletisi  $x$  suhtes kui  $f'$  ja aja suhtes kui  $\dot{f}$ . Keerulisemates olukordades on segaduse vältimiseks parem tuletis pikalt diferentsiaalide kaudu välja kirjutada. Tüüpiline näide tuletisest on kiirus kui asukoha tuletis aja järgi ning kiirendus kui kiiruse tuletis aja järgi. Antud seosed saab järgnevalt kirja panna:

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t},$$

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = \dot{\vec{v}} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{v}(t + \Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \ddot{\vec{r}}.$$

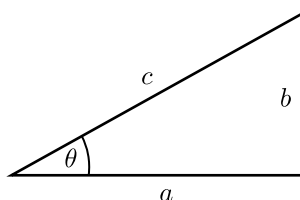
Tuletised järgivad hunnik erinevaid reegleid, mis on kõik tuletatavad tuletise definitsioonist. Järgnevas kahes tabelis on olulisemad omadused ja reeglid välja toodud ( $c$  tähistab konstanti):

Funktsioon	Tuletis		
const	0		
$x$	1		
$x^n$	$nx^{n-1}$		
$\sin x$	$\cos x$		
$\cos x$	$-\sin x$		
$e^x$	$e^x$		
$\ln x$	$1/x$		
Reegel		Nimetus	Nimetus inglise keeles
$(c_1f + c_2g)' = c_1f' + c_2g'$		Tuletise lineaarsus	Derivative linearity
$(fg)' = f'g + fg'$		Korrutise tuletis	Product rule
$\frac{df}{dx} = \frac{df}{dg} \frac{dg}{dx}$		Liitfunktsiooni tuletis	Chain rule
$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - g'f}{g^2}$		Jagatise tuletis	Quotient rule

## 0.4 Trigonomeetria

Trigonomeetria käsitleb kolmnurga külgede ja nurkade vahelisi seoseid. Toome meeldetuletuseks välja trigonomeetriliste funktsioonide olulisemad omadused.

- Vaatleme täisnurkset kolmnurka kaatetitega  $a$  ja  $b$  ning hüpotenuusiga  $c$ . Olgu  $a$  ja  $b$  vaheline nurk  $\theta$ . Sellisel juhul

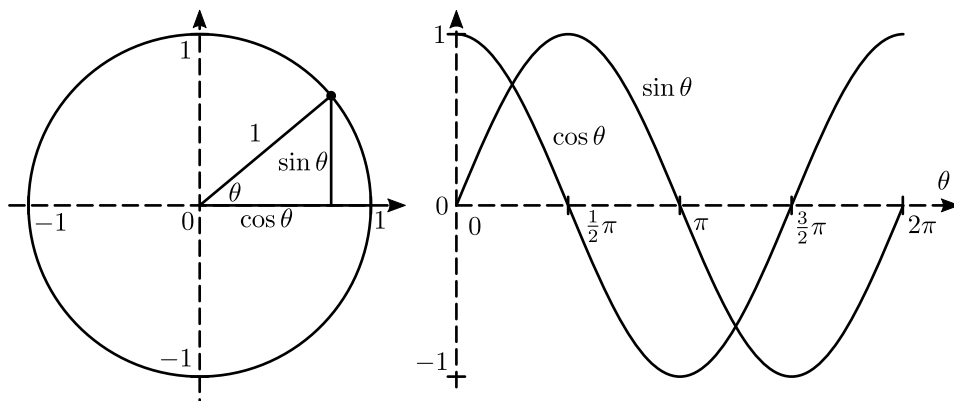


$$\begin{aligned}\sin \theta &= \frac{a}{c}, \\ \cos \theta &= \frac{b}{c}, \\ \tan \theta &= \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{b}{a}.\end{aligned}$$

Lisaks rahuldab täisnurkne kolmnurk Pythagorose teoreemi  $a^2 + b^2 = c^2$ . Asendades  $a = c \sin \theta$  ja  $b = c \cos \theta$  saame  $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ .

- Trigonomeetrilise funktsioone on tihti intuitiivsem ette kujutada kui ühikraadiusega ringi kuju kirjeldav võrrandit (vt joonist). Sellisel juhul

on ringi mingi punkti  $x$ - ja  $y$ -koordinaat vastavalt  $x = \cos \theta$  ja  $y = \sin \theta$ , kus  $\theta \in [0, 2\pi]$ . Tõepoolest, antud punkt asub ringi peal, sest  $r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta} = 1$ .



- Trigonomeetrilised funktsioonid rahuldavad erinevaid seoseid, nagu näiteks

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta,$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta,$$

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}.$$

Rakendades antud valemeid on võimalik näidata, et

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha,$$

$$\sin 2\alpha = 2 \cos \alpha \sin \alpha,$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2},$$

$$\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}.$$

## 0.5 Väikeste suuruste lähendus

Füüsikas tuleb tihti esile, et mõni füüsiline suurus on teisest palju suurem. Sellisel juhul on tihti võimalik tekkinuid võrrandeid seda asjaolu ära kasutades lihtsustada<sup>1</sup>. Näiteks, kui täisnurkses kolmnurgas  $\theta \ll 1$ , siis  $\sin \theta \approx \theta$  (ühikud radiaanides). Antud lähendus on lihtsasti nähtav asjaolust, et hüpotenuusi  $c$  raadiusega kaar kaarepikkusega  $c\theta$  läheneb väikeste nurkade puhul sirglõigule pikkusega  $b$ . Seega,  $\sin \theta = b/c \approx \theta$ .

<sup>1</sup>Tüüpiliselt kasutatakse selle jaoks funktsioonide Tayloriga arendamist

Kokkuvõte erinevatest väikeste suuruste lähendustest (juhul kui  $|\theta| \ll 1$  ja  $|x| \ll 1$ ):

$$\begin{aligned}\sin \theta &\approx \tan \theta \approx \theta, \\ \cos \theta &\approx 1 - \frac{\theta^2}{2}, \\ e^x &\approx 1 + x, \\ \ln(1+x) &\approx x, \\ (1+x)^n &\approx 1 + nx, \\ \frac{1}{1-x} &\approx 1 + x.\end{aligned}$$

## 1 Mehaanika

### 1.1 Kinemaatika

#### 1.1.1 Ühtlase kiirusega liikumine

*Märksõnad: Hetke- ja keskmine kiirus, inertsiaalne (ühtlase kiirusega liikuv) taustsüsteem. Teepikkuse leidmine kiiruse graafikualuse pindala abil.*

#### 1. Müra

Autor: Siim Ainsaar, lahtine, 2009, G 10

Matkaja on laagripplatsil õnnelik, et elektrijaama müra temani tuuletu ilmaga nii vaikselt kostab. Veidi hiljem, tuulega, on müra veel tasanem. Puhub põhjatuul kiirusega  $\beta c$ , kus  $c$  on heli kiirus paigalseisvas õhus; jaam jääb matkajast edelasse (st tuule ja jaama suundade vaheline nurk on  $\alpha = 135^\circ$ ).

a) Kas helisagedus on sama mis tuuleta?

b) Kui tuuleta on tajutav helivõimsus  $P$  ja tuulega  $xP$ , siis kui suur on  $x$ ?

Võite lugeda, et elektrijaam on punktikujuuline.

*Soovitus.* Uurige helifrondi levimist

#### 2. Potsataja ja pähkliid

Autor: Erkki Tempel, piirkonnavor, 2014, G 2

Rongi viimase vaguni katusel istub Potsataja, kes loobib maha pähkliid. Potsataja viskab ühe pähkli maapinna suhtes horisontaalselt rongi liikumisega vastassuunas algkiirusega  $u$ . Samal hetkel viskab ta ka teise pähkli samuti maapinna suhtes horisontaalselt ning sama algkiirusega  $u$ , kuid risti rongi liikumise suunaga. Rong liigub ühtlaselt ja sirgjooneliselt kiirusega  $v$  ning pähkliid visatakse maapinna suhtes kõrguselt  $h$ . Kui kaugel teineteisest pähkliid maanduvad? Õhutakistust mitte arvestada.

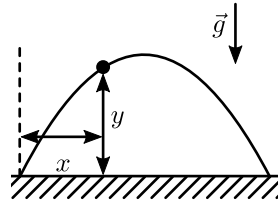
#### 1.1.2 Ühtlase kiirendusega liikumine

*Märksõnad: Kiirendus. Ühtlase kiirusega ja ühtlase kiirendusega liikumine: koordinaatide sõltuvus ajast.*

Ühtlase kiirendusega  $a$  keha kiirendus avaldub kujul  $v = v_0 + at$ , kus  $v_0$  on keha kiirus ajahetkel  $t = 0$ .  $v - t$  graafikul avaldub see sirgjoonena ning seega avaldub summaarne nihe kolmnurkade pindalade kaudu kui  $x = x_0 + v_0t + at^2/2$ , kus  $x_0$  on keha asukoht ajahetkel  $t = 0$ .

**Näide.** Maapinnalt tulistatakse nurga  $\alpha$  all kuul algkiirusega  $v_0$ . Mis on kuuli edasise trajektoori võrrand  $y(x)$ ? Raskuskiirendus on  $g = 9,81 \text{ m/s}^2$ .

**Lahendus.** Maapinnal mõjub igale kehale allapoole ühtlane raskuskiirendus  $g$  (vektoriaalselt  $\vec{g} = (0, -g)$ ). Kuna  $x$ -suunas kiirendust ei mõju ( $a_x = 0$ ), siis horisontaalne nihe on  $x = v_{0,x}t = v_0t \cos \alpha$ . Vertikaalselt mõjub  $a_y = -g$  ning seega  $y = v_0t \sin \alpha - gt^2/2$ . Pannes  $t = x/(v_0 \cos \alpha)$  viimasesse võrrandisse, saame



$$y = x \tan \alpha - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2.$$

Tegu on parabooli võrrandiga, teisisõnu liiguvad raskusväljas kehad mööda paraboolseid trajektoore.

### 1.1.3 Pöördliikumine

*Märksõnad: Pöördliikumine, nurk, nurkkiirus, nurkkiirendus, hetkeline pöörlemistelg. Pöörlev taustsüsteem.*

Pöörlemine on keha ainepunktide ringliikumine ümber pöörlemistelje ning on jäikade kehade üks kõige lihtsamaid liikumisi. See on nõnda, sest pöörlemine on peale kulgliikumise ainus liikumine, mille käigus püsib kõikide keha ainepunktide vaheline kaugus muutumatu. Pöörlemise käigus liiguvad kõik keha või süsteemi punktid mööda ringjooni, mille keskpunkt ühtib pöörlemisteljega ning mis on sellega risti. Pöörlemise kiirust saab kirjeldada pöörlemise perioodiga  $T$ , sagedusega  $f = 1/T$  või nurksagedusega  $\omega = 2\pi/T$ .  $\perp$  tähistab üldiselt ringjoonelise trajektoori raadiusvektori ristkomponenti. Sellisel juhul on kaugusel  $r$  pöörlemisteljest liikumiskiirus  $v_{\perp} = 2\pi r/T = 2\pi r f = r\omega$ . Tahkete kehade olulisus mehaanikas nõuab pöördliikumist käsitleva teooria välja töötamist.

#### 3. Pallivise

Autor: Eero Vaher, lõppvoor, 2015, G 5

Juku elab silindrikujulises kosmosejaamas, mille pöörlemine tekitab kunstliku raskusjõu. Jaama raadius on  $R$ , selle pöörlemise nurkkiirus  $\omega$ . Juku viskab palli otse üles algkiirusega  $v = \frac{\sqrt{3}}{3}\omega R$ . Kui kaugelt Jukust mööda jaama pinda pall maandub?

#### 4. Kurv

Autor: Mihkel Rähn, lahtine, 2016, G 2

Kiirusega  $v = 90 \text{ km/h}$  sõitev auto läbib kurvi raadiusega  $R = 250 \text{ m}$ . Kui suur peab olema tee külgekalle (kraadides), et autos istujad ei tunneks kurvist tingitud külgsuunalist jõudu? Raskuskiirendus  $g = 9,8 \text{ m/s}^2$ .

## 5. Traatrõngad

Autor: Jaan Kalda, lõppvoor, 2014, G 9

Kaks ühesugust traatrõngast raadiusega  $R$  on üksteise vahetus läheduses, rõngaste tasandid on paralleelsed ning rõngad puudutavad üksteist punktides  $A$  ja  $B$ . Kaarele  $AB$  vastav kesknurk on vaadeldaval ajahetkel  $\alpha$ . Alumine rõngas on paigal, ülemine pöörleb nurkkiirusega  $\omega$  ümber punkti  $A$  läbiva ning rõngaste tasanditega risti oleva telje. Leidke rõngaste puutepunkti  $B$  kiirus antud ajahetkel.

## 1.2 Staatika

*Märksõnad: Mass ja massikeske, tihedus.*

Massikeske on punkt, mis iseloomustab keha massi keskmist asukohta. Seega, jagades keha (kogumassiga  $m$ ) mõtteliselt  $N$  väikseks tükiks massidega  $m_i$ , rahuldab massikeskme asukoht  $\vec{r}_k$  seost

$$\vec{r}_k = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i.$$

Komponentide kujul  $r_{k,x} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^N m_i r_{i,x}$ . Keha kirjeldavate arvutuste tegemine tihti lihtsustub kui neid massikeskme suhtes arvutada (näeme seda hiljem). Näiteks kuigi kehale mõjuv raskusjõud tõmbab iga keha ainepunkti ühtlaselt, võib raskusjõudu efektiivselt ette kujutada kui asumast keha massikeskmes.

### 1.2.1 Jõud ja jõudude tasakaal

*Märksõnad: Jõud ja jõudude tasakaal. Raskusjõud, hõõrdejõud, toereaktsioon, rõhujõud, pinge nõõris.*

## 6. Rõngas

Autor: Taavi Pungas, piirkonnavor, 2014, G 6

Lae külge on nõõriga, mille pikkus on  $L$ , kinnitatud kerge plastmassrõngas raadiusega  $R$ , mille küljes on omakorda raske metallist mutter. Mutrit saab mööda rõngast libistada. Rõnga ja mutri vaheline hõõrdetegur on  $\mu$ . Juku tahab mutrit mööda rõngast nihutada saavutada olukorda, kus mutri ja lae vahekaugus  $h$  oleks võimalikult väike, aga süsteem püsiks veel ilma välise sekkumiseta tasakaalus. Leidke vähim vahekaugus  $h_{\min}$ , mille Juku võib saavutada. Eeldage, et rõnga mass on mutri omaga võrreldes tühiselt väike.

## 7. Klotsid

Autor: Mihkel Rähn, piirkonnavor, 2014, G 7

Horisontaalsel laual asuva klotsi massiga  $m_1$  peale on asetatud teine klots massiga  $m_2$ . Kahe klotsi vaheline seisuhõõrdetegur on  $\mu_2$ . Alumise klotsi ja laua vaheline liugehõõrdetegur on  $\mu_1$ . Leidke maksimaalne horisontaalne jõud  $F$ , millega võib alumist klotsi tõmmata, ilma et ülemine klots libiseks.

## 8. Kelk

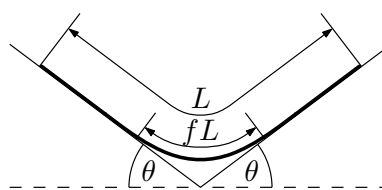
Autor: Andreas Valdmann, piirkonnavor, 2018, G 9

Juku läks sõpradega kelgutama. Teel tagasi istusid Juku kaks sõpra kelgule ja Juku üritas kelku horisontaalsel lumisel teel enda järel vedada. Kui suur on minimaalne kelgunööri nurk maapinnaga, mille korral on Jukul võimalik kelk liikuma tõmmata? Juku mass  $m_1 = 60$  kg ja hõõrdetegur Juku saabaste ning lume vahel  $\mu_1 = 0,30$ . Kelgu mass koos Juku sõpradega  $m_2 = 110$  kg ja hõõrdetegur kelgu ning lume vahel  $\mu_2 = 0,20$ .

## 9. Nöör rennis

Autor: Stanislav Zavjalov, lahtine, 2012, G 9

Kaks plaati moodustavad V-kujulise horisontaalse renni. Mõlemad plaadid on horisontaaltasapinna suhtes nurga  $\theta$  all. Rennis on jupp ühtlase massijaotusega nööri pikkusega  $L$ , mis asub tervikuna renniga ristuv tasandil nii, et mõlema plaadiga puutub kokku sama palju nööri. Renni põhja kohal ei toetu nöör enam pikkuse  $fL$  ulatuses plaatidele. Leidke  $f$ , kui nöör on libisemise piiril. Hõõrdetegur nööri ja plaatide vahel on  $\mu = 1$ .



## 10. Katus

Autor: Jaan Kalda, lõppvoor, 2017, G 9

Kaks jäika traadijuppi pikkusega  $L$  on ühendatud otsapidi (nt niidiga seotud) nii, et nende otspunktid on kontaktis ja nende vaheline nurk saab takistuseta muutuda, moodustades V-kujulise figuuri. See traadist moodustis asetatakse horisontaalse libedapinnalise silindri peale nõnda, et tasakaaluasendis moodustub traadist “katus” (tagurpidi “V”) tipunurgaga  $\alpha$ . Massijaotus traadis on ühtlane, hõõre traadi ja silindri vahel puudub. a) Milline on silindri raadius  $R$ ? b) Milline võrratus peab olema rahuldatud, et see asend oleks stabiilne (uurida stabiilsust vaid “katuse” kui terviku pöördumise suhtes, eeldades et traatidevaheline nurk ei muutu)?

### 1.2.2 Hooke'i seadus

*Märksõna: Hooke'i seadus.*

Hooke'i seaduse kohaselt on vedru pikemaks venitamiseks  $x$  võrra vajalik jõud avaldatav kui  $F = kx$ , kus  $k$  on vedru jäikustegur. Antud seos on empiiriline ning ei kehti iga vedru puhul (aga olümpiaadiülesannetes tihti eeldatakse seose kehtimist)

### 1.2.3 Plokid ja plokisüsteemid

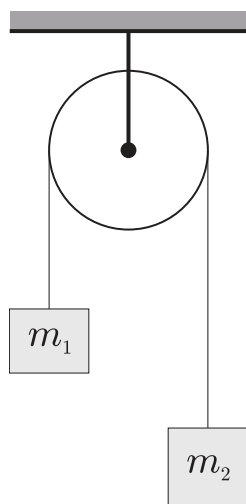
*Märksõna: Plokid ja plokisüsteemid.*

## 11. Plokk

Autor: Tundmatu autor, lahtine, 2006, G 5

Kui suure kiirendusega  $a_k$  ja mis suunas hakkab liikuma kahest kehast koosneva süsteemi massikeske, kui kehad on seotud niidiga, mis on tõmmatud üle ploki (vt joonist)? Kehade massid on  $m_1$  ja  $m_2$  ( $m_1 < m_2$ ), niit on kaalutu ja mitteelastne.

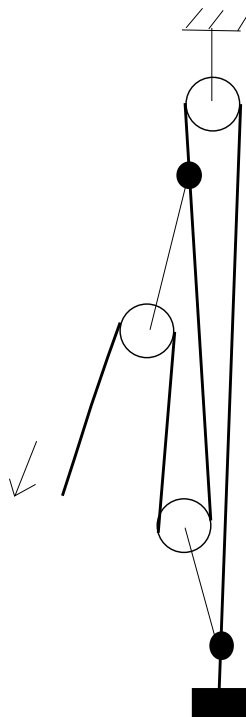




## 12. Polüspast

Autor: Mihkel Rähn, lõppvoor, 2014, G 6

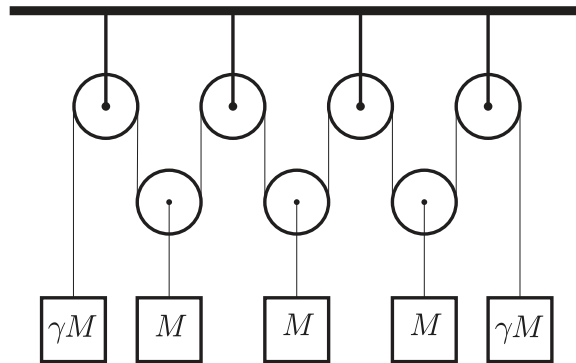
Jäälõhese kukkunud alpinisti väljatõmbamiseks on käepärastest vahenditest (kolm plokki ja nõõrijupid) koostatud polüspast. Lihtsustatud joonisel on jämeda joonega märgitud põhikõis, mille ühes otsas on kukkunu ning teisest otsast vinnatakse. Plokid on peene joonega kujutatud nõõri abil kinnitatud mittelibiseva sõlmega (joonisel täidetud ring) põhikõie külge. Leidke polüspasti ülekandetegur nii hõõrdumist arvestamata kui ka eeldusel, et hõõrdumine vähendab jõuülekannet igal plokil 35%. Eeldage, et kõik jõud on vertikaalsed.



### 13. Plokid

Autor: Mihkel Kree, piirkonnavor, 2008, G 9

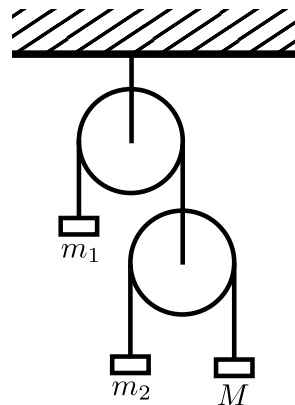
Polüspast ehk liitplokk koosneb seitsmest plokist (vt. joonist). Koormiste massid  $M$  ja  $\gamma M$  on näidatud joonisel. Missuguse kiirendusega hakkavad liikuma äärmised koormised? Mis tingimust peab rahuldama suurus  $\gamma$ , et äärmised koormised hakkaksid langema? Plokkide ja nööri mass jätta arvestamata ning nöör lugeda venimatuks.



### 14. Plokid

Autor: Taavet Kalda, lahtine, 2017, G 8

Joonisel on kujutatud kahest plokist ja kolmest raskusest, massidega  $m_1$ ,  $m_2$  ja  $M$  koosnevat süsteemi. Nöörid on venimatud ning nööride ja plokkide massid on tühised võrreldes raskuste massidega. Hõõre ploki ja nööri vahel on tühiselt väike. Missugune peaks olema  $M$  väärtus selleks, et  $M$  jääks esialgu paigale, kui süsteem lahti lasta?



#### 1.2.4 Jõumoment

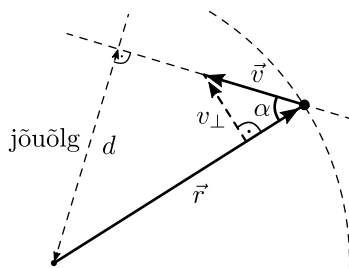
*Märksõnad: jõumoment, jõumomentide tasakaal, Kangi reegel. Kolme vektori trikk.*

Jõumoment kirjeldab süsteemi pöörlemishulga muutumise kiirust. Jõumomendi kindlamaks kasutamiseks on kõigepealt vaja defineerida pöörlemishulk, ehk **impulsi-moment**.

Selle jaoks vaatleme punktmassi massiga  $m$  ja kiirusega  $\vec{v}$  liikumist ümber koordinaatide nullpunktis asuva  $z$ -suunalise telje suhtes.

Sellisel juhul on impulsimoment defineeritud kui  $L = mrv \sin \alpha$ , kus  $\alpha$  on nurk kiiruse ja raadiusvektori suhtes.

Intuitiivsemalt võib selle kirja panna ka kui  $L = mrv_{\perp} = mr^2\omega$ , kus  $v_{\perp} = v \sin \alpha$  on kiiruse raadiusvektoriga ristikomponent (vt joonist). Nimelt on loogiline, et raadiusvektoriga paralleelne komponent  $v_{\parallel}$  ei panusta pöörlemisse ning ei tohiks seega impulsimomenti mõjutada.



Joonis 2: Punktmassi impulsimomendi arvutamine.  $d$  on jõuõlg ja  $v_{\perp} = v \sin \alpha$  on kiiruse tangentsiaalkomponent.

Lisaks võib impulsimomenti kirja panna kui  $L = mdv$ , kus  $d = r \sin \alpha$  on jõuõlg (jõuõlg on jõu või kiiruse mõjusirge kaugus toetuspunktist või pöörlemisteljest). Veenduge, et kõik impulsimomendi kirjapanekud on ekvivalentsed.

Impulsimoment  $L = mr^2\omega$  suhtub pöörlemisse  $\omega$  nagu impulss  $p = mv$  suhtub kulgliikumisse  $v$ . Seega oleks pöörlemise “mass” punktmassi jaoks  $mr^2$ . Pöörlemisse “massi” kutsutakse inertsimomendiks, uurime seda lähemalt järgmises peatükis.

Paar tähelepanekut:

- Impulsimomendil on märk! Tüüpiliselt tähistatakse vastupäeva pöörlevaid asju positiivse märgiga ja päripäeva negatiivsega. Antud märkide konventsioon ei ole aga kohustuslik (vastupidiseid märke võib ka kasutada), aga valitud konventsioonist tuleb ühe ülesande vältel kinni pidada (sest muidu tulevad märgivead!).
- Sarnaselt kulgliikumise hulgale (impulsile) avaldub mitme keha impulsimoment mingi telje suhtes lihtsalt nende kehade impulsimomentide summana. See nõuab aga ettevaatlikust, sest mitme keha impulsimomendist rääkimine on loogiline ainult ühtse pöörlemistelje suhtes. Kehade impulsimomente ei ole võimalik erinevate telgede suhtes kokku liita.

Niisiis, kui impulsi ajalast muutust kirjeldab jõud, siis impulsimomendi muutust kirjeldab **jõumoment**  $\tau = \Delta L / \Delta t = rF \sin \beta$ , kus  $\beta$  on nurk raadiusvektori ja jõu suuna vahel.

Tegu on Newtoni II seaduse üldistusega pöörlemise jaoks. Jõumomendi võib sarnaselt impulsimomendile kirja panna jõuõla kaudu  $\tau = dF$  või jõu tangentsiaalkomponendi kaudu  $\tau = rF_{\perp}$  (pane tähele, et need on samad võrrandid nagu impulsimomendil, ainult et kiirused on jõududega asendatud). Sarnaselt impulsimomendile on jõumomendil märk ning fikseeritud telje suhtes võib jõumomente kokku liita.

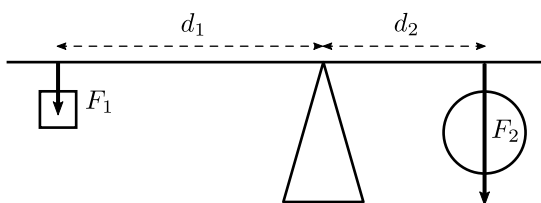
Niisiis,  $\Delta t$  vältel muutub impulsimoment  $\Delta L = \tau \Delta t$  võrra. Olukorrast, kus  $\tau = 0$  tuleneb oluline jäävusseadus:

**Impulsimomendi jäävuse seadus.** Juhul kui süsteemile ei mõju mingi telje suhtes väliste jõudude poolt summaarset jõumomenti (s.t. kehtib jõumomentide tasakaal), püsib süsteemi impulsimoment  $L$  vastava telje suhtes muutumatuna (punkt-massi jaoks  $L = mrv_{\perp}$ ).

Siinkohal ka üks olulisemaid impulsimomendi jäävuse tagajärgi:

- Dünaamilises tasakaalus oleva süsteemi puhul kehtib peale jõudude tasakaalu ka **jõumomentide tasakaal**. Lihtsamate süsteemide puhul piisab küll tihti jõudude tasakaalust. Täpsuse mõttes võib ka välja tuua, et tegu on eelnevalt mainitud impulsimomendi jäävuse seaduse erijuhuga, kus nii  $\tau = 0$  kui ka  $L = 0$ .

**Näide.** Antud jõumomentide tasakaalutingimust kutsutakse mõnikord ka kangi reegliks. Kangi reegel käsitleb küll lihtsustatud süsteemi (joonis 3), kus telje peale toetuvale kangile rakendatakse kahte jõudu  $F_1$  ja  $F_2$  kaugustel  $d_1$  ja  $d_2$  kangi teljest. Kangi reegli kohaselt  $F_1 d_1 = F_2 d_2$ . Tõepoolest, see tuleb otseselt jõumomentide tasakaalust  $\tau_1 + \tau_2 = 0$ , kus  $\tau_1 = d_1 F_1$  (jõumoment paneb keha vastupäeva pöörlema, seega positiivne) on ühe keha jõumoment telje suhtes ning  $\tau_2 = -d_2 F_2$  teise keha jõumoment sama telje suhtes (jõumoment paneb keha päripäeva pöörlema).



Joonis 3: Kangi reegel.

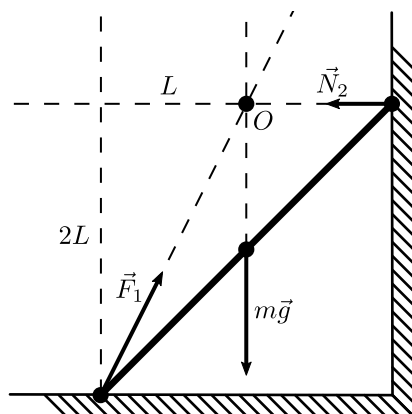
### Kolme vektori trikk

Kehale millele mõjub kokku kolm jõudu, peab tasakaalu kehtimiseks kõikide jõudude pikendused lõikuma ühes punktis.

Seda saab tõestada vaadeldes jõumomenti kahe rakendatud jõu pikenduste lõikepunkti  $O$  suhtes. On selge, et punkti  $O$  definitsioonist on kahe vaadeldava jõu jõumendid null (sest nende jõuõlad on null) ning seega peab jõumomentide tasakaalu jaoks ka kolmanda jõu jõuõlg null olema. See aga tähendab, et kolmas jõud lõikub punktiga  $O$  ning seega lõikuvad kõikide jõudude pikendused punktis  $O$ .

**Näide.** Lahendage järgnev ülesanne kolme vektori triki kaudu. Ühtlase massijaotusega redel massiga  $m$  ja pikkusega  $2L$  toetub vastu hästi libedat seina  $45^\circ$  nurga all. Missugune peab olema redeli ja pöranda vaheline hõõrdetegur selleks, et redel maha ei kukuks?

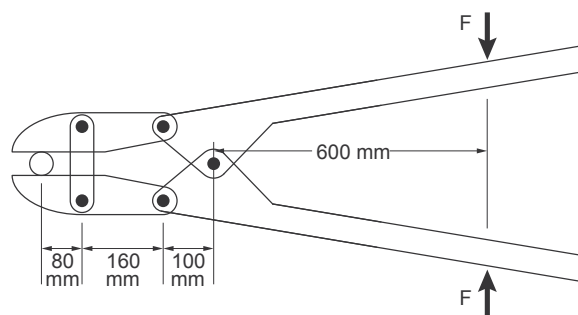
**Lahendus.** Kombineerides alumise kontaktpunkti normaal- ning hõõrdejõu üheks resultantjõuks  $\vec{F}_1$ , mõjub redelile kokku kolm erinevat jõudu. Kuna redel peab olema tasakaalus, saame rakendada kolme vektori trikki. Tähistagem jõudude pikenduste lõikepunkti kui  $O$ . Leiame  $O$  asukoha raskusjõu ning redeli ja seina normaaljõu kaudu (kuna nende jõudude suunad on teada). See võimaldab natukese geomeetria kaudu avaldada, et  $\vec{F}_1$  nurk  $\alpha$  pinnanormaali suhtes on  $\tan \alpha = 1/2 = \tan \mu$ . On selge, et see annab  $\mu$  miinimumväärtuse, s.t.  $\mu \geq 1/2$ .



**15. Poldilõikur**

Autor: Mihkel Rähn, piirkonnavor, 2015, G 7

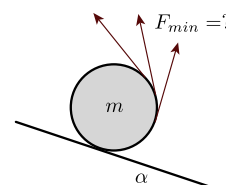
Leida, kui suurt jõudu avaldab poldilõikuri tera poldile (vt joonis), kui käepidemetele avaldatud jõud on  $F = 90 \text{ N}$ .



**16. Niidirull**

Autor: Mihkel Kree, lahtine, 2013, G 8

Silinder massiga  $m$ , millele on keritud õhuke niit, asetatakse kaldpinnale nurgaga  $\alpha$ . Millise minimaalse jõuga  $F_{\min}$  tuleb nõõrist hoida, et silinder paigale jääks (vt joonist)? Hõõrdetegur pinna ja silindri vahel on nii suur, et libisemist ei toimu.



**17. Jalgrattur**

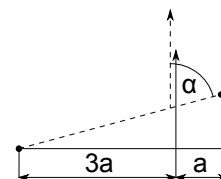
Autor: Andres Põldaru, lahtine, 2014, G 8

Jalgrattur sõidab alla ühtlase kallakuga nõlvast. Kui ta vajutab pidureid täpselt nii kõvasti, et tagumine ratas on peaaegu õhku tõusmas, siis tema kiirus mäest alla sõites ei muutu. Jalgratturist ja rattast koosneva süsteemi massikeske asub täpselt kahe ratta vahel kaugusel  $h$  maapinnast, rataste telgede vahekaugus on  $d$ . Kui suur on nõlva ja horisontaalsihi vaheline nurk  $\alpha$ ? Kui suur peab olema ratta ja kaldpinna vaheline hõõrdetegur  $\mu$ , et jalgrattur saaks kirjeldatud moel pidurdada?

**18. Niidiga hantel**

Autor: Jaan Kalda, lõppvoor, 2015, G 9

Horisontaalpinnal lebab hantel, mis koosneb kaalutust vardast pikkusega  $l = 4a$  ning selle otstele kinnitatud kahest ühesuguse massi ja hõõrdeteguriga väikesest klotsist. Varda külge kaugusele  $a$  ühest klotsist on seotud pikk niit. Algul on niidi suund horisontaalne ja risti vardaga. Niiti aeglaselt tõmmates hakkab hantel pöörduma, sest alguses nihkub vaid üks klots. Milline on nurk  $\alpha$  varda ja niidi vahel siis, kui ka teine klots nihkuma hakkab?



### 1.2.5 Virtuaalse nihke meetod

*Märksõna: Virtuaalse nihke meetod.*

Virtuaalse nihke meetod ütleb, et kui süsteemis on vaja leida teatud punktis rakendatav jõud, võime mõtteliselt ette kujutada jõu rakenduspunkti nihutamist  $\Delta x$  võrra, ning leida nihkele vastava potentsiaalse energia muudu  $\Delta\Pi$ . Sellisel juhul on otsitav jõud avaldatav kui  $F = \Delta\Pi/\Delta x$ .

#### 19. Rong tunnelis

Autor: Eero Uustalu, lõppvoor, 2009, G 4

Rong liikus kiirusega  $v = 54 \text{ km/h}$  läbi pika horisontaalse silindrikujulise tunneli. Kui palju tõusis tunnelis asuva õhu temperatuur? Tunneli läbimõõt oli  $d = 5 \text{ m}$ . Rongi elektrimootor tarbis tunnelit läbides võimsust  $P = 800 \text{ kW}$ . Õhu molaarmass on  $M = 29 \text{ g/mol}$ , õhurõhk tunnelis  $p = 100 \text{ kPa}$  ja algtemperatuur  $t_0 = 17^\circ\text{C}$ . Õhk lugeda kaheaatomiliseks ideaalseks gaasiks. Eeldada, et rongi liikumisest tekkinud õhuvoolude liikumisest tulenev alarõhk on atmosfäärirõhuga võrreldes tühine

*Märkus.* Kaheaatomilise gaasi siseenergia ühe molekuli kohta on  $5/3$  korda suurem kui samal temperatuuril oleval üheaatomilisel gaasil.

## 1.3 Dünaamika

### 1.3.1 Newtoni seadused

*Märksõnad: Newtoni seadused.*

- **Newtoni I seadus.** Kui kehale mõjuv summaarne jõud on null, siis see liigub ühtlaselt sirgjooneliselt.
- **Newtoni II seadus.** Kui kehale mõjuv summaarne jõud on nullist erinev, siis keha kiireneb kiirendusega  $\vec{a}$ , mis on jõuga seotud kui  $\vec{F} = m\vec{a}$ , kus  $m$  on keha mass.
- **Newtoni III seadus.** Kaks keha mõjutavad teineteist jõududega, mis on suuruselt võrdsed ja vastassuunalised.

Nagu näha, on Newtoni I seadus lihtsalt Newtoni II seaduse erijuht juhul kui  $\vec{F} = 0$ . Newtoni III seadusest järeldub, et süsteemile kui tervikule mõjuvat jõudu ei mõjuta sisemised jõud, sest nende jõudude summa koondub Newtoni III seaduse kohaselt ära.

## 20. Lendav pudel

Autor: Erkki Tempel, piirkonnavor, 2014, G 1

Pooleliitrisel pudelil, mille põhja on tehtud 0,4 V väike auk pindalaga  $S$ , on  $m$  grammi vett. Pudelil keeratakse kork pealt ning pudel visatakse õhku algkiirusega  $v$ . Kui kiiresti voolab vesi pudeli põhjas olevast august välja siis, kui pudel veel üles liigub? Kui kiiresti voolab vesi august välja sel hetkel, kui pudel alla kukub? Põhjendage.

### 1.3.2 Energia

*Märksõnad: Töö ja energia, võimsus. Energia jäävuse seadus. Kulgliikumise ja pöördliikumise kineetiline energia. Potentsiaalne energia. Vedrupendli potentsiaalne energia.*

Energia on füüsikas väga oluline suurus, mis iseloomustab keha või süsteemi võimet teha tööd. Energia võib esineda mitmel erineval kujul ning võib muunduda ühest liigist teise, aga seda ei ole võimalik hävitada. Teisisõnu kehtib energia jäävuse seadus ning isoleeritud süsteemis püsib energia muutumatuna. Olulisemad energia liigid on:

- Kineetiline energia (liikumise energia).
- Potentsiaalne energia (konservatiivsete väliste jõudude energia, konservatiivse jõu mõiste on hiljem defineeritud).
- Soojusenergia (kirjeldatav temperatuuriga).
- Keemiline energia (kirjeldab keemilistesse sidemetesse salvestunud energiat).

Vaatleme punktmassi massiga  $m$  ja kiirusega  $\vec{v}$ , millele mõjuvad jõud  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_N$  nõnda, et kogu jõud on  $\vec{F}_K = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_N$ . Siis selle punktmassi kineetiline energia on defineeritud kui  $E_k = \frac{1}{2}mv^2$  ning nihutades punktmassi  $d\vec{r}$  võrra teevad punktmassile mõjuvad jõud tööd  $dA = \vec{F}_1 \cdot d\vec{r} + \vec{F}_2 \cdot d\vec{r} + \dots + \vec{F}_N \cdot d\vec{r} = \vec{F}_K \cdot d\vec{r}$ . Töö kujutab endast energia ülekannet ühelt kehalt teisele nende kahe keha vahele mõjuva jõu kaudu. Vastavalt sellisele kineetilise energia ja töö definitsioonile ütleb üks formulatsioon energia jäävuse seadusest, et kineetilise energia muut on võrdne tehtud tööga:  $dE_k = dA$ .

Konservatiivsete jõudude jaoks, nagu näiteks gravitatsioon, on võimalik jõu poolt tehtud tööd kirjeldada potentsiaalse energia kaudu. Konservatiivsed jõud on jõud, mille poolt tehtud töö sõltub ainult süsteemi alg- ja lõppolekust. Võrdluseks võib tuua hõõrdejõu, mille puhul eraldub hõõrde käigus kineetiline energia soojusenergiaks ning mis annab pikemate teekondade puhul suurema tehtud töö. Seega kirjeldab potentsiaalne energia  $E_p(\vec{r})$  jõu poolt tehtud tööd funktsioonina süsteemi olekust. Lisaks on tavaks, et potentsiaalne energia vähenemine viitab positiivsele tehtud tööle, st  $\Delta E_p = -\Delta A$ . Sellisel juhul võime defineerida mehaanilise energia kui  $E = E_k + E_p$ , kus  $E_k$  on süsteemi kineetiline energia ja  $E_p$  on konservatiivsete jõudude potentsiaalne energia.

Paneme tähele, et potentsiaalse energia puhul huvitab meid ainult selle muutus ühest olekust teise. Järelikult võime potentsiaalse energia  $E_p$  avaldist kirjeldada ükskõik missuguse lähteasendi suhtes, peaasi, et me kasutame arvutuste käigus igal pool samasugust lähteasendit. Maapinnal on raskusjõu potentsiaalne energia

näiteks  $E_p = mgh$ , kus  $h$  on vaadeldava punkti ja teatud võrdlustaseme vaheline pikkus.

Niisiis, energia jäävuse on järgnevalt formuleeritav:

**Energia jäävuse seadus.** Kui süsteemile mõjuvad mitte-konservatiivsed välisjõud ei tee tööd, siis süsteemi mehaaniline energia säilib:

$$E = E_k + E_p = \text{konst.}$$

Siinkohal on  $E_k$  süsteemi kineetiline energia (punktmassi jaoks  $E_k = mv^2/2$ ) ning  $E_p$  on süsteemi potentsiaalne energia.

### Võimsus

Võimsus väljendab kui palju tööd tehakse ühe ajaühiku jooksul:

$$P = \frac{\Delta A}{\Delta t}.$$

Liikuva keha puhul  $P = \Delta A/\Delta t = \vec{F} \cdot \vec{\Delta x}/\Delta t = \vec{F} \cdot \vec{v}$ , kus  $\vec{F}$  on kehale mõjuv jõud. Mootorite ja muude mehaanilist tööd tootvate süsteemide võimet kirjeldatakse tihti võimsusega.

### 1.3.3 Impulss

*Märksõna: Impulss, impulsi jäävuse seadus.*

Impulss kirjeldab süsteemi liikumishulka ning on defineeritud kui massi ja kiiruse korrutis, st  $\vec{p} = m\vec{v}$ . Tegu on vektoriaalse suurusega ning mitme kehade impulsid on lihtsalt kokku liidetavad (arvestades vektorite omadusi). Sellisel juhul esitub Newtoni II seadus mugavamal kujul  $\vec{F} \approx \Delta\vec{p}/\Delta t$  (võrdus kehtib ühtlase jõu või lõputult väikeste ajavahemike puhul).

Juhul, kus süsteemi summaarne jõud on 0, tuleneb oluline jäävusseadus:

**Impulsi jäävuse seadus.** Kui isoleeritud süsteemile mõjuv summaarne jõud on null, siis süsteemi impulss säilib. Tõepoolest, kui  $\vec{F} = 0$ , siis  $\Delta\vec{p} \approx \vec{F}\Delta t = 0$  ning  $p = \text{konst.}$  Isoleeritud süsteemiks võib olla jääll veerev pall või isegi kaalutus olekus lendlev gaasiparv (kaugel teistest raskusvälja allikatest).

### 21. Mürsk

Autor: Mihkel Kree, piirkonnavor, 2009, G 2

Kahurist välja lennanud mürsk (massiga  $M$ ) laguneb oma lennutrajektoori kõrgeimas punktis mingi sisemise vedrumehanismi abil kaheks võrdseks pooleks (kumbki massiga  $M/2$ ) nii, et üks osadest kukub mürsu senist trajektoori pidi liikudes täpselt kahurini tagasi. Kui kaugule kahurist maandub teine pool? Lagunemispunkti projektsioon maapinnale asub kahurist kaugusel  $L$ .

### 1.3.4 Pöörliikumise dünaamika

*Märksõnad: Inertsimoment. Impulsimoment tasandilise liikumise jaoks. Impulsimomendi jäävuse seadus. Pöörliikumise kineetiline energia.*

Inertsimoment  $I$  kirjeldab keha või süsteemi võimet pöörelda. Juhul kui antud keha või süsteem pöörleb ümber teatud telje impulsimomendiga  $L$ , siis  $L = I\omega$ , kus  $\omega$  on keha pöörlemiskiirus. Siit näeme, et inertsimoment on defineeritud kindla pöörlemistelje suhtes.



Punktmassi puhul, mis on teljest kaugusel  $r$  kehtib  $L = mr^2\omega$ , ehk  $I = mr^2$ . Võttes arbitraarse keha võime selle mõtteliselt jaotada  $N$  väikseks punktmassiks massidega  $m_i$  ja asukohal  $\vec{r}_i$ , mis liiguvad ühtse kehana, ning võttes piirväärtuse, kus  $N$  läheneb lõpmatuseni. Sellisel juhul avaldub impulsimoment  $x = y = 0$  suhtes kui

$$L = \sum_{i=1}^N m_i r_i^2 \omega = \omega \sum_{i=1}^N m_i r_i^2 = I\omega,$$

kus me võtsime  $\omega$  summast välja (sest tahke keha puhul pöörleb iga punkt sama nurksagedusega ümber pöörlemistelje) ning asendasime  $I = \sum_{i=1}^N m_i r_i^2$  kui inertsimomendi.

### Tahke keha pöörlemisenergia

Tahkete kehade puhul on oluline ka pöördliikumise seotud energia avaldamine. Selleks jaotame keha jällegi väikesteks tükkideks ning avaldame ühe väikse tüki kineetilise energia kui  $E_i = m_i v_i^2 / 2 = m_i \omega^2 r_i^2 / 2$ . Seega on kogu keha kineetiline energia

$$E_k = \sum_{i=1}^N \frac{m_i \omega^2 r_i^2}{2} = \frac{\omega^2}{2} \sum_{i=1}^N m_i r_i^2 = \frac{I\omega^2}{2}.$$

See valem kehtib ka punktmassi jaoks: pöörlemisenergia on  $E_k = I\omega^2/2 = mR^2\omega^2/2 = mv_{\perp}^2/2$ , just nagu see olema peaks ( $v_{\parallel}$  ei panusta pöörlemises!).

### 22. Kerad

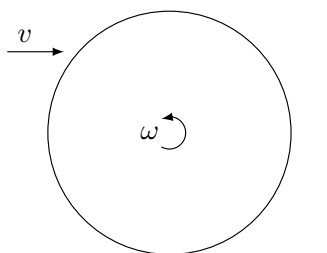
Autor: Valter Kiisk, lahtine, 2010, G 1

On antud kolm väliselt identset ja ühesuguse massiga kera. On teada, et üks neist keradest on homogeenne, teine on seest õõnes ja kolmas on seest vedel. Kuidas saab lihtsate võrdlevate mehaanikakatssetega kindlaks teha, milline on iga kera sisemus? Abivahendid võite vabalt valida, aga kerad ei vigastada ei tohi.

### 23. Silinder

Autor: Kaur Aare Saar, lõppvoor, 2016, G 4

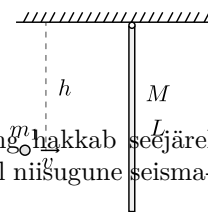
Silinder massiga  $m$  ja raadiusega  $R$  libiseb tasapinnal kiirusega  $v$  ja nurkkiirusega  $\omega$ . Kui libisemine on lõppenud, liigub silinder kiirusega  $v$  esialgsega vastupidises suunas. Leidke silindri esialgne nurkkiirus.



### 24. Põrge

Autor: Mihkel Kree, piirkonnavor, 2015, G 6

Algselt paigal olev rippuv varras massiga  $M$  ning pikkusega  $L$  on fikseeritud ülemisest otsast vabalt pöörleva kinnitusega. Varda inertsimoment otspunkti suhtes on  $I = \frac{1}{3}ML^2$ . Teraspall massiga  $m_1$  lendab vastu varrast ning tabab seda kaugusel  $h$  riputuspunktist. Põrge on elastne, st soojuskadudeta. Huvi-  
taval kombel jääb teraskuul pärast põrget hetkeks paigale ning hakkab seejärel vertikaalselt alla langema. Leidke kauguse  $h$  väärtus, mille korral niisugune seismajäämine võimalik on.



## 25. Orbiit

Autor: Mihkel Pajusalu, lahtine, 2014, G 3

Taevakehad tiirlevad teatavasti elliptilistel orbiitidel. Ka Kuu orbiit ümber Maa on elliptiline. Kui Kuu kõige väiksem kaugus Maa-Kuu süsteemi massikeskmest (mille selles ülesandes võib lugeda ühtivaks Maa keskpunktiga) on  $r_1 = 360\,000$  km ja orbitaalkiirus sellel kaugusel on  $v_1 = 1,1$  km/s, siis kui suur on ligikaudu suurim kaugus Maa ja Kuu vahel? Maa massiks võtta  $M = 6,0 \times 10^{24}$  kg ja gravitatsioonikonstandiks  $G = 6,7 \times 10^{-11}$  N m<sup>2</sup> kg<sup>-2</sup>.

### 1.3.5 Tsentrifugaal- ja tsentripetaaljõud

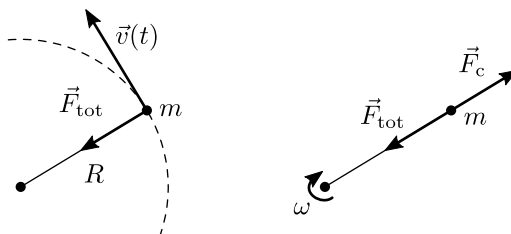
*Märksõnad: Tsentrifugaal- ja tsentripetaaljõud.*

On selge, et ringjoonelise liikumise puhul peab keha kiirenema ringjoone keskpunkti suunas; kiirenduse puudumisel liiguks keha mööda sirgjoont ning väljuks koheselt ringjoonelisel trajektoorilt. Vastava kiirenduse saavutamiseks vajalikku summaarset jõudu kutsutakse tsentripetaaljõuks ning selle avaldis on

$$F_{\text{tot}} = ma_{\text{tsentrip}} = m\omega^2 R = \frac{mv_{\perp}^2}{R},$$

kus  $R$  on ringjoone raadius. Alternatiivne viis selle jõu vaatlemiseks on liikuda pöörlevasse taustsüsteemi, kus keha on paigal. Selles süsteemis on keha paigal ning seega tsentripetaaljõud puudub. Samas on laboratoorses süsteemis tsentripetaaljõudu tekitavad jõud endiselt alles (sest süsteemi valik ei mõjuta füüsilisi jõude!) ning seega peab pöörlevasse süsteemi minek lisama mingi fiktiivse jõu, mis tasakaalustaks laboratoorse süsteemi tsentripetaaljõu. Vastavat jõudu kutsutakse tsentrifugaaljõuks ning see peab olema  $\vec{F}_c = -m\vec{a}_{\text{tsentrip}}$  (vt joonist 4). Kokkuvõttes:

- **Tsentripetaaljõud.** Summaarne kehale vajalik mõjuv jõud, et keha liiguks mööda ringjoont. Suunatud pöörlemiskeskme suunas ning avaldub kui  $m\omega^2 R = m\omega v_{\perp} = mv_{\perp}^2/R$ .
- **Tsentrifugaaljõud.** Fiktiivne jõud, mis lisandub kui liikuda nurkkiirusega  $\omega$  pöörlevasse taustsüsteemi. Suunatud alati pöörlemiskeskme eemale ning avaldub kui  $m\omega^2 R = m\omega v_{\perp} = mv_{\perp}^2/R$ .

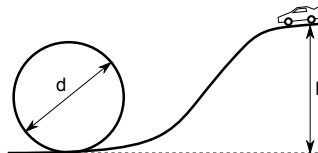


#### Joonis 4: Tsentripetaal- ja tsentrifugaaljõud

### 26. Surmasõlm

Autor: Andreas Valdmann, piirkonnavor, 2012, G 5

Mudelauto rada on kujutatud joonisel: auto alustab kaldtee tipus seisvast asendist, kogub laskumisel kiirust ja teeb silmusel surmasõlme. Mis on minimaalne kõrgus  $h$ , et auto silmuse läbimisel alla ei kukuks? Silmuse läbimõõt on  $d$ . Hõõrdumisega arvestada ei ole vaja.



### 27. Veok ringteel

Autor: Jonatan Kalmus, piirkonnavor, 2018, G 5

Veok sõidab ringteel kõverusraadiusega  $R$  ühtlase kiirusega. Leida veoki maksimaalne võimalik kiirus, eeldusel et hõõrdetegur on piisavalt suur libisemise vältimiseks. Veoki massikeskme kõrgus maapinnast on  $h$  ja veoki laius  $l$ . Raskuskiirendus on  $g$ .

### 28. Kaks kuuli ja vedru

Autor: Rasmus Kisel, piirkonnavor, 2017, G 7

Vedru erinevatesse otsesse on kinnitatud väikesed kuulid, millest ühe mass on  $M$  ning teise oma tundmatu. Kogu süsteem pannakse pöörlema nii, et tundmatu massi kaugus pöörlemiskeskmele on võrdne vedru esialgse pikkusega. Mis on selle pöörlemise periood, kui vedru jäikus on  $k$ ? Vedru mass on võrreldes kuulide massidega tühine.

### 29. Hooratas

Autor: Valter Kiisk, lõppvoor, 2007, G 4

Hooratas raadiusega  $R$  pöörleb nurkkiirusega  $\omega$ . Lihtsuse huvides võib hooratast vaadelda peenikese rõngana (pöörlemistelg ühtib rõnga teljega).

a) Milline on energia salvestustihedus  $w$  (kineetiline energia massiühiku kohta) hoorattas?

b) Hooratas on valmistatud süsinikkiuga armeeritud polümeerist, mille tõmbetugevus  $\sigma_{\max} = 2,4 \times 10^9$  Pa ja tihedus  $\rho = 1500$  kg/m<sup>3</sup>. Hinnake energia salvestustiheduse maksimaalselt võimalikku väärtust sellises hoorattas (andes numbrilise vastuse).

*Vihje.* Tõmbetugevus on maksimaalne jõud ristlõike pindala kohta, mida antud materjal talub ilma purunemata.

## 1.3.6 Inertsijõud

*Märksõnad:* Inertsijõud.

### 30. Veoauto

Autor: Kristian Kuppert, lahtine, 2011, G 3

Veoauto kastis kõrgusega  $H$  on vedelik, mille pinna kõrgus kasti põhjast on  $h$ , kusjuures  $h > \frac{H}{2}$ . Kui suure kiirendusega  $a$  saab veoauto liikuda, ilma et vedelik kastist välja voolaks? Veoauto kasti pikkus on  $L$ .

*Märkus.* Auto kiirendab sujuvalt ning tänu sellele vedelik võnkuma ei hakka.

## 1.4 Hüdromehaanika

### 1.4.1 Rõhk vedelikes

*Märksõnad: Rõhk vedelikus ja Pascali seadus.*

#### 31. Ujuv kuup

Autor: Koit Timpmann, lõppvoor, 2015, G 3

Õhukeseseinaline hermeetiline kuup ujub vee pinnal. Vee tihedus on  $\rho$ , kuubi mass koos selles oleva gaasiga  $m$  ja selle serva pikkus  $a$ . Milline on vähim gaasi algrõhk kuubis  $p$ , mille korral kuup ei upuks, kui selle põhja tekiks auk? Õhurõhk on  $p_0$ , raskuskiirendus on  $g$ .

#### 32. Pump

Autor: Ardi Loot, piirkonnavoor, 2018, G 4

Kaevust sügavusega  $h = 5,0$  m tahetakse pumbata vett. Pump asub maapinnal ning selle veevõtutoru (täidetud veega) on siseläbimõõduga  $d = 16$  mm ja pikkusega, mis on võrdne kaevu sügavusega.

a) Kui suur peab olema pumba võimsus  $P$ , et pumbata vett vooluhulgaga  $q = 30$  l/min? Pumba kasutegur on  $\eta = 25$  %.

b) Missugune on maksimaalne kaevu sügavus  $h_m$ , mille korral on võimalik sellist tüüpi pumbaga kaevust vett pumbata?

Arvestada, et torus olevale veesambale mõjub lisaks teistele jõududele ka hõõrdejõud, mis põhjustab rõhu vähenemist toru pikkuse  $l$  kohta  $\Delta p = c_h q^2 l / d^5$ , kus  $c_h = 40$  Pa  $\cdot$  s<sup>2</sup>/m<sup>2</sup>. Vee tihedus  $\rho = 1000$  kg/m<sup>3</sup>, raskuskiirendus  $g = 9,8$  m/s<sup>2</sup> ja õhurõhk  $p_0 = 100$  kPa.

#### 33. Veeklaas

Autor: Siim Ainsaar, piirkonnavoor, 2013, G 7

Silindrilisse klaasi, mille kõrgus on  $H$  ja põhja raadius  $r$ , valati vett kõrguseni  $h$ . Klaas kaeti paberilehega ja keerati tagurpidi; paberi ja klaasi vahelt voolas välja veekogus ruumalaga  $V$ . Kui paberit enam kinni ei hoitud, jäi see sellegipoolest klaasi külge, ülejäänud vesi püsis klaasis. Kui suur oli maksimaalselt paberi mass  $m$ ? Õhurõhk oli  $p_0$ , raskuskiirendus  $g$  ning vee tihedus  $\rho$ . Kasutati kriitpaberit, mis vett ei imanud. Paberist lahtilaskmise hetkel olid õhu ja vee temperatuurid võrdsed.

#### 34. Klots vedelikes

Autor: Erkki Tempel, lahtine, 2014, G 6

Silindrilises anumask põhja pindalaga  $S$  on kaks mittesegunevat vedelikku tihedustega  $\rho_1$  ja  $\rho_2$ . Anumasse asetatakse kuubikujuline klots ruumalaga  $V$  ning tihedusega  $\rho_k$  ( $\rho_1 > \rho_k > \rho_2$ ). Klots on täielikult vedelike sees ega puuduta anuma põhja.

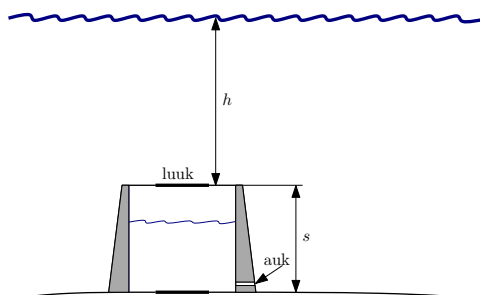
a) Kui suur osa klotsist asub alumises vedelikus?

b) Kui palju muutub kahe vedeliku eralduspinna kõrgus pärast klotsi asetamist anumasse?

#### 35. Allveelaev

Autor: Mihkel Heidelberg, lahtine, 2012, G 5

Salaagent Bond põgeneb allveelaevalt selle torni kaudu. Tornis on algselt rõhk sama mis õhurõhk vee peal:  $p_0 = 100 \text{ kPa}$ . Pärast torni ja ülejäänud allveelaeva eraldava luugi sulgemist teeb ta seina sisse augu (vaata joonist), misjärel täitub torn osaliselt veega. Seejärel avab Bond torni laeluugi ja ujub koos vabaneva õhuga pinnale.



a) Kui paks on õhukiht, mis jääb torni enne torni laeluugi avamist ja pärast vee sissevoolamise lõppemist?

b) Kui suur ja mis suunas (üles või alla) on õhu ja vee poolt laeluugile avaldatav summaarne jõud enne avamist, kui veetase torni sees on jäänud paigale?

Luugi pindala  $S = 0,50 \text{ m}^2$ , veetase luugi kohal  $h = 25 \text{ m}$ , torni kõrgus  $s = 2,0 \text{ m}$ . Vee tihedus  $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$ , raskuskiirendus  $g = 9,8 \text{ m/s}^2$ .

### 36. U-toru

Autor: Erkki Tempel, piirkonnavor, 2016, G 9

U-torusse ühtlase ristlõikepindalaga  $S$  on valatud vesi tihedusega  $\rho_v$ , nii et üle poole U-torust on veega täidetud ja kummagi täitmata osa pikkus on  $h$ . U-toru üks ots suletakse hermeetiliselt ning teise torusse valatakse aeglaselt õli kuni U-toru ülemise servani. Kui suur oli õli tihedus  $\rho_õ$ , kui on teada, et lisatud õlisamba kõrgus oli  $l$ ? Atmosfäärirõhk on  $p_0$ .

## 1.4.2 Üleslükkejõud

*Märksõnad: Üleslükkejõud ja Archimedese seadus.*

### 37. Tünn

Autor: Koit Timpmann, piirkonnavor, 2012, G 3

Vees ujuva tühja tünni ruumalast on  $1/10$  vee sees. Pärast tünni täitmist tundmatu vedelikuga jääb tünn vee peale ujuma, kuid nüüd on vee sees  $9/10$  tünni ruumalast. Kui suur on tünni valatud vedeliku tihedus? Vee tihedus on  $1000 \text{ kg/m}^3$ .

### 38. Kauss

Autor: Taavi Pungas, lahtine, 2013, G 7

Silindrikujuline metallkauss massiga  $M = 1 \text{ kg}$  ja ruumalaga  $V_1 = 3 \text{ dm}^3$  ujub vannis. Mari teeb eksperimenti ja valab ühtlaselt  $t = 1 \text{ s}$  jooksul kõrguselt  $h = 1,5 \text{ m}$  kaussi kannutäie vett ruumalaga  $V_2 = 1,5 \text{ dm}^3$ . Ennustage eksperimendi tulemust: kas kauss läheb põhja või ei? Põhjendage oma ennustust arvutustega. Vee tihedus  $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$ .

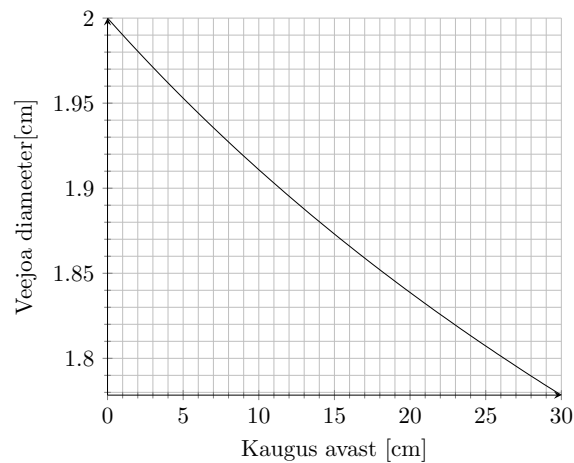
## 1.4.3 Vedelike liikumine

*Märksõnad: Bernoulli võrrand ja selle erijuht — Torricelli seadus.*

### 39. Auk tünnis

Autor: Hans Daniel Kaimre, lõppvoor, 2018, G 2

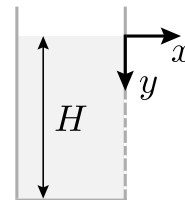
Suure vett täis tünni põhjas on auk, kust voolab vett välja. Graafikul on esitatud väljuva veejoo läbimõõdu sõltuvus kaugusest tünni põhjast  $l$ . Leidke veetaseme kõrgus tünnis.



### 40. Veejoad

Autor: Mihkel Kree, lahtine, 2015, G 7

Vertikaalse silindrilise anuma seinasse on paljudele erinevatele kõrgustele tehtud pisikesed augud, millest voolab välja vett. Anumasse valatakse aeglaselt vett juurde nii, et veetaseme kõrgusel  $H$  püsib muutumatuks. Leidke, millisesse ruumipiirkonda saab anumast väljuv vesi jõuda ehk avaldage veejoo mähistpinna võrrand  $xy$ -teljestikus. Eeldage, et erinevad veejoad üksteist ei mõjuta.



#### 1.4.4 Pindpinevus

*Märksõnad: Pindpinevus: faaside eralduspinna energia, kapillaarjõud, kapillaarrõhk sfäärilise eralduspinna sees. Märgamine ja kapillaarsus.*

### 41. Pindpinevus

Autor: Koit Timpmann, lahtine, 2011, G 2

Klaastoru (raadius  $r_1$ ) asetatakse jämedama klaastoru sisse nii, et nende teljed ühtivad. Seejärel pannakse mõlemad püsti vette. Leidke, kui suur peaks olema jämedama toru siseradius  $r_2$ , et veetaseme oleks mõlemas klaastorus sama. Eeldage, et torude seinad on tühiselt õhukesed.

## 42. Vee keemine

Autor: Mihkel Kree, lõppvoor, 2008, G 6

Mari keetis Mikule teed, aga vesi läks seekord keema alles  $t_0 = 105^\circ\text{C}$  juures, kuigi toas oli normaalarõhk. Milles asi? Teatavasti hakkab vesi keema siis, kui küllastunud veeauru rõhk saab võrdseks õhurõhuga ning kogu anuma ulatuses saavad hakata paisuma küllastunud auruga täidetud mullid; tavaliselt on vees küllaldaselt tahkeid osakesi, millele tekivad piisavalt suured mullid, nii et pindpinevusega pole tarvis arvestada. Oletades aga, et seekord oli vesi haruldaselt puhas, hinnake, missugune oli mullide suurim võimalik raadius enne keemist. Vee pindpinevuseks keemistemperatuuril võib võtta  $\sigma = 58 \times 10^{-3} \text{ N/m}$  ning lineaarses lähenduses arvestada, et temperatuuri tõstmisel ühe kraadi võrra suureneb küllastunud veeauru rõhk  $\Delta p = 3,5 \text{ kPa}$  võrra (keemistemperatuuri läheduses)

## 1.5 Taevamehaanika

### 1.5.1 Taevakehade pöörlemine ja tiirlemine

*Märksõnad: Taevakehade pöörlemine ja tiirlemine.*

## 43. Maa pöörlemisperiood

Autor: Eero Vaher, piirkonnavor, 2014, G 3

Keskmiseks päikeseööpäevaks ehk tavatähenduses ööpäevaks nimetatakse keskmist perioodi, mille jooksul Päike näib Maaga seotud vaatleja jaoks tegevast taevast täisringi. Keskmise päikeseööpäeva pikkuseks on 24 h ehk 86 400 s. Maal kulub ühe tiiru tegemiseks ümber Päikese 365,256 keskmist päikeseööpäeva. Maa pöörlemissuund ümber oma telje ühtib selle tiirlemissuunaga Päikese ümber. Leidke nende andmete põhjal Maa pöörlemisperiood sekundi täpsusega.

### 1.5.2 Newtoni gravitatsiooniseadus

*Märksõnad: Newtoni gravitatsiooniseadus.*

## 44. Päikese tihedus

Autor: Eero Vaher, piirkonnavor, 2013, G 6

Leidke Päikese keskmine tihedus  $\rho$ . Maa tiirlemisperiood on  $T = 1$  aasta, gravitatsioonikonstant  $G = 6,7 \times 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2$ , Maa kaugus Päikesest  $R = 1,5 \times 10^{11} \text{ m}$ , Päikese nurkläbimõõt Maalt vaadatuna on  $\alpha = 0,54^\circ$  (see on nurk, mis moodustub kahe kiire vahel, mis on tõmmatud vaatleja silma juurest Päikese diameetri otspunktide juurde).

## 45. Ühendatud satelliidid

Autor: Eero Vaher, piirkonnavor, 2018, G 6

Kaks satelliiti, mõlemad massiga  $m$ , tiirlevad ümber planeedi massiga  $M \gg m$  ringorbiitidel raadiustega  $R_1$  ning  $R_2 = 2R_1$ . Satelliidid on omavahel ühendatud tühise massiga pinges trossiga pikkusega  $R_1$ , mille tõttu on mõlema satelliidi tiirlemisperiood  $T$ . Mitu korda on satelliitide joonkiirused  $v_1$  ja  $v_2$  suuremad või väiksemad joonkiirustest  $v'_1$  ja  $v'_2$ , millega satelliidid tiirleksid oma orbiitidel trossi puudumisel?

### 1.5.3 Gravitatsiooniline potentsiaalne energia

*Märksõnad: Gravitatsiooniline potentsiaalne energia.*

#### 46. Orbiit

Autor: Mihkel Pajusalu, lahtine, 2014, G 3

Taevakehad tiirlevad teatavasti elliptilistel orbiitidel. Ka Kuu orbiit ümber Maa on elliptiline. Kui Kuu kõige väiksem kaugus Maa-Kuu süsteemi massikeskmest (mille selles ülesandes võib lugeda ühtivaks Maa keskpunktiga) on  $r_1 = 360\,000$  km ja orbitaalkiirus sellel kaugusel on  $v_1 = 1,1$  km/s, siis kui suur on ligikaudu suurim kaugus Maa ja Kuu vahel? Maa massiks võtta  $M = 6,0 \times 10^{24}$  kg ja gravitatsiooni-konstandiks  $G = 6,7 \times 10^{-11}$  N m<sup>2</sup> kg<sup>-2</sup>.

## 1.6 Võnkumised

### 1.6.1 Võnkumised üldiselt

*Märksõnad: Võnkumiste amplituud, sagedus, periood.*

### 1.6.2 Matemaatiline- ja vedrupendel

*Märksõnad: Matemaatilise pendli valem, vedrupendli valem.*

## 2 Optika

### 2.1 Geomeetriline optika

#### 2.1.1 Optiline keskkond

*Märksõnad: Peegeldumisseadus, murdumisnäitaja, Snelli seadus. Fermat' printsiip.*

#### 2.1.2 Läätsed

*Märksõnad: Kumer- ja nõgusläätsed ning õhukese läätse mudel. Läätsede valem (sh näiva kujutise ja/või nõgusläätsede jaoks). Läätsede süsteemid (sh dioptriate liitmine vahetus kontaktis olevate õhukeste läätsede jaoks), teleskoop ja selle suurendus. Fookuskaugus, optiline tugevus ja suurendus.*

#### 2.1.3 Peeglid

*Märksõnad: Tasapeeglid, kumer- ja nõguspeeglid.*

#### 2.1.4 Optilised konstruktsioonid

*Märksõnad: Geomeetrilised konstruktsioonid, sarnased kolmnurgad, varjud. Tõeline ja näiv kujutis. Kujutise ja kiirte käigu konstrueerimine õhukeses läätses ning tasaja sfäärilistes peeglites. Kiirte pööratavuse printsiip. Kujutise asukoha leidmine kitsa kiirtekimbu jaoks kasutades väikeste nurkade lähendust koos Snelli seadusega.*



## 2.2 Laineoptika

### 2.2.1 Lained

*Märksõnad: Lainepikkus, -sagedus ja -kiirus ning seos nende vahel, murdumisnäitaja mõju neile suurustele.*

### 2.2.2 Inteferents

*Märksõna: Inteferents, sh kahele laine liitumisel ja valguse langemisel difraktsioonivõrele.*

#### 47. Kile

Autor: Jaan Kalda, lahtine, 2008, G 8

Selleks, et vähendada peegeldusi optilistelt klaasidelt, kaetakse nende pinnad õhukese läbipaistva kilega. Leida, millise paksusega peaks olema selline kile, kui klaasi murdumisnäitaja on  $n_0 = 1,5$  ja kile oma  $n_1 = 1,3$ . Eeldada, et kile on optimeeritud risti langeva roheline valguse jaoks lainepikkusega  $\lambda = 530$  nm.

#### 48. Kunstinäitus

Autor: Jaan Kalda, lõppvoor, 2009, G 10

Kunstinäituse saal kujutab endast valgete seintega suurt tuba, mida valgustatakse monokromaatilise roheline valgusega (lainepikkus  $\lambda = 550$  nm). Sellel toal on siledast klaasist põrand; klaasi alumine pind on värvitud mustaks, ülemine pind on aga kaetud õhukese läbipaistva värvitu kilega. Keset tuba seisev näituseküllastaja näeb enda ümber põrandal heledaid ja tumedaid ringikujulisi vööte, kusjuures ta ise asub nende ringide keskpunktis — sõltumata sellest, kus kohas ta parajasti seisab. Näituseküllastaja uurib asja lähemalt: kükitab ja vaatab kaugele, seejärel püüab vaadata otse alla. Maksimaalselt õnnestub tal loendada  $N = 20$  heledat vööti. Kui paks on klaasi kattev kile? Klaasi murdumisnäitaja  $n_0 = 1,6$ , seda katva kile oma  $n_1 = 1,4$ .

## 3 Termodünaamika

### 3.1 Soojustasakaal

*Märksõnad: Soojustasakaal. Aine erisoojus, latentne soojus (aurustumine, sulamine, kondenseerumine, tahkumine, põlemine).*

Soojushulkade ülesannete lahendamisel on kesksel kohal energia jäävus: energia ei teki ega kao, vaid ainult muundub ühest liigist teise. Nii peab soojema keha poolt ära antav soojushulk olema võrdne külmema keha poolt saadud soojushulgaga. Aine **erisoojuseks**  $c$  nimetatakse soojushulka, mis on vajalik 1 kg aine temperatuuri tõstmiseks 1 kraadi võrra. Kui aine massiga  $m$  ja erisoojusega  $c$  temperatuuri tõstatatakse  $\Delta t$  kraadi võrra, siis sellele kulub soojushulk

$$Q = cm\Delta t = cm(t_2 - t_1).$$

Sõltuvalt temperatuurist ja rõhust võivad ained esineda erinevates olekutes ehk faasides. Tuntuimateks faasiüleminekuteks on sulamine ja aurustumine ning nende pöördprotsessid — tahkumine ja kondenseerumine. Faasiüleminekud toimuvad

kindla, konkreetset ainet iseloomustava temperatuuri ja rõhu väärtuse juures, seejuures erineva rõhu juures on vastava faasi ülemineku temperatuur erinev. Sulamisel ja aurustumisel neeldub energia ja nende pöördprotsessidel vabaneb täpselt sama kogus energiat — vastupidine olukord oleks vastuolus energia jäävuse seadusega. Soojushulka, mis on vajalik 1 kg aine sulamiseks või aurustumiseks nimetatakse vastavalt **sulamissoojuseks**  $\lambda$  ja **aurustumissoojuseks**  $L$ . Massiga  $m$  aine sulatamiseks või aurustumiseks vajalikud soojushulgad on vastavalt

$$Q = \lambda m$$

ja

$$Q = Lm.$$

Aine **kütteväärtuseks** ehk **põlemissoojuseks** nimetatakse soojushulka  $r$ , mis saadakse 1 kg selle aine põletamisel. Massiga  $m$  ja kütteväärtusega  $r$  aine põletamisel eraldub soojushulk

$$Q = rm.$$

#### 49. Vee jäätumine

Autor: Jaak Kikas, lahtine, 2012, G 1

0,5 kg jääkuubikuid asetati 1 l vette algtemperatuuriga  $0^\circ\text{C}$ . Milline peab olema jää algtemperatuur, et kogu vesi jäätuks? Jää sulamissoojus on  $330 \text{ kJ kg}^{-1}$ , erisoojus  $2,1 \text{ kJ}/(\text{kg } ^\circ\text{C})$ . Soojusvahetust keskkonnaga ei toimu. Vee tihedus  $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$ .

#### 50. Veepudel

Autor: Koit Timpmann, piirkonnavor, 2013, G 2

Külma ilmaga oli autosse ununenud 2,0-liitrine täis veepudel. Auto juurde tulnud autojuht Koit ei uskunud oma silmi: temperatuur autos oli  $-3^\circ\text{C}$ , aga vesi pudelis ei olnud külmunud. Koidule tuli meelde, et ta oli kunagi kuulnud, et väga puhas vedelik võib olla vedelas olekus ka allpool tahkumistemperatuuri. Selle kontrollimiseks võttis ta pudeli ja raputas seda ning suhteliselt kiiresti muutus selles osa veest jääks. Mitu grammi jääd tekkis pudelisse? Vee erisoojus  $c = 4200 \text{ J}/(\text{kg } ^\circ\text{C})$  ja tihedus  $\rho = 1000 \text{ kg m}^{-3}$ , jää sulamissoojus  $\lambda = 340 \text{ kJ/kg}$ .

#### 51. Rauatükk

Autor: Oleg Koik, lahtine, 2010, G 2

Anumasse, milles oli  $V = 11$  vett temperatuuril  $t_1 = 20^\circ\text{C}$ , visati rauatükk massiga  $m = 100 \text{ g}$  temperatuuril  $t_0 = 500^\circ\text{C}$ . Osa veest aurustus. Mõne aja pärast mõõdeti vee temperatuuriks  $t_2 = 24^\circ\text{C}$ . Kui palju vett aurustus välja? Vee erisoojus  $c_1 = 4200 \text{ J}/(\text{kg } ^\circ\text{C})$ , aurustumissoojus  $L = 2,26 \times 10^6 \text{ J/kg}$  ja tihedus  $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$ ; raua erisoojus  $c_2 = 460 \text{ J}/(\text{kg } ^\circ\text{C})$ . Anum on tühise soojusmahutuvusega ning väliskeskkonnast hästi isoleeritud.

#### 52. Soojusvaheti

Autor: Kaur Aare Saar, lõppvoor, 2016, G 1

Tagasivoolu soojusvahetis jahutatakse sissetulevat naftat temperatuuriga  $T_n = 90^\circ\text{C}$  temperatuurini  $T_0 = 20^\circ\text{C}$ . Jahutusvesi liigub soojusvahetis vastupidises suunas naftaga ja siseneb soojusvahetisse temperatuuriga  $T_v = 10^\circ\text{C}$ . Vesi liigub kiirusega  $v_v = 6 \text{ m}^3/\text{min}$  ja nafta liigub kiirusega  $v_n = 15 \text{ m}^3/\text{min}$ . Leidke, millise temperatuuriga väljub soojusvahetist vesi? Vee erisoojus  $c_v = 4200 \text{ J kg}^{-1} ^\circ\text{C}^{-1}$  ja nafta erisoojus  $c_n = 1800 \text{ J kg}^{-1} ^\circ\text{C}^{-1}$ . Vee tihedus  $\rho_v = 1000 \text{ kg m}^{-3}$  ja nafta tihedus  $\rho_n = 850 \text{ kg m}^{-3}$ .

### 53. Kastmisvesi

Autor: Urmo Visk, piirkonnavor, 2008, G 5

Päikeselisel suvepäeval langeb päikesekiirtega risti olevale ühe ruutmeetrisele pinnale ühes sekundis keskmiselt  $\varepsilon = 0,5 \text{ kJ}/(\text{s m}^2)$  energiat. Kastmisvett soojendatakse pilgeni täis valatud õhukeseseinalises kerakujulises anumus raadiusega  $R = 0,5 \text{ m}$ . Eeldada, et veeanum on päeva jooksul täielikult valgustatud. Kastmisvee temperatuur päikesetõusu ajal kell 4.30 oli  $t_0 = 16^\circ\text{C}$ . Kui suur on kastmisvee temperatuur päikeseloojangu ajal kell 22.30? Vee erisoojus on  $c = 4200 \text{ J}/(\text{kg }^\circ\text{C})$ , tihedus  $\rho = 1 \text{ kg}/\text{dm}^3$ . Eeldada, et anum neelab kogu pealelangeva päikesevalguse energia ning, et kogu päikesevalguse energia läheb kastmisvee soojendamiseks. Soojusvahetus kastmisvee ja keskkonna vahel lugeda tühiseks.

## 3.2 Ideaalne gaas

Selles ja kahes järgnevas seksioonis keskendume ideaalsele gaasile. Ideaalne gaas on suure osa termodünaamika olümpiaadiülesannete põhiobjektiks ning neid saab ära lahendada tuginedes mõnele ideaalse gaasi kohta kehtivale baasprintsibile.

Ideaalne gaas koosneb tühiselt väikeste mõõtmetega absoluutselt elastsetest kuulikestest, mis liiguvad juhuslikult, vastu seinu ja üksteist põrgeldes, kusjuures molekulid (kuulikesed) mõjutavad üksteist vaid siis, kui nad on vahetus kontaktis ning nendevaheline kaugmõju (nt elektrostaatiline) puudub. Paljud reaalsed gaasid käituvad tavalistes tingimustes ideaalsete gaasidena.

### 3.2.1 Ideaalse gaasi olekuvõrrand

*Märksõnad: Ideaalse gaasi olekuvõrrand. Kelvinite skaala. Isotermiline, isobaarne, isohoorne protsess.*

Kehtib ideaalse gaasi olekuvõrrand

$$pV = nRT = \frac{m}{M}RT.$$

Siin tähistab  $p$  gaasi rõhku,  $V$  ruumala,  $T$  (absoluutset) temperatuuri,  $n$  moolide arvu,  $m$  massi,  $M$  molaarmassi ning  $R \approx 8,314 \text{ J kg}^{-1} \text{ mol}^{-1}$  on gaasikonstant.

Juhime tähelepanu, et siin ja edaspidi esineb valemities just absoluutne temperatuur  $T$ , mida mõõdetakse kelvinites (K). Temperatuur  $T$  Kelvini skaalas on alati positiivne ja Celsiuse temperatuurist 273 võrra suurem:  $T = t + 273$ .

Jagades ideaalse gaasi olekuvõrrandi läbi ruumalaga saame mõnikord kasuliku seose gaasi rõhu ja tiheduse vahel:  $p = \frac{\rho}{M}RT$ .

Juhul kui gaasi hulk protsessis ei muutu (ja ainult sel juhul!) võime ideaalse gaasi olekuvõrrandi kirjutada ümber kujul

$$\frac{pV}{T} = \text{Const.}$$

Vaadeldakse ka protsesse, milles lisaks gaasi hulgale ei muutu ka üks kolmest olekuparameetrist:

- isotermiline, kui  $T = \text{Const}$ , siis  $pV = \text{Const}$ ;
- isohooriline, kui  $V = \text{Const}$ , siis  $\frac{p}{T} = \text{Const}$ ;
- isobaariline, kui  $p = \text{Const}$ , siis  $\frac{V}{T} = \text{Const}$ .

**54. Jalgpall**

Autor: Tundmatu autor, lahtine, 2006, G 1

Kui suure rõhuni  $p_N$  võib pumbata jalgpalli palli kolbpumbaga  $N = 40$  pumpamise käigus? Iga pumpamiskäigu jooksul võtab pump atmosfäärist õhu koguse ruumalaga  $v = 150 \text{ cm}^3$ . Atmosfääri rõhk  $p_0 = 0,1 \text{ MPa}$ , palli ruumala  $V = 3 \text{ l}$ . Lugeda, et õhu temperatuur pallis võrdub välistemperatuuriga.

**55. Allveelaev**

Autor: Tundmatu autor, lahtine, 2007, G 3

Uppunud allveelaevadest on inimesed mõnikord pääsenud avades esialgu alumised ventiilid (mida mööda vesi sisse tungib), seejärel ülemise luugi ning siis ise koos õhumulliga veepinnale tõustes. Kui suur osa  $k$  laeva ruumalast polnud täidetud veega peale ventiilide avamist, kui laev asus sugavusel  $h = 42 \text{ m}$ ? Merevee tihedus  $\rho = 1,03 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$ . Õhu rõhk laevas alghetkel  $p_0 = 0,1 \text{ MPa}$ . Võite lugeda, et vee sisse laskmise käigus õhu temperatuur laevas ei muutunud (tänu soojusvahetusele ümbritseva veega).

**56. Õhupalli vägi**

Autor: Eero Vaher, lahtine, 2013, G 4

Heeliumiga täidetud õhupall suudab Maal tõsta õhku koormise massiga kuni  $100 \text{ kg}$ . Kui suure massiga koormise suudaks samasugune õhupall üles tõsta Marsil (õhupalli kesta massi loeme koormise massi hulka)? Koormise ruumala lugege tühiseks. Õhu tihedus Maal on  $\rho_0 = 1,2 \text{ kg/m}^3$ , õhu rõhk Maal  $p_0 = 100 \text{ kPa}$ , õhu temperatuur Maal  $T_0 = 20^\circ \text{C}$ , "õhu" tihedus Marsil  $\rho_1 = 0,015 \text{ kg/m}^3$ , "õhu" rõhk Marsil  $p_1 = 600 \text{ Pa}$ , "õhu" temperatuur Marsil  $T_1 = -60^\circ \text{C}$ . Heeliumi molaarmass on  $\mu = 4,0 \text{ g mol}^{-1}$ , ideaalse gaasi konstant  $R = 8,3 \text{ J K}^{-1} \text{ mol}^{-1}$ .

**57. Saunauks**

Autor: Mihkel Kree, piirkonnavaor, 2016, G 5

Sauna leiliruumis ruumalaga  $V = 10 \text{ m}^3$  on õhu temperatuur  $t = 90^\circ \text{C}$ . Kerisele visatakse leilik veekogus  $m = 150 \text{ g}$ , mis koheselt aurustub. Mõtleme hüpoteetiliselt, et leiliruum on hermeetiliselt suletud. Missuguse jõuga peaksid saunalised ust pindalaga  $A = 2,0 \text{ m}^2$  käepidemest kinni hoidma, et see lahti ei läheks? Gaasikonstant  $R = 8,3 \text{ J/(mol}\cdot\text{K)}$  ning vee molaarmass  $\mu = 18 \text{ g/mol}$ . Kui ülesande õigesti lahendate, siis küllap avastate, et leitud jõud on ebatavaliselt suur. Selgitage ühe lausega, miks tegelikult saunas ukse kinnihoidmiseks nii suurt jõudu pole vaja rakendada.

**58. Silinder külmkapis**

Autor: Rasmus Kisel, piirkonnavaor, 2017, G 6

Suletud silindris sisemise raadiusega  $R$  ja sisemise kõrgusega  $h$  on vedelik, mis võtab enda alla teatud osa  $k$  silindri siseruumalast. Silinder on algselt toatemperatuuril  $T_1$ . Silinder asetatakse sügavkülmikusse, kus on konstantne temperatuur  $T_2$ , mis on madalam silindris oleva aine sulamistemperatuurist. Teada on, et silindris oleva aine tihedus on vedelas olekus  $\rho_0$  ja tahkes olekus  $\lambda\rho_0$ . Leidke, mitu korda suureneb silindris oleva õhu rõhk võrreldes esialgsega pärast vedeliku tahkumist. Eeldage, et vedeliku tahkumisel silindri mõõtmed ei muutu.

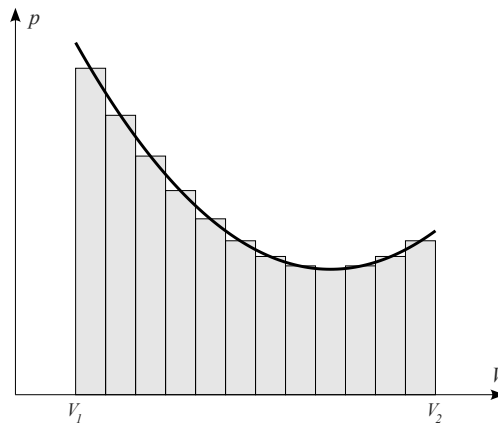
### 3.2.2 Gaasi töö

*Märksõna: Gaasi töö*

Paisudes teeb gaas tööd välisjõudude vastu. Kui protsess on isobaariline, avaldub gaasi tehtav töö valemiga  $A = p\Delta V$ . Kui protsess ei ole isobaariline, võime jagada kogu protsessi paljudeks väikesteks alamprotsessideks ning lugeda, et iga alamprotsessi käigus on rõhk ligikaudu konstantne, seejärel summeerime iga alamprotsessi käigus tehtava töö:

$$A = \sum_{i=1}^N p_i \Delta V_i.$$

Näeme, et gaasi tehtud töö on võrdne  $pV$ -teljestikus joonistatud graafiku aluse pindalaga.



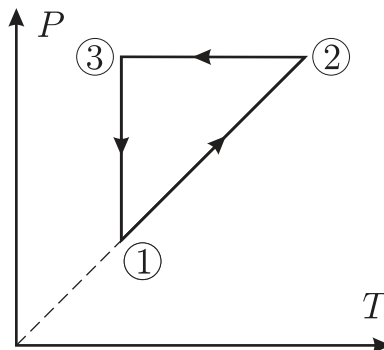
Integraalkujul on gaasi töö  $A = \int_{V_1}^{V_2} p dV$ .

Juhul, kui gaas surutakse kokku, siis teevad välisjõud tööd gaasi vastu ning gaasi enda tehtud töö on sel juhul negatiivne.

#### 59. Ringprotsess

Autor: Riho Taba, piirkonnavaor, 2006, G 2

Kas joonisel kujutatud ringprotsessil on ideaalse gaasi töö positiivne või negatiivne? Põhjendada vastust.



### 3.2.3 Gaasi siseenergia

*Märksõnad: Ühe- ja kaheaatomilise ideaalse gaasi siseenergia.*

Süsteemi siseenergiaks nimetatakse tema koostisosakeste koguenergiat ehk kõigi kineetiliste ja potentsiaalsete energiatega summat. Siseenergia hulka ei loeta süsteemi kui terviku kineetilist energiat ega potentsiaalset energiat. Kuna ideaalse gaasi molekulid ei interakteeru üksteisega, siis sellise gaasi siseenergia koosneb üksneste molekulide soojusliikumise kineetilisest energiast.

Gümnaasiumi koolikursusest teame, et ideaalse gaasi molekulide keskmine kineetiline energia on võrdeline gaasi absoluutse temperatuuriga ning üheaatomilise gaasi puhul avaldub see

$$\bar{E} = \frac{3}{2}k_B T,$$

kus  $k_B \approx 1,38 \text{ J K}^{-1}$  on Boltzmanni konstant. Ühes moolis on molekulide arv  $N_A \approx 6,02 \times 10^{23}$ , niisiis kui meil on  $n$  mooli üheaatomilist ideaalset gaasi, siis gaasi siseenergiaks saame

$$U = nN_A\bar{E} = \frac{3}{2}nN_Ak_B T = \frac{3}{2}nRT,$$

kus  $R = N_Ak_B$  on gaasikonstant.

Kaheaatomilise gaasi korral on  $\frac{3}{2}$  asemel ees kordaja  $\frac{5}{2}$  ning enamaaatomilise gaasi korral on vastav kordaja  $\frac{6}{2} = 3$ . Üldisemalt saab kirjutada

$$U = \frac{i}{2}nRT,$$

kus  $i$  on gaasimolekuli vabadusastmete arv. Iga vabadusaste on seotud gaasimolekuli liikumisega ühes sihis või pöörlemisega ühe sihi ümber. Niisiis on üheaatomilise gaasi vabadusastmete arv 3, kaheaatomilise (ning lineaarse molekuliga enamaaatomilise) gaasi puhul 5 ning muudel juhtudel 6. Gaaside segu puhul (nt õhk) võib keskmine vabadusastmete arv osutada murdarvuks.

### 3.2.4 Termodünaamika esimene seadus.

*Märksõna: Termodünaamika esimene seadus.*

Kehtib **termodünaamika I seadus**: gaasile üleantav soojushulk  $Q$  läheb gaasi siseenergia muutuseks  $\Delta U$  ning gaasi poolt tehtavaks paisumistööks  $A$  välisjõudude vastu:

$$Q = \Delta U + A.$$

Termodünaamika I seaduses võivad kõik suurused olla nii positiivse kui negatiivse märgiga sõltuvalt sellest, kas gaasile antakse soojust või annab gaas soojuse ära, kas gaasi temperatuur tõuseb või langeb, kas gaas teeb ise tööd välisjõudude vastu või välisjõud teevad tööd gaasi vastu. Termodünaamika I seaduse näol on sisuliselt tegemist energia jäävuse seadusega: suletud süsteemi koguenergia (soojuslik + mehhaaniline) säilib.

Uurime termodünaamika I seadust isohoorilise (konstantne ruumala) ning isobaarilise (konstantne rõhk) protsessi korral.

Kui gaasi ruumala on jääv, siis gaas tööd ei tee ehk  $A = 0$ . Kui gaasi temperatuur muutub  $\Delta T$  võrra, siis ühe mooli gaasi siseenergia muutus on  $\Delta U = \frac{i}{2}R\Delta T$ . Gaasi

ühele moolile antavat soojushulka võime kirjutada kujul  $Q = C_V \Delta T$ , kus  $C_V$  on gaasi molaarne soojusmahtuvus konstantsel ruumalal. Kuivõrd  $Q = \Delta U$ , saame siit

$$C_V = \frac{i}{2}R.$$

Olgu nüüd jääv rõhk  $p$ . Ühe mooli gaasi siseenergia muutus on endiselt  $\Delta U = \frac{i}{2}R\Delta T$ , kuid gaasi tehtav töö on nüüd  $A = p\Delta V$ . Kuivõrd ühe mooli kohta kehtib ideaalse gaasi olekuvõrrand  $pV = RT$ , siis saame  $p\Delta V = R\Delta T$ . Gaasi ühele moolile antavat soojushulka võime kirjutada  $Q = C_P \Delta T$ , kus  $C_P$  on gaasi molaarne soojusmahtuvus konstantsel rõhul. Kokkuvõttes võtab termodünaamika I seadus kuju

$$C_P \Delta T = \frac{i}{2}R\Delta T + R\Delta T = \frac{i+2}{2}R\Delta T,$$

kust

$$C_P = \frac{i+2}{2}R.$$

Näeme ühtlasi, et  $C_P = C_V + R$ .

### 60. Balloon

Autor: Jaan Susi, lõppvoor, 2005, G 3

Suletud balloon ruumalaga  $V = 101$  oli täidetud veega temperatuuril  $t_0 = 0^\circ\text{C}$ . Samal temperatuuril külmutati vesi jääks, mille tulemusena ballooni kest venis välja ja vesi avaldas kogu jäätumise protsessi käigus balloonile rõhku  $p = 5 \times 10^7$  Pa. Leida balloonis olnud vee ( $\text{H}_2\text{O}$ ) siseenergia muut koos märgiga. Jää tihedus  $\rho_j = 900 \text{ kg/m}^3$  ja sulamissoojuseks antud rõhul  $\lambda = 317 \text{ kJ/kg}$ . Jää ja vee kokkusurutavust mitte arvestada.

### 3.2.5 Adiabaatiline protsess

*Märksõna: Adiabaatiline protsess.*

Vaatame nüüd protsessi, kus gaasi soojusvahetust väliskeskkonnaga ei toimu, ehk  $Q = 0$ . Sellist protsessi nimetatakse adiabaatiliseks. Sel juhul toimub gaasi töö tema siseenergia arvelt:  $A = -\Delta U$ . Diferentsiaal- ja integraalarvutuse abil on võimalik näidata, et sellisel juhul kehtib **adiabaatiline seadus**:

Adiabaatilise protsessi korral

$$pV^\gamma = \text{Const},$$

kus  $\gamma = \frac{C_P}{C_V} = \frac{i+2}{i}$  on gaasi adiabaatiline konstant.

Ühe-, kahe- ja enamaaatomiliste gaaside jaoks on  $\gamma$  vastavalt  $\frac{5}{3}$ ,  $\frac{7}{5}$  ja  $\frac{4}{3}$ .

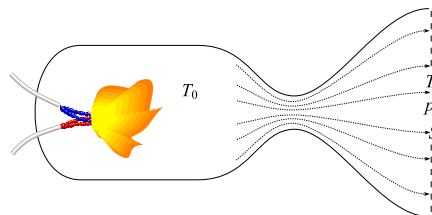
Adiabaatilise protsessi korral kehtib ka ideaalse gaasi olekuvõrrand  $\frac{pV}{T} = \text{Const}$ . Kui nüüd jagada sellega läbi seos  $pV^\gamma = \text{Const}$ , saame adiabaadiseaduse alternatiivse kuju  $TV^{\gamma-1} = \text{Const}$ .

Kui ideaalse gaasi olekuvõrrand esitada kujul  $\frac{p^\gamma V^\gamma}{T^\gamma} = \text{Const}$  ning jagada adiabaadiseadus läbi sellega, jõuame adiabaadiseaduse veel ühe kujuni  $p^{1-\gamma} T^\gamma = \text{Const}$ .

### 61. Rakettmootor

Autor: Jaan Kalda, lahtine, 2010, G 10

Vedelkütusel töötava raketimootori skeem on toodud juuresoleval joonisel. Põlemiskambris moodustuvad põlemisproduktid (gaasid) omandavad kõrge rõhu ja temperatuuri. Seejärel väljuvad need adiabaatiliselt paisudes ja jahtudes läbi düüsi. Õigesti konstrueeritud düüsi korral (kaela läbimõõt vastab põlemiskiirusele ja -temperatuurile) jätkub adiabaatiline paisumine ka peale düüsikaela läbimist ning suur osa soojusenergiast muundatakse gaasijoa kineetiliseks energiaks. Leidke raketimootori veojõud  $F$  eeldusel, et (a) on teada düüsi väljundristlõike pindala  $S$ , temperatuur põlemiskambris  $T_0$  ning gaaside temperatuur  $T_1$  ja rõhk  $p_1$  düüsisist väljumise hetkel, kusjuures  $T_0 \gg T_1$ ; (b) põlemiskambris on gaaside kineetiline energia tühine võrreldes soojusenergiaga; (c) atmosfäärirõhu mõju veojõule on tühine; (d) moodustuva gaasisegu ühe mooli soojusmahtuvus konstantsel ruumalal on  $c_V = \frac{5}{2}R$ , kus  $R$  on gaasikonstant.



### 3.3 Soojusmasinad

*Märksõnad: Soojusmasinad, soojusmasina kasutegur. Termodünaamika teine seadus. Pööratud tsükliga soojusmasinad.*

Soojusmasin on seade, mis mingit (perioodilist) ringprotsessi sooritades muudab soojusenergia kasulikuks tööks. Soojusmasina näideteks on sisepõlemismootor, auruturbiin, reaktivmootor. Soojusmasin töötab alati kahe erineva temperatuuriga keskkonna vahel – saab soojemalt keskkonnalt soojushulga  $Q_1$ , teeb selle arvelt kasulikku tööd  $A$  ning annab külmemale keskkonnale ära soojushulga  $Q_2$ . Kuna ringprotsessi tulemusena siseenergia ei muutu, siis termodünaamika I seaduse järgi võrdub tehtud töö nende soojushulkade vahega.

Soojusmasina kasutegur  $\mu$  on mehaanilise töö ja soojendist saadud energia suhe:

$$\mu = \frac{A}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1}.$$

Soojusmasina kasutegur ei saa olla kunagi 100%. Vastavalt termodünaamika II seadusele **soojus ei saa minna iseeneslikult madalama temperatuuriga kehalt kõrgema temperatuuriga kehale**. Seetõttu ka soojushulka  $Q_2$ , mida annab soojusmasin ära külmemale keskkonnale, ei ole soojemal keskkonnal võimalik tagasi saada.

Ideaalse soojusmasina, nn Carnot tsükli järgiva soojusmasina kasutegur sõltub ainult kuumema ja külmemä keskkonna temperatuuridest  $T_1$  ja  $T_2$ :

$$\mu_C = \frac{T_1 - T_2}{T_1}.$$

Saab näidata, et ideaalse soojusmasina kasutegur on suurim võimalik antud temperatuurivahemikus töötavate masinate hulgas.

Soojusmasina tsükkel võib töötada ka vastupidises suunas sellisel juhul võtab masin välise töö (sageli elektrienergia)  $A$  arvelt külmemast keskkonnast soojushulga  $Q_2$  ning annab soojemale keskkonnale soojushulga  $Q_1 = A + Q_2$ . Sellel põhimõttel töötavad nii külmpump, konditsioneer kui ka õhksoojuspump.



## 3.4 Õhuniiskus

*Märksõnad: Suhteline õhuniiskus, küllastunud aur. Daltoni seadus.*

Meid ümbritsev õhk sisaldab alati teatud hulga veeauru. Veeauru tihedust õhus nimetatakse **absoluutseks õhuniiskuseks**. Konkreetisel temperatuuril maksimaalse veeauru tihedusega veeauru nimetatakse **küllastunud veeauruks**. Küllastumine sõltub temperatuurist, kõrgemal temperatuuril on küllastunud auru tihedus suurem. Kui temperatuur langeb, siis osa küllastunud veeaurust kondenseerub.

Õhus saialduva veeauru tiheduse ja küllastunud veeauru tiheduse suhet samal temperatuuril nimetatakse **suhteliseks õhuniiskuseks**. Küllastunud veeauru suhteline õhuniiskus on  $r = 100\%$ .

Kehtib **Daltoni seadus**: gaaside segu rõhk on osarõhkude summa.

Niisiis on niiskes õhus summaarne õhurõhk kuiva õhu ja veeauru osarõhkude summa.

### 62. Gaasiküte

Autor: Ardi Loot, piirkonnavor, 2017, G 10

Poolsfäärilist telki raadiusega  $R = 4$  m kütakse gaasipuhuriga. Seinte soojusjuhtivus on  $U = 3 \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K})$ . Ühe massiühiku gaasi põletamisel eraldub  $D = 2,25$  massiühikut vett. Gaasi kütteväärtus on  $k = 40 \text{ MJ/kg}$ . Välisõhu temperatuur on  $T_0 = -10^\circ\text{C}$  ja õhuniiskus  $\eta_0 = 50\%$ . Kui suur peab olema gaasikütte võimsus  $P$  ja telgi ventileerimise õhuruumala  $Q$  ajaühikus, et hoida telgis temperatuuri  $T_1 = 15^\circ\text{C}$  ja õhuniiskust  $\eta_1 = 80\%$ ? Kui suur osa küttevõimusest kulub ventileeritava õhu soojendamiseks ja mitu korda tunnis vahetub telgi õhk?

Õhu tihedus  $\rho_{\text{o}} = 1,2 \text{ kg/m}^3$  ja soojusmahtuvus  $c_{\text{o}} = 1,0 \text{ kJ}/(\text{kg} \cdot \text{K})$ . Temperatuuril  $T_0 = -10^\circ\text{C}$  mahub õhu ruumalaühikusse maksimaalselt  $G_0 = 2,3 \text{ g/m}^3$  veeauru ning temperatuuril  $T_1 = 15^\circ\text{C}$  vastavalt  $G_1 = 12,8 \text{ g/m}^3$ . Eeldada, et soojakaod läbi telgi põranda puuduvad.

## 3.5 Kiirgusvood

### 3.5.1 Kehade soojuskiirgus

*Märksõnad: Kiirgusvoog. Stefani-Boltzmanni seadus.*

Kõik makroskoopilised kehad kiirgavad oma temperatuurile vastavat soojuskiirgust. **Must keha** on objekt, mis mitte ei peegelda ega hajuta sellele langevat valgust vaid neelab ja seejärel taas kiirgab sellele langenud valguse. Mõnikord nimetatakse musta keha ka absoluutselt mustaks kehaks. Musta keha kiirgus sõltub ainult musta keha temperatuurist  $T$  vastavalt Stefan-Boltzmanni seadusele.

**Stefan-Boltzmanni seadus**. Musta keha kiirgusvoo tihedus (võimsus ühikulise pindala kohta)  $w$  on võrdeline temperatuuri neljanda astmega:

$$w = \sigma T^4.$$

Võrdetegurit  $\sigma = 5,67 \times 10^{-8} \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-4}$  kutsutakse Stefani-Boltzmanni konstandiks.

Reaalsetel objektid ei neela siiski kogu pealelangevat kiirgust, vaid osa sellest peegeldub või hajub. Sellisel juhul võtab Stefan-Boltzmanni seadus kuju

$$w = \varepsilon \sigma T^4.$$

Neeldumistegur  $\varepsilon$  näitab, milline osa pealelangevast kiirgusest neeldub; absoluutselt musta pinna jaoks  $\varepsilon = 1$ , ideaalselt valge või peegelpinna jaoks  $\varepsilon = 0$ . Vastavalt osa  $1 - \varepsilon$  kehale langevast kiirgusest peegeldub või hajub.

Kogu keha enda soojuskiirguse võimsuse saab leida, korrutades kiirgusvoo tihedust keha pindalaga  $S$ :

$$P = Sw = S\varepsilon\sigma T^4.$$

### 63. Soojuskiirgus

Autor: Valter Kiisk, lõppvoor, 2006, G 8

Veeldatud gaaside säilitamisel on tarvis palju tähelepanu pöörata anuma soojusisulatsioonile. Olulise osa soojusvahetusest moodustab soojuskiirgus. Oletagem, et anumal on kahekordsed seinad, mille kiirgusvõimsus pinnaühiku kohta on  $\varepsilon\sigma T^4$ , kus Stefan-Boltzmanni konstant  $\sigma = 5,67 \times 10^{-8} \text{ W}/(\text{m}^2 \text{ K})$  ja seinte kiirgamisvõime  $\varepsilon$  loeme temperatuurist sõltumatuks ja võrdseks 0,1-ga. Vedela lämmastikuga kokkupuutes oleva siseseina temperatuur on  $T_s = 77 \text{ K}$ , toaõhuga kokkupuutes oleva välisseina temperatuur aga  $T_v = 293 \text{ K}$ .

a) Leidke soojuskiirgusest tingitud soojusvoog läbi  $S = 1 \text{ cm}^2$  suuruse seinapinna.

b) Soojusvoo vähendamiseks asetatakse sise- ja välisseina vahele  $N$  õhukest ekraani, mille pind on kaetud samasuguse materjaliga nagu anuma seinad. Mitu korda väheneb selle tulemusena soojusvoog? Põhjendage vastust.

*Märkus.* kehtib Kirchhoffi seadus — keha neelamisvõime, mis näitab, kui suur osa aine pinnale langevast kiirgusest neeldub, on alati võrdne tema kiirgamisvõimega  $\varepsilon$ .

### 64. Kasvuhooneefekt

Autor: Kristian Kuppert, lahtine, 2017, G 6

Vaatleme järgnevat Maa atmosfääri lihtsustatud mudelit, kus Maad ümbritsev atmosfäärikiht a) peegeldab kosmosesse tagasi  $\mu = 30\%$  pealelangevast päikesekiirgusest ning ülejäänud laseb läbi ilma kiirgust neelamata; b) neelab täielikult kogu maapinnalt tuleva infrapunakiirguse. Päikeselt tulev kiiritustihedus on  $w_0 = 1400 \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$ . Leidke maapinna keskmine temperatuur.

*Vihje.* kehtib Stefan-Boltzmanni seadus – musta keha poolt kiiratud võimsus pindalaühiku kohta avaldub kui  $w = \sigma T^4$ , kus  $\sigma = 5,67 \times 10^{-8} \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot \text{K}^4}$ . Eeldada, et maapind kiirgab ainult infrapunakiirgust, ning et teda saab selle jaoks lugeda absoluutselt mustaks kehaks. Samuti neelab maapind kogu temani jõudva päikesevalguse.

### 3.5.2 Soojusjuhtivus.

*Märksõna:* Soojusjuhtivustegur.

Soojusvoog läbi kihi paksusega  $d$ , pindalaga  $S$ , temperatuuride vahel  $\Delta T$  ja soojusjuhtivusteguriga  $k$  on  $P = k \frac{S\Delta T}{d}$ .

**65. Vesi ja jää**

Autor: Andres Laan, piirkonnavor, 2010, G 5

Kahte suurt paralleelset metallplaati hoitakse horisontaalselt vastastikku. Üks plaatidest on temperatuuril  $T_1 = -20^\circ\text{C}$  ja teine temperatuuril  $T_2 = 20^\circ\text{C}$ . Metallplaatide vahel on vesi. Ilmselgelt on külma plaadi läheduses vesi tahkes olekus. On teada, et vee tahke ja vedela kihi paksuste suhe on 4. Millisele temperatuurile tuleb soojendada teine metallplaat, et vedela kihi paksus saaks võrdseks tahke kihi paksusega?

**66. Gaasiküte**

Autor: Ardi Loot, piirkonnavor, 2017, G 10

Poolsfäärikujulist telki raadiusega  $R = 4\text{ m}$  köetakse gaasipuhuriga. Seinte soojusjuhtivus on  $U = 3\text{ W}/(\text{m}^2\cdot\text{K})$ . Ühe massiühiku gaasi põletamisel eraldub  $D = 2,25$  massiühikut vett. Gaasi kütteväärtus on  $k = 40\text{ MJ}/\text{kg}$ . Välisõhu temperatuur on  $T_0 = -10^\circ\text{C}$  ja õhuniiskus  $\eta_0 = 50\%$ . Kui suur peab olema gaasikütte võimsus  $P$  ja telgi ventileerimise õhuruumala  $Q$  ajaühikus, et hoida telgis temperatuuri  $T_1 = 15^\circ\text{C}$  ja õhuniiskust  $\eta_1 = 80\%$ ? Kui suur osa küttevõimusest kulub ventileeritava õhu soojendamiseks ja mitu korda tunnis vahetub telgi õhk?

Õhu tihedus  $\rho_\delta = 1,2\text{ kg}/\text{m}^3$  ja soojusmahtuvus  $c_\delta = 1,0\text{ kJ}/(\text{kg}\cdot\text{K})$ . Temperatuuril  $T_0 = -10^\circ\text{C}$  mahub õhu ruumalaühikusse maksimaalselt  $G_0 = 2,3\text{ g}/\text{m}^3$  veeauru ning temperatuuril  $T_1 = 15^\circ\text{C}$  vastavalt  $G_1 = 12,8\text{ g}/\text{m}^3$ . Eeldada, et soojakaod läbi telgi põranda puuduvad.

**3.5.3 Soojuskaod.***Märksõna: Soojuskaod.***67. Radiaator**

Autor: Ardi Loot, piirkonnavor, 2018, G 3

Toas on vesiradiaator nimivõimsusega  $P_n = 2,0\text{ kW}$ . Mis on selle radiaatori tegelik võimsus ja tagasivoolava vee temperatuur, kui radiaatorit läbib küttevesi kiirusega  $q = 1,01/\text{min}$ , pealevoolava küttevee temperatuur  $T_p = 70^\circ\text{C}$  ja toatemperatuur  $T_0 = 22^\circ\text{C}$ ? Kui suur on radiaatori maksimaalne võimsus antud pealevoolu- ja toatemperatuuri korral? Vee erisoojus  $c_v = 4200\text{ J}/(\text{kg}\cdot\text{K})$  ja tihedus  $\rho_v = 1000\text{ kg}/\text{m}^3$ .

*Märkus.* Radiaatori nimivõimuseks nimetatakse selle küttevõimust fikseeritud pealevoolu- ( $T_{pn} = 75^\circ\text{C}$ ), tagasivoolu- ( $T_{tn} = 65^\circ\text{C}$ ) ja toatemperatuuri ( $T_{0n} = 20^\circ\text{C}$ ) korral.

*Vihje.* Võib eeldada, et radiaatori tegelik võimsus on võrdeline pealevoolu- ja tagasivoolutemperatuuride keskmise ja toatemperatuuri vahega.

**68. Küttesüsteem**

Autor: Taavi Pungas, piirkonnavor, 2014, G 9

Vaatleme kortermaja küttesüsteemi lihtsustatud mudelit. Kahekordse maja kummalgi korrusel on üks korter. Loeme korterid täiesti ühesugusteks. See tähendab, et katus ja põrandad on hästi soojustatud ning soojuskadusid arvestame ainult läbi maja seinte.

Keldris asub katel, mis kütab vee temperatuurini  $t_1 = 68^\circ\text{C}$ . Vesi liigub kõigepealt ülemisse korterisse ning läbib seal 10 ribiga radiaatori. Seejärel juhatakse vesi alumisse korterisse, kus see läbib 11 ribiga radiaatori. Pärast seda liigub vesi tagasi

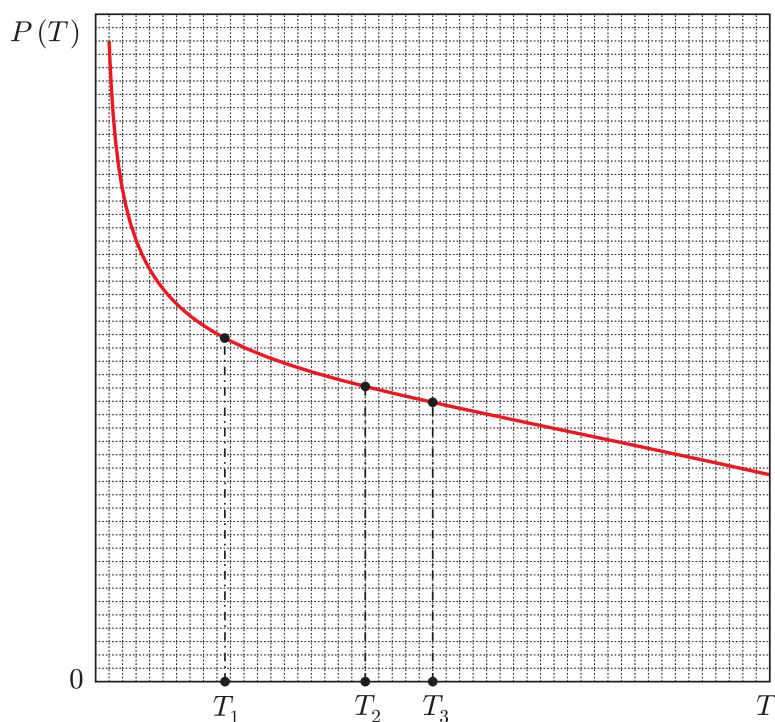
katlasse ning sinna jõudses on vee temperatuur  $t_2 = 60^\circ\text{C}$ . Eeldame, et vesi jahtub ainult radiaatorites. Küttesüsteem on ehitatud nii, et mõlemas korteris oleks täpselt sama sisetemperatuur  $t$ . Leidke temperatuur  $t$ .

*Teadmiseks:* soojuskadu läbi mingi seinu on võrdeline selle pindalaga ja temperatuuride vahega seespool ja väljaspool seinu. Eeldage, et mööda radiaatorit liikudes langeb vee temperatuur lineaarselt läbitud vahemaaga.

### 69. Küttekeha

Autor: Mihkel Heidelberg, lõppvoor, 2007, G 7

Teatud ruumi köetakse sellise küttekehaga, mille võimsus  $P$  sõltub ruumi temperatuurist nagu on näidatud joonisel. Kui välistemperatuur on  $T_1$ , siis ruumi temperatuur stabiliseerub  $T_2$  juures (need temperatuurid on märgitud graafikul). Millise temperatuurini tõuseb toatemperatuur, kui välistemperatuur tõuseb  $T_3$ -ni (leida see temperatuur graafilise konstrueerimise abil). Soojusvahetus keskkonnaga on võrdeline temperatuuride vahega.



### 70. Kauplus

Autor: Oleg Koik, lõppvoor, 2013, G 8

Suurematel hoonetel on sageli eeskojad. Miks? Vaadeldgem kauplust, millele ehitati nii kitsas eeskoda, et läbi kaupluse seinte toimuvaid soojuskadusid see juurdeehitis ei mõjuta. Kaupluse ukse avamisel vahetub läbi avatud ukse teatud kogus õhku. Lugegem õhk kõikjal hästi segunenuks, st läbi lahtise ukse läheb õuest eeskotta õuetemperatuuril õhk; kõigi uste jaoks teeme analoogilised eeldused. Samuti eeldame, et ühe ukseavamisega vahetuva õhu hulk ei sõltu temperatuuride vahest ning et uste ja eeskoja seinte soojusjuhtivusest tingitud soojuskaod on tühised võrreldes õhu vahetumisest tingitutega.

Vaatleme olukorda enne eeskoja ehitamist. Jahedal aprillipäeval oli kaupluse lah-tioleku aegne välistemperatuur stabiilselt  $T_1 = 4^\circ\text{C}$ . Öösel, kui kauplus on kinni, oli välistemperatuur stabiilselt  $T_2 = 0^\circ\text{C}$ . Kaupluse elektriradiaatorite tööd juhib termostaat, mis hoiab sisetemperatuuri püsivalt  $T_0 = 20^\circ\text{C}$  juures. Öösel oli radiaa-torite keskmine võimsus  $P_2 = 5,0\text{ kW}$  ning päeval  $P_1 = 4,6\text{ kW}$ . Päeval toimib kaks efekti: (a) inimesed avavad aeg-ajalt ust; (b) inimeste kehasoojus ning kaupluse valgustid panustavad kütmissse teatava lisavõimsusega.

Pärast eesruumi ehitamist selgus, et sama välistemperatuuri ning külatajate ar-vu juures vähenes radiaatorite päevane keskmine võimsus  $P_3 = 3,8\text{ kW}$ -ni. Millist võimsust toodavad kaupluses olevad inimesed ja valgustid, kui eeldada, et soojus-vahetuse võimsus on võrdeline temperatuuride vahega?

### 3.6 Soojuslik paisumine

*Märksõna: Soojuslik paisumine*

#### 71. Küttesüsteem

Autor: Tundmatu autor, piirkonnavor, 2011, G 3

Küttesüsteem täidetakse  $t_1 = 10^\circ\text{C}$  temperatuuriga veega. Kui palju peab paisu-paagis olema vaba ruumi, et kütmisel avatud paisupaagist vesi välja ei voolaks? Küttesüsteemis on  $V_1 = 250$  liitrit vett ja tööolukorras on selle keskmine tempera-tuur  $t_2 = 63^\circ\text{C}$ . Vee ruumpaisumistegur on  $\beta = 3 \times 10^{-4}\text{ K}^{-1}$ . Vedeliku ruumala mingil temperatuuril avaldub kujul  $V = V_0(1 + \beta t)$ , kus  $t$  on vedeliku temperatuur Celsiuse kraadides, ning  $V_0$  on vedeliku ruumala temperatuuril  $0^\circ\text{C}$ .

## 4 Elektromagnetism

### 4.1 Elektrostaatika

#### 4.1.1 Laeng.

*Märksõnad: Laeng. Laengu suurus.*

Laeng iseloomustab esmajärjekorras aine omadust osaleda elektromagnetilistes vas-tasmõjudes. Seega, suurema laengu  $Q$  korral on ka vastastikmõjud tugevamad. Elektrostaatika tegeleb laengute ehk laetud osakeste hulkade vastastikmõjude uuri-misega.

Kehtib **laengu jäävus** – kogulaeng suletud süsteemis on konstantne.

#### 4.1.2 Coulomb'i seadus.

*Märksõnad: Coulomb'i seadus. Elektrostaatiline jõud. Jõuvektor*

Eksperimentaalselt leitud ja tõestust saanud Coulomb'i seadus kirjeldab jõudu, mis mõjub kahe laengu vahel mõlemale laengule. Seadus kajastab fakti, et jõud laengute vahel on:

- proportsionaalne kummagi laengu suurusega,
- pöördruutvõrdeline laengute vahekaugusega,

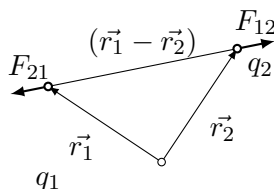
- suunatud piki laenguid ühendavat sirget,
- tõukejõud samamärgiliste laengute puhul ning tõmbejõud erimärgiliste laengute korral.

Kooliõpikust tuttavalt skalaarkujul väljendub see kui:

$$F = k \frac{Qq}{r^2},$$

kus  $k$  on Coulomb'i konstant. Coulomb'i konstant on väärtuselt  $k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \approx 8,99 \times 10^9 \text{ N m}^2 \text{ C}^{-2}$ . Vektorvormis, kus  $\vec{r}_1$  ja  $\vec{r}_2$  on laengute kohavektorid ning  $\hat{r}$  tähistab ühikvektorit (ühikvektori pikkus on 1, määrab vaid suunda) laenguid ühendaval sirgel, avaldub Coulomb'i seadus kujul

$$\vec{F} = \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^2} \hat{r}.$$



Joonis 5: Coulomb'i seadus vektorkujul

Siin  $k$  on omakorda tuletatud vaakumi dielektrilisest läbitavusest  $\epsilon_0 \approx 8,854 \times 10^{-12} \text{ C}^2 \text{ N}^{-1} \text{ m}^{-2}$ .

### 4.1.3 Superpositsiooniprintsiip.

*Märksõna: Superpositsiooniprintsiip.*

Kehtib **superpositsiooniprintsiip**, mille alusel iga elektrostaatiline vastastikmõju on „lahti võetav“ eraldi panusteks – kui uurime nt 10 fikseeritud erineva laengu mõju ühele liikuvale laengule, siis võime arvutada Coulomb'i jõu alusel jõu igast laengust eraldi ning seejärel saadud tulemused vektoritena kokku liita. Analoogselt saame liita erinevatest laengutest tekitatud jõuvektoreid, potentsiaale ja elektrivälja vektoreid.

### 4.1.4 Elektriväli.

*Märksõnad: Elektriväli. Coulomb'i seadus. Jõujooned.*

Et elektrijõud ei vaja mõjumiseks vahetut kontakti, teame, et iga laengu juures on seda jõudu vahendav elektriväli. Reeglina kujutame elektrivälja jõujoonte abil, mis kirjeldavad seda jõudu, mis rakenduks positiivsele laengule etteantud punktis. Seega jõujooned algavad positiivsetel laengutel ja neelduvad negatiivsetel. Jõujoonte tihedus annab aimu sealsest elektrivälja tugevusest. Homogeenses elektriväljas ehk olukorras, kus elektrivälja tugevus on ruumis konstantne, on ka jõujooned paralleelsed.

Vektoriaalne suurus elektrivälja tugevus  $E$  kirjeldab kvantitatiivselt jõudu, mis rakendub laengule etteantud ruumi punktis. Elektrivälja tugevus on jõud „laengu kohta“ ehk:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}_e}{q_{\text{test}}} \quad (1)$$

$$|\vec{E}| = k \frac{q}{r^2}, \quad (2)$$

ühikuga  $\text{N C}^{-1}$ .

#### 4.1.5 Potentsiaal ja pinge.

*Märksõnad: Potentsiaal ja pinge. Energia. Energiamiinimum. Punktlaengu potentsiaal.*

Kui vaba laeng liigub elektriväljas, siis selle liikumise käigus rakendub talle elektrijõud  $\vec{F}_e = q\vec{E}$ . Et toimub liikumine ja rakendub jõud, tehakse ka tööd ning muutub laengu potentsiaalne energia. Uurime esialgu energiat kahe punktlaenguga süsteemis.

Energia defineerimiseks on kasulik defineerida võrdluspunkt, kuna töö kirjeldab vaid erinevust kahe oleku energiatega. Antud juhul on kasulik võtta nullnivooks olukord, kus laengud on teineteisest kaugel ning vastastikmõju on tühiselt väike. Seejärel laenguid lähendades peab tegema tööd, et hoida distantse vähendades mõlemat laengut sisuliselt paigal.

Vajalik töö, et liigutada punktlaengud  $q_1$  ja  $q_2$  suurelt kauguselt  $x_{\text{alg}} \rightarrow \infty$  kaugusele  $r$  on:

$$\begin{aligned} A &= F \cdot s \\ &= \frac{kq_1q_2}{r}. \end{aligned}$$

Näeme vastavalt intuitsioonile, et positiivseid laenguid lähendades peab energiat lisama, aga negatiivseid laenguid lähendades potentsiaalne energia väheneb (näiteks muutudes kineetiliseks energiaks).

Tihti on kasulik kirjeldada energiat laenguühiku kohta. Seda nimetataksegi potentsiaaliks ja avaldub punktlaengu korral kaugusel  $x$  laengust kui:

$$U = k \frac{q}{x}.$$

Potentsiaali ühikuks on  $\text{J C}^{-1}$  ehk V. Pinge, samuti ühikuga V, on defineeritud kui potentsiaalide vahe kahe punkti vahel.

Kui teame, et elektrivälja on rangelt piki mingisugust telge, siis on võimalik siduda omavahel elektrivälja tugevus ja potentsiaal.

$$|\vec{E}| = -\frac{dU}{dx}.$$

Näeme, et jõud on suunatud energiakiirguse poole.

#### 4.1.6 Juhid elektrostaatilises väljas.

*Märksõnad: Elektrijuht. Dielektrik. Elektriväli.*

Elektrijuhid on sellised ained, kus laeng saab vabalt liikuda. Metallide korral toimib see valentsielektronide migratsiooni teel. Elektrijuhi vastandiks oleks dielektriline materjal, milles laengud ei saa liikuda ning võivad esineda kummalised laengujaotused.

On selge, et juhtivas kehas ei ole elektrivälja vähegi mõistlike elektriväljade korral (kui elektrivälja tugevus on väga suur, siis toimuvad teised protsessid). Seni kuni on veel vabu elektrone, liiguvad elektronid nii, et elektrivälja tühistada – kui elektriväli oleks, siis oleks needsamad elektronid kiirendatud nii, et see tühistuks. Seega välised elektrivälja jõujooned on iga juhtiva keha pindmises punktis risti keha piirpinnaga. Juhtivale kehale tekib elektriväljas ebahürtlane laengujaotus, mis on parajasti niisugune, et tühistada keha sees olevat elektrivälja. Kui võrd keha sees ei ole elektrivälja, siis teame, et keha sees on ka potentsiaal konstantne ( $E = -\frac{dU}{dx}$ ).

Laetud juhtival kehal on liigsed samamärgilised laengud kogunenud keha piirpinnale, kuna siis on nendevaheline energia ja tõukumine vähim.

#### 4.1.7 Dielektriline läbitavus.

*Märksõnad: Dielektriline läbitavus. Dipoolmoment.*

Iga materjal või keskkond elektriväljas reageerib teatud määral sellele elektriväljale. Polaarsed molekulid ( $H_2O$ ) paigutuvad vastavalt elektrostaatilisele jõule pigem nii, et nende dipoolmoment (suunaga positiivne-negatiivne) on paigutatud vastupidiselt elektrivälja jõujoontega. Ka mittepolaarsed ained polariseeruvad elektrivälja toimel, kuna ka aatomi tasandil negatiivse ja positiivse laengu keskmine asukoht nihkub erinevates suundades.

Sel juhul on aga selge, et aineosakeste poolt tekitatud summaarne dipoolmoment (laengute eraldatus) „töötas vastu“, välisele elektriväljale ning nõrgestab seda, kui võrrelda olukorda sellega, kui aine asemel oleks vaakum. Seda nõrgestamistegurit vaakumi suhtes nimetatakse suhteliseks dielektriliseks läbitavuseks  $\epsilon_r$ , misjuhul dielektriline läbitavus selles aines on vaakumi läbitavuse ja suhtelise läbitavuse korutus:  $\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r$ .

Coulomb'i konstant sõltumatuna keskkonnast oleks  $k = \frac{1}{4\pi\epsilon}$ . See formulatsioon näitab ka otsest seost aine läbitavuse ja tajutud jõudude vahel: kahe võrdse laengu vahel, mille kaugust ei muudeta, mõjuv jõud väheneb peaaegu 80 korda, kui liigutada need laengud õhust vette (vee suhteline läbitavus toatemperatuuril on umbes 78).

#### 4.1.8 Laengu pindtihedus

*Märksõnad: Laengu joon-, pind- ja ruumtihedus. Laeng. Laetud keha.*

Laengu pindtihedus (nagu ka joon- ja ruumtihedus) iseloomustab laengu jaotust mingil kehal, millel on teatav hulk iseloomustavaid suuruseid (traadi puhul vahel huvitume vaid pikkusest). Näiteks võib kondensaatori plaadil pindalaga  $0,1 \text{ m}^2$  olla laengu pindtihedus  $50 \text{ nC m}^{-2}$ , mispuhul plaadil tervikuna oleks laeng  $5 \text{ nC}$ .

#### 4.1.9 Kondensaator, mahtuvus ja plaatkondensaatori mahtuvus.



*Märksõnad: Kondensaator. Mahtuvus. Laengu pindtihedus. Elektriväli.*

Kondensaator on seade, mis salvestab energiat elektrivälja - liigutades vastasmärkilised laengud erinevatele plaatidele, lisame neile potentsiaalset energiat. Kondensaatori ühendamisel vooluringi tekib selle energia arvelt vool.

Mahtuvus on keha omadus olla laetud - see kirjeldab seda, et kui palju laengut on mingil kehal etteantud pingel juures:  $C = \frac{Q}{U}$ . Seega, suure mahtuvusega kehasid on energeetiliselt soodsam laadida.

Uurime lähemalt plaatkondensaatorit. Olgu meil 2 juhtivat plaati pindaladega  $S$  mis on teineteisest kaugusel  $d \ll \sqrt{S}$ . On selge, et nt kasutades patareid elektromotoorjõuga  $U$  võime laadida kondensaatorit nii, et kummalgi plaadil on laeng  $Q = \pm CU$ , kus  $C$  on mahtuvus. Leiame  $C$  sõltuvuse kondensaatori geometriast ja dielektrilisest läbitavusest.

Et kummalgi plaadil on ühtlase laengujaotuse korral laengutihedus  $\sigma = \frac{Q}{S}$ , siis elektrivälja tugevus plaatide vahel avaldub ristkülikukujulisest Gaussi pinnast kui summa mõlema plaadi elektriväljast eraldi ehk  $E = \frac{\sigma}{\epsilon}$ . Teame ka, et pingel kahe punkti vahel homogeenses elektriväljas avaldub kui  $U = Ed$ , kui elektriväli on homogeenne ja  $d$  on punktide vahekaugus.

Seega, kombineerides saame

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{Q}{Ed} = \frac{Q\epsilon}{\sigma d} = \frac{S\epsilon}{d}.$$

Ehk plaatkondensaatori mahtuvus on võrdeline plaatidevahelise aine dielektrilise läbitavusega, plaatide pindalaga ning pöördvõrdeline plaatide vahekaugusega.

#### 4.1.10 Ühtlaselt laetud kera ja sfääri potentsiaalid.

*Märksõnad: Elektrijuhid. Potentsiaal.*

Kehast väljaspool ütleb Gaussi seadus, et ühtlaselt jaotunud laenguga  $Q$  kera või sfääri poolt tekitatud elektriväli on võrdne väljaga, mida tekitaks punktlaeng  $Q$  selle keha keskel. Seega saame, et potentsiaal kera pinnal on sama, mis elektriline potentsiaal punktlaengu tõttu sellel kaugusel:

$$U = k \frac{Q}{R}. \quad (3)$$

Ühtlaselt laetud sfääri või kera, aga ka teise juhtiva keha sees puudub elektriväli. Seega on potentsiaal konstantne ja sama, mis piirpinnal.

Kui erineva potentsiaaliga kehad satuvad ühendusse, toimub laengukandjate liikumine nii, et potentsiaalid kontaktisolevatel kehadel oleksid võrdsed.

#### 4.1.11 Ekvipotentsiaalpinnad.

*Märksõnad: Ekvipotentsiaalpinnad. Jõujooned. Potentsiaal.*

Ekvipotentsiaalpinnal asetsevatel punktidel on kõigil sama potentsiaal. Elektrivälja jõujooned on alati ekvipotentsiaalpinnaga risti.

## 4.2 Elektriahelad

Elektriahelaid kujutatakse graafiliselt elektritingmärkide abil elektriskeemides. Tabelis 1 on välja toodud olümpiaadidel levinuimad elektritingmärgid. Erinevatel võistlustel võib olla väikseid erinevusi tingmärkide kuju osas, kuid see ei sega enamasti nende mõistmist.

Tabel 1: Levinuimad elektritingmärgid.

Juhe	
Klemm	
Sõlmpunkt	
Üleminek	
Voltmeeter	
Ampermeeter	
Püsivooluallikas	
Takisti	
Kondensaator	
Induktiivpool	
Diod	
Patarei	
Lüliti	
Maandus	

### 4.2.1 Elektrivool

*Märksõnad: Elektrivool ja voolutihedus*

Voolutugevuseks  $I$  (ühik amper, A) nimetatakse juhi ristlõiget läbivat elektrilaengut  $q$  (ühik kulon,  $C = A \cdot s$ ) ajaühikus  $t$ :

$$I = \frac{q}{t}.$$

## 72. Juhe

Autor: Tundmatu autor, lahtine, 2005, G 5

Sirgjooneline juhe asub sügaval maa all ühtlases pinnases. Lekkevool ühikulise pikkusega juhtmest on  $i$ . Leidke lekkevoolu tihedus ( $A/m^2$ ) kaugusel  $r$  juhtmest. Juhtme pikkus on palju suurem kui  $r$ . Lekkevool on konstantne piki juhet.

*Märkus.* Lekkevooluks nimetatakse voolu, mis levib isolaatorites.

### 4.2.2 Ohmi seadus ja takistus

*Märksõnad:* Ohmi seadus vooluringi osa ja kogu vooluringi kohta. Takistus ja eritakistus.

Enamik elektrijuhtides kehtib Ohmi seadus: voolutugevus on võrdeline pingega:

$$I = \frac{U}{R},$$

kus võrdetegur  $R$  on takistus (ühik oom,  $\Omega = V/A$ ).

Juhi takistus on võrdeline selle pikkuse ja pöördvõrdeline juhi ristlõikepindalaga:

$$R = \rho \frac{\ell}{A},$$

kus võrdetegur  $\rho$  on eritakistus (ühik  $\cdot m$ ).

## 73. Takisti

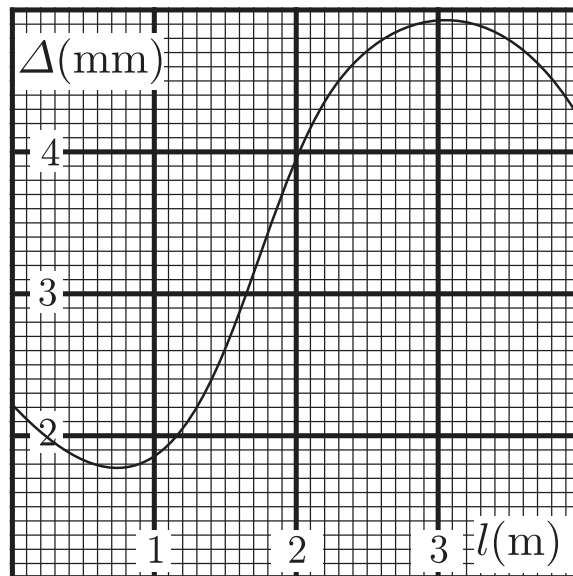
Autor: Jaan Kalda, piirkonnavor, 2007, G 7

Oletagem, et me tahame teha takisti takistusega  $R = 1 \Omega$ , mille takistuse temperatuurisõltuvus oleks toatemperatuuri ümbruses võimalikult väike. Olgu meil kasutada raudtraat ristlõikepindalaga  $s = 0,030 \text{ mm}^2$  ja grafiitpulk ristlõikepindalaga  $S = 3,0 \text{ mm}^2$ . Kuidas valmistada soovitud takistit ja kui pikki grafiitpulga ning terastraadi juppe tuleb seejuures kasutada? Grafiidi ja raua eritakistused on vastavalt  $\rho_g = 3,0 \times 10^5 \Omega m$  ning  $\rho_r = 9,7 \times 10^{-8} \Omega m$ ; takistuse temperatuurikoeffitsiendid (suhtelised muutused  $\Delta R/R$  temperatuuri kasvamisel ühe kraadi võrra) on  $\alpha_g = -5,0 \times 10^{-3} \text{ K}^{-1}$  ning  $\alpha_r = 6,41 \times 10^{-3} \text{ K}^{-1}$

## 74. Traat

Autor: Jaan Kalda, lõppvoor, 2008, G 7

Ühtlase ristlõikega traati (ristlõike pindala  $S = 1 \text{ mm}^2$ ) venitati nii, et tema erinevad lõigud venisid erinevalt. Enne venitamist oli traadile märgitud jooned iga millimeetri tagant. Joonisel on toodud nende joonte vahekaugused  $\Delta$  pärast venitamist sõltuvuses kaugusest traadi ühest otsast  $l$  ( $l$  on mõõdetud pärast venitamist). Leidke selle nüüdseks 4 meetri pikkuse traadi takistus, arvestades, et traadi materjali tihedus ja eritakistus  $\rho = 1 \times 10^{-6} \Omega m$  venitamise tagajärjel ei muutunud.



### 4.2.3 Takistite jada- ja rööpühendus

*Märksõnad: Takistite jada- ja rööpühendus.*

Takistite jadaühenduse (vt joonist 6) jaoks kehtivad järgmised omadused. Kogupinge takistitel on võrdne takistitel olevate pingete summaga:

$$U = U_1 + U_2 + \dots + U_N.$$

Voolutugevus kõigis takistites on võrdne:

$$I = I_1 = I_2 = \dots = I_N.$$

Kogutakistus on võrdne kõigi takistuste summaga:

$$R = R_1 + R_2 + \dots + R_N.$$



Joonis 6:  $N$  takisti jadaühendus.

Takistite rööpühenduse (vt joonist 7) jaoks kehtivad järgmised omadused. Pinge kõigil takistitel on võrdne:

$$U = U_1 = U_2 = \dots = U_N.$$

Kogu voolu tugevus on võrdne takisteid läbivate voolude tugevuste summaga:

$$I = I_1 + I_2 + \dots + I_N.$$

Vaatame nüüd kogutakistuse pöördväärtust:

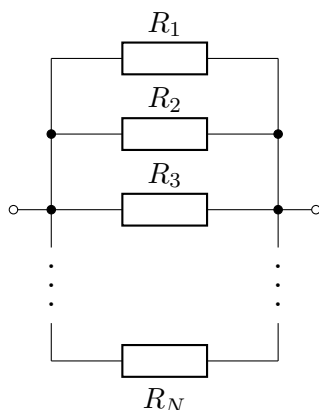
$$\frac{1}{R} = \frac{I}{U} = \frac{I_1 + I_2 + \dots + I_N}{U} = \frac{I_1}{U_1} + \frac{I_2}{U_2} + \dots + \frac{I_N}{U_N} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_N}.$$

Seega on kogutakistuse pöördväärtus on võrdne takistuste pöördväärtuste summa-  
ga:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_N}.$$

Kui omavahel rööbiti on ühendatud kaks takistit, siis kogutakistus

$$R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}.$$

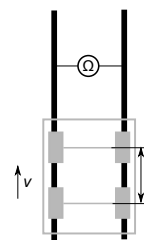


Joonis 7:  $N$  takisti rööpühendus.

## 75. Raudtee

Autor: Mihkel Pajusalu, piirkonnavor, 2012, G 8

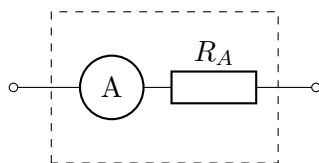
Möödame raudteel elektritakistust kahe kõrvutise rööpa vahel nii, nagu joonisel. Rööbastel sõidab vagun kiirusega  $v$ . Olgu vagunil kaks rattapaari, mille vahekaugus on  $l$ . Joonistage graafik takistuse muutumisest ajas alates hetkest, kui vaguni esimene rattapaar on mõõtepunkti ees sellest kaugusel  $l/2$ , kuni ajani, kui tagumine rattapaar on mõõtepunkti taga sellest kaugusel  $l/2$ . Mõlema rattapaari takistuseks olgu  $r$  ja rööpa takistus pikkusühiku kohta  $\rho$ .



### 4.2.4 Mõõteriistad ja sisetakistus

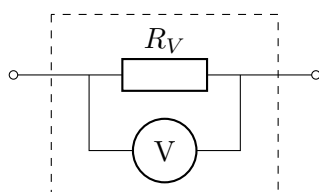
*Märksõnad: Ampermeeter, voltmeeter ja oommeeter. Ideaalsed ja mitteideaalsed vooluringi elemendid, sisetakistus.*

Ampermeeter (vt joonist 8) on mõõteriist, mis mõõdab seda läbivat elektrivoolu. Ideaalsel ampermeetril sisetakistus puudub ( $R_A = 0$ ). Reaalne ampermeeter koosneb heas lähenduses ideaalsest ampermeetrist, mis on jadamisi ühendatud takistiga ( $R_A$ ).



Joonis 8: Reaalse ampermeetri skeem.

Voltmeeter (vt joonist 9) on mõõteriist, mis mõõdab selle klemmidel olevat pinget. Ideaalset voltmeedit vol ei läbi ( $R_V \rightarrow \infty$ ). Reaalne voltmeeter koosneb heas lähenduses ideaalsest voltmeedit, mis mõõdab reaalse voltmeetri sees oleva suure takisti ( $R_V$ ) pinget.



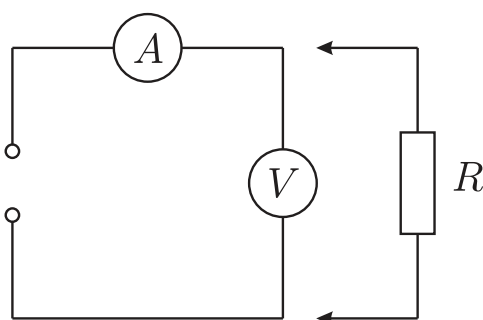
Joonis 9: Reaalse voltmeetri skeem.

Oommeeter on mõõteriist, mis mõõdab takisti takistust. Mõõtmise tegemiseks tuleb oommeeteri klemmid ühendada takisti klemmidega. Oommeetri siseehitus on tihti keeruline ning võib koosneda ampermeedit, voltmeedit, püsivooluallikast, pingeaallikast ja teistest komponentidest. Tema keerulise ehituse tõttu ei tohiks oommeedit ühendada elektriahelasse, mida läbib vol või millele on raknedatud pinge. Selline ühendamine ei anna õiget näitu ning võib lõhkuda oommeetri.

### 76. Mõõteriistad

Autor: Koit Timpmann, lõppvoor, 2006, G 1

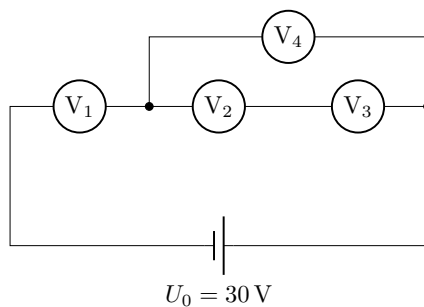
Vooluringis on ampermeeter ja voltmeeter ühendatud jadamisi. Klemmidele on rakendatud pinge  $U = 9\text{ V}$ . Kui voltmeeditriga ühendada rööbiti takisti  $R$ , väheneb voltmeeditri näit kaks korda, ampermeeditri näit aga suureneb kaks korda. Kui suurt pinget näitas voltmeeter enne ja pärast takisti ühendamist?



**77. Voltmeetrid**

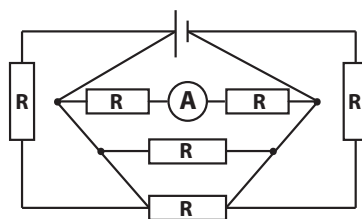
Autor: Eero Vaher, piirkonnavor, 2016, G 1

Elektriskeemis on pingevalik pingega  $U_0 = 30\text{ V}$  ning neli ühesugust voltmeetrit. Kui suur on iga voltmeetri näit?

**78. Voltmeeter**

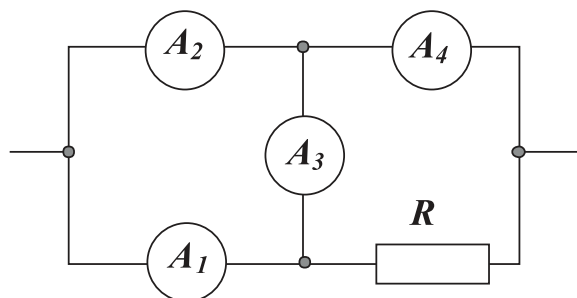
Autor: Erkki Tempel, piirkonnavor, 2017, G 1

Joonisel näidatud elektriskeemis on ideaalne ampermeeter, mis näitab voolutugevust  $I$ . Ampermeeter asendatakse ideaalse voltmeetriga. Kui suur on voltmeetri näit? Kõikide takistite takistus on  $R$ .

**79. Ampermeetrid**

Autor: Tundmatu autor, lahtine, 2008, G 4

Vooluahelasse on ühendatud neli ühesugust ampermeetrit, igaüks sisetakistusega  $r$ , ja takisti  $R$ . Esimese kahe ampermeetri näidud on  $I_1 = 3\text{ A}$  ja  $I_2 = 5\text{ A}$ . Leida takistuste suhte  $R/r$  arvuline väärtus.

**80. Elektriskeem**

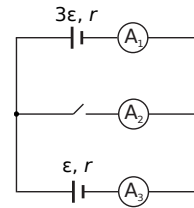
Autor: Oleg Koik, piirkonnavor, 2013, G 5

Joonisel toodud skeemil on ampermeetrid ideaalsed; patareide elektromotoorjõud ja sisetakistused on märgitud nende juurde. Leidke ampermeetrite näidud, kui

a) lüliti on suletud;

b) lüliti on lahti.

*Märkus.* praktikas tohib sellist skeemi kasutada vaid siis, kui olakse veendunud, et tekkivad voolud jäävad ampermeetrite mõõtepiirkonda!

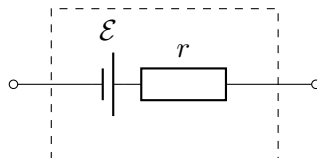


#### 4.2.5 Patarei ja konstantse voolu allikas

*Märksõnad:* Patarei, konstantse voolu allikas.

Potentsiaalide erinevust kutsuvad esile mitte-elektrostaatilised ehk kõrvaljõud, näiteks keemilised reaktsioonid vooluallikas. Maksimaalset potentsiaalide erinevust, mida kõrvaljõud suudavad esile kutsuda, nimetatakse vastava seadme elektromotoorjõuks. Seega elektromotoorjõudu  $\mathcal{E}$  omava vooluallika läbimisel laengu  $q$  potentsiaalne energia kasvab  $\mathcal{E}q$  võrra, läbides aga elektrijuhis (näiteks takistis) pinget  $U$ , potentsiaalne energia kahaneb  $Uq$  võrra. Laetava vooluallika (akumulaatori) puhul on mõeldav ka voolu läbijuhimine vastassuunas, nii et tehtud töö  $\mathcal{E}q$  arvelt taastub keemiline energia vooluallika sees.

Lihtsaimaks elektromotoorjõu allikaks on patarei (vt joonist 10). Reaalsel patareil on lisaks potentsiaali muutvale elektromotoorjõulde  $\mathcal{E}$  ka sisetakistus  $r$  kuna seda läbiv elektrilaeng peab läbima mingit keskkonda. Ideaalsel patareil sisetakistus puudub ( $r = 0$ ). Enamasti skeemis patarei tingmärki kasutades mõeldakse ideaalset patareid, kuid mõnikord tuleb ka arvestada sisemise takistusega (mida pole eraldi tingmärgiga välja toodud).



Joonis 10: Patarei skeem.

### 81. Fotograaf

Autor: Jaan Kalda, lõppvoor, 2011, G 6

Fotograaf pildistas kõrgest joast langevat veevoolu; päikesevalguses sätendavad veepiisad venisid pildidel vertikaalseteks triipudeks. Kui fotoaparaat oli pildistamisel normaalasendis, siis olid kõik triibud pikkusega  $l_1 = 120$  pikslit; kui fotoaparaat oli pildistamisel “jalad ülespidi” (st seda pöörati ümber optilise telje 180 kraadi), siis oli triipude pikkuseks  $l_2 = 200$  pikslit. Kui pikad olid triibud siis, kui fotoaparaati hoiti pildistamisel “portree asendis” (st seda pöörati ümber optilise telje 90 kraadi)? Eeldada, et säriaeg ja optilise telje suund oli kõigil juhtudel üks ja sama. Kui toodud andmete põhjal pole vastus üheselt leitav, siis andke kõik võimalikud vastused.

*Vihje.* Fotoaparaadi põhikomponendid on objektivi (lääts) ja katik, millest esimene tekitab digitaalsensori (või filmi) tasandile pildistatavate esemete kujutise. “Puhkeasendis” ei lange see kujutis siiski sensorile, sest katik varjab läbi objektiivi tulnud

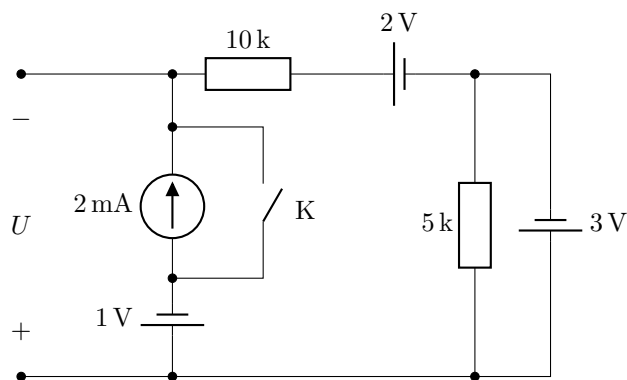


valguse ära. Päästikule vajutamisel avaneb katik lühikeseks ajavahemikuks (säriaajaks): objektide kujutis langeb nüüd tõesti sensorile ning sensori iga piksel mõõdab ära kogu selle aja vältel langeva valgusenergia. Harilikult kujutab katik endast kahte “kardinat”, mis paiknevad vahetult sensori ees ja katavad selle. Alguses varjab sensorit esimene kardin, mille ülemine serv liigub päästikule vajutamisel konstantse kiirusega  $v$  ülevalt alla, avades sensori. Säriaaja lõpetab teine kardin, mille alumine serv liigub samuti ülevalt alla, samasuguse kiirusega  $v$  nagu esimenegi. Kui säriaeg on hästi lühike, siis ei jõua sensor täielikult avaneda: mõlemad kardinad liiguvad koos ülevalt alla ning sensor on avatud objektiivist tulevale valgusele vaid kardinete vahelise kitsa horisontaalse riba ulatuses (kusjuures see valgusele avatud riba liigub kiirusega  $v$  ülevalt alla).

## 82. Vooluallikad

Autor: Sandra Schumann, lõppvoor, 2016, G 7

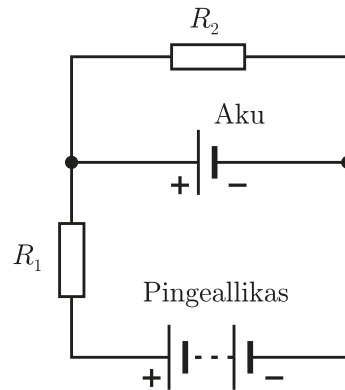
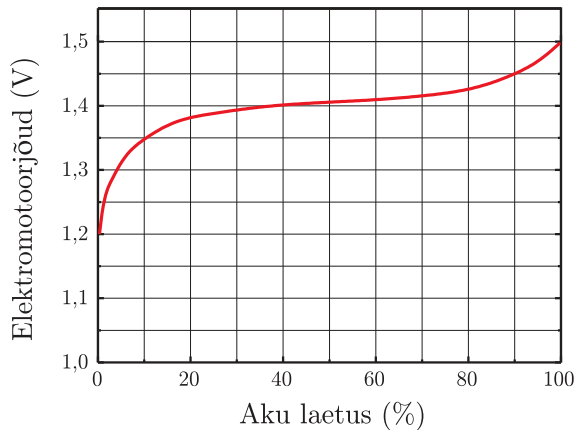
Vaatleme joonisel näidatud elektriskeemi, kus noolega tähistatud skeemielement on konstantse voolu allikas voolutugevusega  $I = 2 \text{ mA}$  noolega tähistatud suunas. Leidke pinge  $U$  väljundklemmidel ja voolutugevus läbi takisti  $R = 10 \text{ k}\Omega$  kahe juhu jaoks: **a)** kui lüliti  $K$  on suletud ja **b)** kui lüliti on avatud.



### 83. Aku laadimine

Autor: Valter Kiisk, piirkonnavor, 2008, G 8

Teatava akumulaatori elektromotoorjõud kasvab laadimise käigus nõnda, nagu kujutatud joonisel. Samas on toodud ka elektriskeem, mida Juku kavatseb kasutada sellise akumulaatori laadimiseks. Pingeallika klemmidel on pinge 6 V. Nii pingeaallika kui ka aku sisetakistust võib lugeda tühiseks. Kuidas peaks Juku valima takistite  $R_1$  ja  $R_2$  väärtused, kui ta taotleb, et maksimaalne laadimisvool ei ületaks 100 mA ja laadimisvool muutuks nulliks, kui akumulaator on täielikult laetud?



### 4.2.6 Lambipirnid

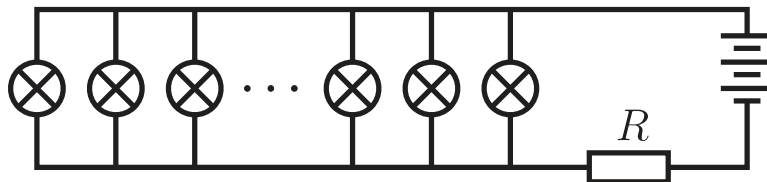
Märksõnad: Lambipirnid, nimivõimsus ja nimipinge.

### 84. Elektriküünlad

Autor: Valter Kiisk, piirkonnavor, 2009, G 4

Jõulukaunistuse valmistamiseks otsis Juku välja 10 taskulambipirni (nimipinge 3 V, võimsus 0,6 W) ja alaldi klemmipingega 5 V. Seejärel koostas ta skeemi, mis on kujutatud joonisel.

- Kui suur peab olema takisti  $R$  takistus, et pinge lampidel ei ületaks nimipinget?
- Skeemi sisselülitamisel avastas Juku, et lambid põlevad oodatust tuhmimalt. Selgus, et alaldi klemmipinge oli koormusega langenud 4 V-ni ning pinge lampidel 2,3 V-ni. Kui suur tuleks valida takisti  $R$  väärtus, et lambid põleksid normaalse heledusega?



### 85. Lambid

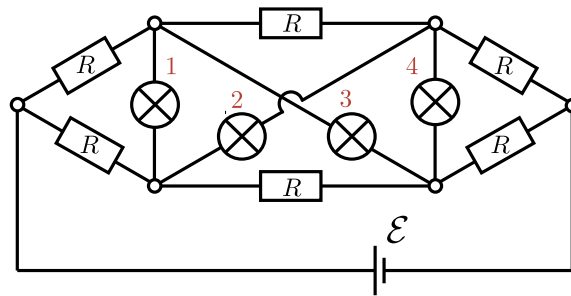
Autor: Mihkel Kree, piirkonnavor, 2015, G 2

Pingeallikaga on rööbiti ühendatud kaks lampi, kusjuures üks lampidest põleb  $k$  korda suurema võimsusega kui teine. Seejärel ühendatakse need lambid sama pingeaallikaga jadamisi. Mitu korda muutub lampidel eralduv koguvõimsus? Kas see muutub suuremaks või väiksemaks?

**86. Lambid**

Autor: Mihkel Kree, lahtine, 2013, G 9

Juku ehitas kodus niisuguse elektriskeemi nagu joonisel näidatud, kasutades selleks kuut ühesugust takistit takistusega  $R = 10 \Omega$ , nelja ühesugust lampi takistusega  $r = 20 \Omega$  ning pingeaallikat elektromotoorjõuga  $\mathcal{E} = 5 \text{ V}$ . Arvutage igas lambis (joonisel tähised 1, 2, 3, 4) eralduv võimsus. Pingeaallika sisetakistusega mitte arvestada.

**87. 12 lampi**

Autor: Valter Kiisk, piirkonnavor, 2018, G 8

Juku käsutuses on 12 ühesugust taskulampipirni ning patareid, mille klemmpinge on täpselt 5 korda suurem pirni nimipingest. Lisaks leidis ta juhtumisi takisti, mille takistus on parajasti pool lampi hõõgniidi takistusest tööreimise (viimase sai ta teada jagades lampi soklile kirjutatud nimipinge ja -voolu omavahel).

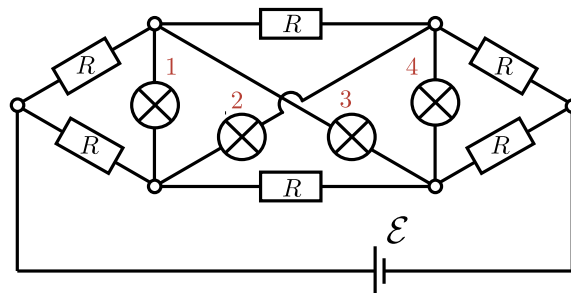
a) Kuidas tuleb ühendada nimetatud komponendid elektriahesse, et kõik 12 pirni põleksid normaalheledusega?

b) Mitu korda kasvab (või kahaneb) lampide koguvõimsus, kui üks lampidest läbi põleb? Lampide takistuse sõltuvust temperatuurist võib jätta arvestamata.

**88. Lambid**

Autor: Mihkel Kree, lahtine, 2013, G 9

Juku ehitas kodus niisuguse elektriskeemi nagu joonisel näidatud, kasutades selleks kuut ühesugust takistit takistusega  $R = 10 \Omega$ , nelja ühesugust lampi takistusega  $r = 20 \Omega$  ning pingeaallikat elektromotoorjõuga  $\mathcal{E} = 5 \text{ V}$ . Arvutage igas lambis (joonisel tähised 1, 2, 3, 4) eralduv võimsus. Pingeaallika sisetakistusega mitte arvestada.



#### 4.2.7 Kirchhoffi seadused

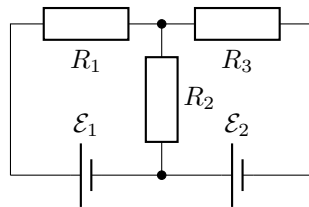
*Märksõnad: Kirchhoffi voolu ja pingeseadused.*

Alalisvooluahelate lahendamine põhineb suuresti Kirchhoffi seadustel:

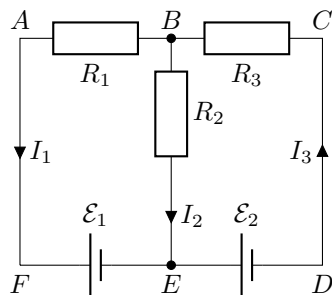
- **Kirchhoffi vooluseadus:** vooluahela sõlmpunkti suunduvate voolude summa on võrdne sellest sõlmpunktist väljuvate voolude summaga.
- **Kirchhoffi pingeseadus:** piki vooluahela suletud kontuuri on vooluahela elementide (takistite, diodide, kondensaatrite jne) pingete summa võrdne (patareide ja induktorite) elektromotoorjõudude summaga.

Kirchhoffi I seadus tuleneb sellest, et sõlmpunkti ei saa koguneda laengut. Kirchhoffi II seadus tuleneb sellest, et kui laeng liigub mööda suletud kontuuri ja jõuab liikumise algpunkti tagasi, siis tema potentsiaal peab olema võrdne esialgse potentsiaaliga. Kui on teada kõik takistused ja patareide pinged ning voolutugevused on tundmatud, siis Kirchhoffi ja Ohmi seadused moodustavad lineaarvõrrandite süsteemi, mida saab alati üheselt lahendada. See tähendab, et saab alati üheselt leida kõik voolutugevused ja pinged. Seda fakti saab ka teispidi kasutada: pakkudes millised on voolutugevused piisab näitamast, et Kirchhoffi seadused kehtivad, süsteemselt nende lahendamine pole vajalik. Pannes kirja Kirchhoffi seadused kõigi sõlmpunktide ja kontuuride jaoks saab enamasti rohkem võrrandeid kui on tundmatuid, sellisel juhul peavad osad võrrandid olema sõltuvad. Kui võrrandisüsteemi lahendades jääb alles mitu tundmatut, siis on jäänud mõni sõltumatu võrrand kirja panemata.

**Näide.** Koostage joonisel oleva ahela jaoks lineaarvõrrandite süsteem Kirchhoffi seaduste põhjal, millest saab avaldada kõik ahelas olevad voolud ja pinged.



**Lahendus.** Tähistame elektriahelas olevad voolud ning fikseerime nende suuna (kui voolu suund on tegelikult teistpidine, siis saame negatiivse voolu).



Nii sõlmpunkti  $B$  kui  $E$  jaoks on Kirchoffi I seadus sama:

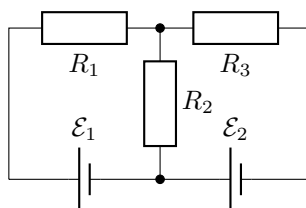
$$\begin{aligned} I_1 + I_2 - I_3 &= 0, & (\text{sõlmpunktid } B \text{ ja } E) \\ \mathcal{E}_1 + I_1 R_1 - I_2 R_2 &= 0, & (\text{kontuur } ABEF) \\ \mathcal{E}_2 + I_2 R_2 + I_3 R_3 &= 0, & (\text{kontuur } BCDE) \\ \mathcal{E}_1 + I_1 R_1 + I_3 R_3 + \mathcal{E}_2 &= 0. & (\text{kontuur } ABCDEF) \end{aligned}$$

Kuna kontuur  $ABCDEF$  on sisuliselt kontuuride  $ABEF$  ja  $BCDE$  superpositsioon, siis pole see sõltumatu ning avaldub teiste võrrandite summana.

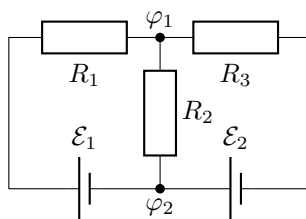
Kirchoffi seaduste põhjal on alati võimalik leida otsitavad suurused, kuid lineaarvõrrandite süsteemi lahendamine võib olla tülikas. Lahendamise lihtsustamiseks on võimalik kasutada erinevaid meetodeid:

- **Potentsiaalide meetod:** Vaatleme vooluringi sõlmede potentsiaale (mingi vabalt valitava sõlme suhtes) kui otsitavaid tundmatuid suurusi. Sellega on Kirchoffi II seadus automaatselt täidetud. Nüüd saame iga sõlme jaoks üles kirjutada Kirchoffi I seaduse, arvutades pinged harudes kui naabersõlmede potentsiaalide vahed.

**Näide.** Koostage joonise oleva ahela jaoks lineaarvõrrandite süsteem potentsiaalide meetodi põhjal, millest saab avaldada kõik ahelas olevad voolud ja pinged.



**Lahendus.** Määrame kõigile sõlmpunktile potentsiaalid. Võime võtta kõik potentsiaalid alumise sõlmpunkti suhtes ehk võtta  $\varphi_2 = 0$ . Natuke üldisemalt aru saamiseks jätame praegu sisse siiski mõlemad potentsiaalid mingi suvalise punkti suhtes.



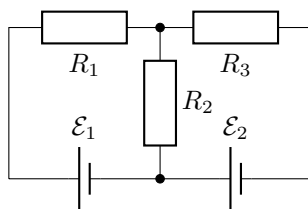
Nüüd saame panna kirja Kirchoffi I seaduse:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\varphi_1 - \varphi_2 + \mathcal{E}_1}{R_1} + \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{R_2} + \frac{\varphi_1 - \varphi_2 - \mathcal{E}_2}{R_3} \\ \implies 0 &= (\varphi_1 - \varphi_2)(R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3) + \mathcal{E}_1 R_2 R_3 - \mathcal{E}_2 R_1 R_2 \\ \implies \varphi_1 - \varphi_2 &= \frac{\mathcal{E}_2 R_1 R_2 - \mathcal{E}_1 R_2 R_3}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}. \end{aligned}$$

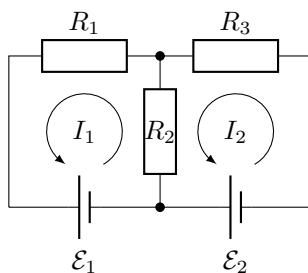
Nüüd teades potentsiaale on lihtne avaldada mistahes voole.

- **Kontuurvoolude meetod:** Selle meetodi puhul võetakse otsitavateks suurusteks kontuurvoolud, st tegelikke voolusid vooluringi harudes, mis on ühised kahele või enamale kontuurile, vaadeldakse kui vastavate kontuurvoolude algebralisi summasid (iga kontuuri jaoks tuleb postuleerida voolu ümberkäigu suund). Sel viisil on Kirchoffi I seadus automaatselt täidetud. Nüüd saame vooluringi kõikide sõltumatute kontuuride jaoks kirja panna Kirchoffi II seaduse.

**Näide.** Koostage joonise oleva ahela jaoks lineaarvõrrandite süsteem kontuurvoolude meetodi põhjal, millest saab avaldada kõik ahelas olevad voolud ja pinged.



**Lahendus.** Määrame igale sisemisele kontuurile voolud (vt joonist). Tegelikult saab vaadata ka kontuurvoolu, mis ümbritseb kogu skeemi, aga see ei anna uut sõltumatut võrrandit (võttes ühe sisemise ja välimise kontuuri, saame samuti kaks sõltumatut võrrandit nagu praegu).



Nüüd saame kirja Kirchoffi II seaduse:

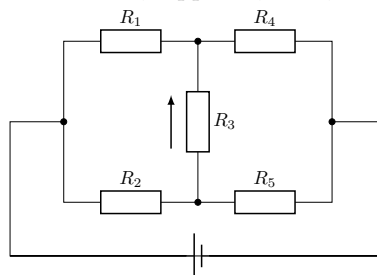
$$\begin{aligned} \mathcal{E}_1 + I_1 R_1 + (I_1 - I_2) R_2 &= 0, \\ \mathcal{E}_2 + (I_1 - I_2) R_2 + I_2 R_3 &= 0. \end{aligned}$$

Siit saame lihtsalt avaldada mõlemad kontuurvoolud ja seeläbi leida voolud.

### 89. Takistuste tuvastamine

Autor: Eero Vaher, lõppvoor, 2018, G 7

Vooluallikaga on ühendatud viis takistit. Neist kolme takistus on  $1 \Omega$ , ülejäänud kaks on tundmatu, kuid ühesuguse takistusega. Vooluallika pinge  $U_0 = 14 \text{ V}$  ning voolutugevus selles  $I_0 = 10 \text{ A}$ . Pinge ja voolutugevus kolmandal takistil on vastavalt  $U_3 = 2 \text{ V}$  ning  $I_3 = 2 \text{ A}$ . Joonisel on märgitud elektrivoolu suund takistis  $R_3$ . Määrake kõigi takistite takistused.



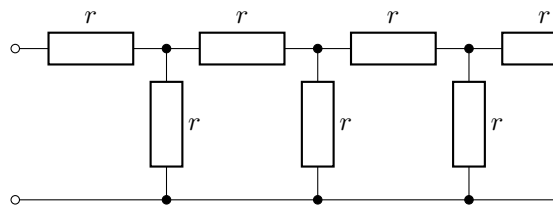
$$U_0 = 14 \text{ V}, I_0 = 10 \text{ A}$$

#### 4.2.8 Skeemide lihtsustamine ja ekvivalentskeemide koostamine

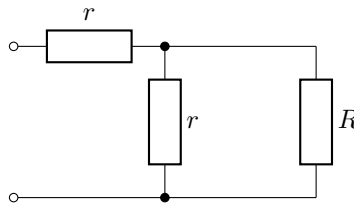
*Märksõnad: Skeemide lihtsustamine ja ekvivalentskeemide koostamine: sümmeetria, ekvipotentsiaalsed punktid ja lõputud ahelad.*

Mõnikord esinevad olümpiaadidel lõputud elektriahelad. Nendes ahelates on lõputult palju elemente, selle tõttu pole võimalik Kirchoffi seadustega selliseid ülesandeid lahendada. Enamasti on võimalik ära kasutada ahelas olevat sümmeetriat ning koostada lihtsam ekvivalentskeem.

**Näide.** Leidke joonisel oleva lõputu ahela klemmide vaheline takistus.



**Lahendus.** Olgu kogu ahela takistus  $R$ . Siis on järgnev skeem algse ahela ekvivalentskeem.



Selle skeemi põhjal saame, et

$$R = r + \frac{rR}{r + R} \implies R^2 - rR - r^2 = 0 \implies R = r \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

#### 90. Tetraeeder

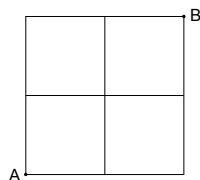
Autor: Eero Vaher, lahtine, 2014, G 4

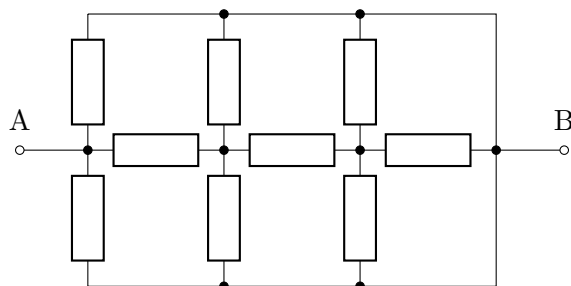
Tetraeedri (neljast võrdkülgsest kolmnurgast koosneva püramiidi) servadeks on ühesugused takistid takistusega  $R$ . Leidke tetraeedri kahe tipu vaheline takistus.

#### 91. Ruudustik

Autor: Taavi Pungas, lõppvoor, 2014, G 1

Traadist on valmistatud  $2 \times 2$  ruudustik (vt joonist), iga väikese ruudu külje takistus on  $r = 1 \Omega$ . Leidke punktide A ja B vaheline takistus.





**92. Takistid**

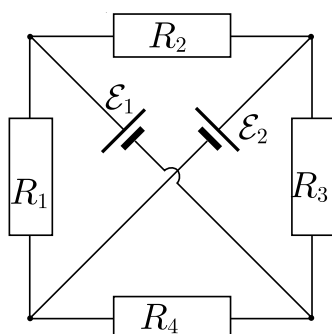
Autor: Hans Daniel Kaimre, lahtine, 2015, G 2

Leidke ühesugustest takistitest koosneva ahela kogutakistus  $R_{AB}$ . Iga takisti takistus on  $R$ .

**93. Elektriline sild**

Autor: Jaan Kalda, lõppvoor, 2012, G 3

Joonisel toodud skeemis on tegemist ühesuguste takistitega takistustega  $R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = R$  ning ühesuguste ideaalsete patareidega elektromotoorjõududega  $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_2 = \mathcal{E}$ . Leidke voolutugevused takistites (st  $I_1, I_2, I_3$  ja  $I_4$  avaldised suuruste  $R$  ja  $\mathcal{E}$  kaudu).



**94. Must kast**

Autor: Jaan Kalda, lõppvoor, 2015, G 4

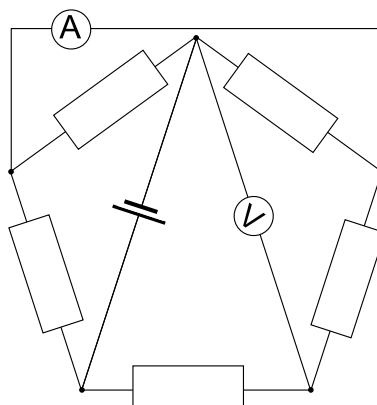
Mustas kastis on kolmest takistist ja ideaalsest ampermeetrist koosnev skeem. Lisaks on mustal kastil kolm väljundklemmi  $A, B$  ja  $C$ . Kui rakendada pinge  $U = 12\text{ V}$  klemmide  $A$  ja  $B$  vahele, siis on ampermeetri näit  $I_{AB} = 2\text{ A}$ . Klemmide  $A$  ja  $C$  puhul on lugem  $I_{AC} = 4\text{ A}$  ning klemmide  $B$  ja  $C$  puhul  $I_{BC} = 6\text{ A}$ . Joonistage mustas kastis olev skeem ning märkige sellele takistite takistused.

**95. Viisnurk**

Autor: Jaan Kalda, lõppvoor, 2017, G 6

Leidke joonisel toodud skeemis ampermeetri ja voltmeetri näidud. Kõik takistid on takistusega  $R = 1\ \Omega$ , pinge patarei klemmidel  $U = 7\text{ V}$ .





**96. Silinder külmkapis**

Autor: Rasmus Kisel, piirkonnavoor, 2017, G 6

Suletud silindris sisemise raadiusega  $R$  ja sisemise kõrgusega  $h$  on vedelik, mis võtab enda alla teatud osa  $k$  silindri siseruumalast. Silinder on algselt toatemperatuuril  $T_1$ . Silinder asetatakse sügavkülmikusse, kus on konstantne temperatuur  $T_2$ , mis on madalam silindris oleva aine sulamistemperatuurist. Teada on, et silindris oleva aine tihedus on vedelas olekus  $\rho_0$  ja tahkes olekus  $\lambda\rho_0$ . Leidke, mitu korda suureneb silindris oleva õhu rõhk võrreldes esialgsesega pärast vedeliku tahkumist. Eeldage, et vedeliku tahkumisel silindri mõõtmed ei muutu.

**97. Liivakell**

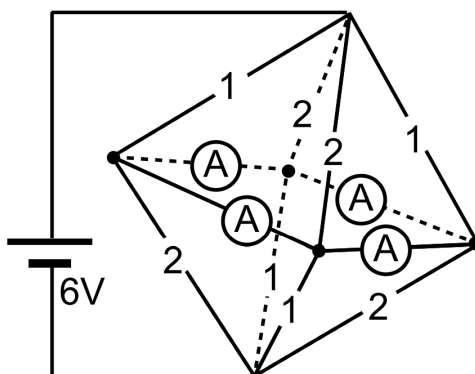
Autor: Roland Matt, lõppvoor, 2012, G 8

Uurime liivakella mudelit. Liivakell koosneb silindrilisest torust pikkusega  $L$ , mis on keskelt eraldatud ühtlaselt aukudega läbistatud plaadiga, millest liiv saab läbi voolata. Heas lähenduses ei sõltu liiva aukude läbimise massikiirus  $w$  ülemises anumast olevast liivahulgast. Liivakell asetatakse kaalule tööreiimis (kui liiv voolab) ja siis, kui kogu liiv on alla voolanud. Milline on kaalunäitude vahe? Liiva tihedus on  $\rho$  ja liivakella ristlõikepindala on  $S$ . Eeldage, et hetkel kukkuvat liiva mass on tühine võrreldes liiva kogumassiga.

**98. Oktaeeder**

Autor: Jaan Kalda, lahtine, 2016, G 8

Juuresolev skeem kujutab traadist oktaeedrit, iga traadi juurde on kirjutatud selle takistus oomides. Ampermeetrid ühendavad traadid on tühiselt väikese takistusega. Leidke ampermeetrite näidud.



## 4.2.9 Vooluelementide võimsus

*Märksõnad: Vooluelementide võimsus (Joule'i-Lenzi seadus).*

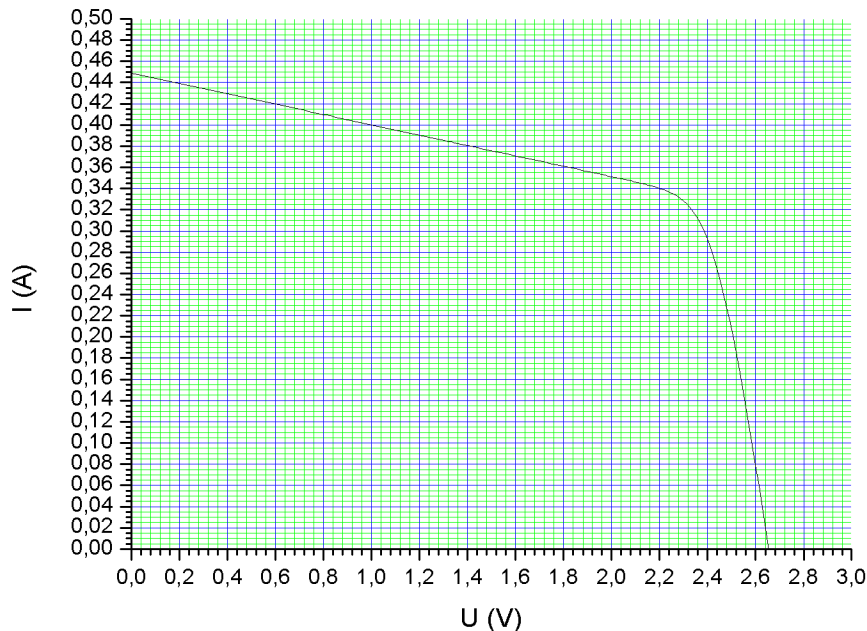
Kui takistit takistusega  $R$  läbib vool  $I$ , siis temas eraldub soojusenergia. Laengu  $q$  läbi takisti viimiseks tuleb teha töö  $q \cdot IR$ . Kuna  $I = q/t$ , siis on ajas eralduv võimsus takistis  $P = I^2 R$ . Kasutades Ohmi seadust näeme, et takistil eralduv võimsus on alternatiivselt kirja pandav kui

$$P = I^2 R = UI = \frac{U^2}{R}.$$

### 99. Päikesepaneel

Autor: Mihkel Pajusalu, lõppvoor, 2010, G 3

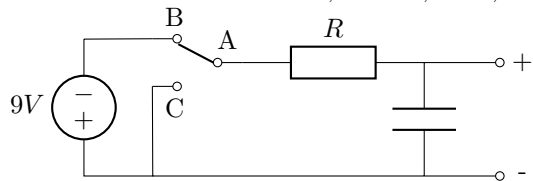
Joonisel on kujutatud päikesepaneeli läbiva voolu sõltuvus klemmpingest. Määrake paneeli klemmidega ühendatud koormise takistus, mille korral on koormisel eralduv võimsus maksimaalne.



### 100. Elektroonikaseem

Autor: Sandra Schumann, lahtine, 2017, G 4

Joonisel on antud teatud elektroonikaseadme ühe osa skeem, mis koosneb 9 V vooluallikast, takistist ja kondensaatorist koosnevast filtrist, väljundklemmidest ja lülitist. Lüliti kaks võimalikku asendit on “sees” (ühendatud on A ja B) ning “väljas” (ühendatud on A ja C). Antud olukorras ei ole väljundklemmide külge midagi ühendatud.



Kui toodud skeemis viia lüliti asendist “sees” asendisse “väljas” (st lülitada seade välja) ja muuta seejärel vooluallika polaarsus vastupidiseks, siis töötab elektroonikaseade pärast sisselülitamist endiselt. Kui aga vooluallika polaarsust muuta ilma seadet välja lülitamata, siis põleb takisti  $R$  läbi. Eeldusel, et takisti põleb läbi niipea, kui sellel eralduv võimsus ületab  $0,25\text{ W}$ , leia  $R$  minimaalne ja maksimaalne võimalik väärtus.

#### 4.2.10 Kondensaator ja induktiivpool

*Märksõnad: Kondensaator ja induktiivpool. Induktiivpooli ja kondensaatori käitumine lühikese ja pika aja möödudes. Kondensaatori ja induktiivpooli energia.*

Kondensaator on element, mis koosneb kahest juhtivast väikse vahega plaadis. Nendel plaatidel on võrdne kuid vastasmärgiga laeng, süsteem tervenisti on elektriliselt neutraalne. Laengud tekitavad plaatide vahele elektrivälja ning seega ka pinget. Enamasti on see pinge võrdeline laenguga, edaspidi vaatamegi ainult selliseid kondensaatoreid. Laengu ja pinget vahelise lineaarse seose võrdetegurit kutsutakse kondensaatori mahtuvuseks  $C$ :

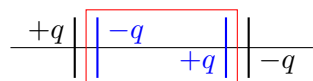
$$q = CU,$$

kus  $q$  on laeng kondensaatori plaatidel (ühel plaadil  $+q$  ja teisel  $-q$ ) ning  $U$  on pinge kondensaatori plaatide vahel. Kui pole öeldud teistmoodi, võib eeldada, et mahtuvus ei sõltu kondensaatori pingest. Kuna kondensaatori on elektriliselt neutraalne, kehtivad Kirchoffi seadused ka kondensaatori jaoks: ühele plaadile lisandunud laeng on võrdne teiselt plaadilt eemalduva laenguga.

Kuna kondensaatori lehed pole omavahel ühendatud ning kondensaator on elektriliselt neutraalne, siis mitme kondensaatori ühendamisel võivad tekkida isoleeritud piirkonnad, kus laengute summa on jääv (vt joonist 11). Enamasti ühendatakse kondensaatori siis, kui neil pole laengut. Sellisel juhul on

$$\sum_i q_i = 0,$$

kus  $q_i$  on isoleeritud piirkonnas kondensaatori plaatidel olevad laengud.



Joonis 11: Isoleeritud piirkond kahe kondensaatori jadaühenduses.

Vaadates kondensaatori laadimiseks kuluvat energiat saab näidata, et kondensaatoris salvestub energia  $CU^2/2$ . Sarnaselt vaadates induktoris voolu suurenemist, saab näidata, et seal salvestud energia  $LI^2/2$ .

Kui elektriabelas ei toimu võnkumist (või on see sumbu), siis pika aja möödudes saabub tasakaal (voolutugevus ei muutu). Kuna voolutugevus on konstantne, siis induktiivpool ei tekitab pinget, seega võib induktiivpoolid asendada juhtmetega. Kondensaatorid ei saa konstantne vool läbida tasakaaluoleksu, seega ei läbi kondensaatorid üldse vool ning nad saab elektriabelast eemaldada.

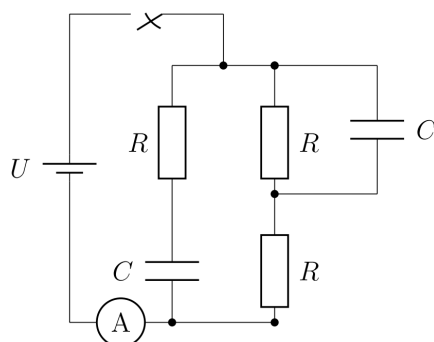
Kui elektriabelas on tasakaal ja seal tehakse mingi muutus, siis on võimalik leida voolutugevused vahetult pärast muutust. Sellisel juhul püsib laeng kondensaatoris

ja voolutugevus induktoris ligikaudu konstantsena. Kui kondensaator polnud algselt laetud, siis püsib selle pinge nullina, seega saab kondensaatori asendada juhtmega. Kui kondensaatoril oli aga algselt laeng  $q$ , siis tal oli ka pinge  $U = q/C$ . Kuna laeng ei muutu, siis ka pinge ei muutu ning kondensaatori saab asendada patareiga, mille elektromotoorjõud on  $\mathcal{E} = U$ . Kui induktoris algselt voolu pole, siis ka vahtelt pärast muutust pole seal voolu ning induktori saab elektriahelast eemaldada. Kui aga alguses on induktoris vool  $I$ , siis jääb see ka kontantsega (vastasel juhul tekiks väga suur pinge  $L \frac{dI}{dt}$ , seega tuleb induktor asendada püsivooluallikaga, mille voolutugevus on  $I$ ).

### 101. Elektriskeem

Autor: Kristian Kuppert, lahtine, 2016, G 3

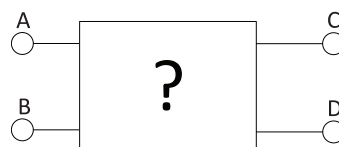
Leidke juuresoleval skeemil voolutugevus  $I$  läbi ampermeetri kahel juhul: vahetult pärast lüliti sulgemist ja pika aja möödumisel. Eeldada, et kondensaatorid on enne lüliti sulgemist laadimata. Patarei lugeda ideaalseks.



### 102. Must kast

Autor: Kristian Kuppert, lõppvoor, 2013, G 4

Joonisel näidatud musta kasti kõik klemmid ühendatakse korraks kokku. Seejärel, kui klemmide A ja B külge ühendada patarei pingega  $U$  ja klemmide C ja D külge voltmeeter, on voltmeetri näit alghetkel  $U$ . Mõõtmise järel ühendatakse kõik klemmid veel korraks kokku. Kui ühendada sama patarei klemmide C ja D külge ning voltmeeter klemmide A ja B külge, on voltmeetri näit alghetkel  $\frac{U}{2}$ . Teades, et mustas kastis on ainult identsed kondensaatorid, joonistage musta kasti skeem.



### 103. Elektriahela energia

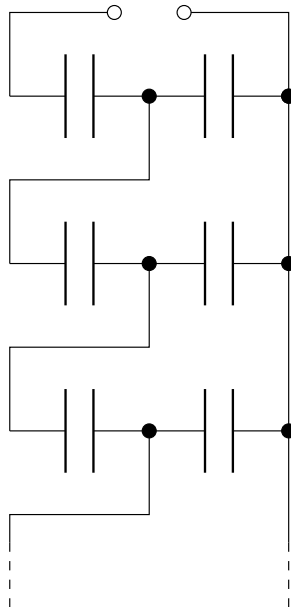
Autor: Eero Vaher, piirkonnavor, 2014, G 8

Suletud elektriahelas on jadamisi ühendatud takisti takistusega  $R = 100 \Omega$ , kondensaator mahtuvusega  $C = 200 \text{ nF}$ , tühise aktiivtakistusega induktiivpool induktiivsusega  $L = 10 \text{ mH}$  ning sobivalt ühendatud ideaalsed mõteseadmed. Hetkel  $t_0$  mõõdeti voolutugevuseks läbi kondensaatori  $I = 300 \text{ mA}$  ning pingeks poolil  $U = 50 \text{ V}$ . Teada on, et mõõtmise hetkel on vool poolis suunatud kõrgema potentsiaaliga piirkonnast madalama potentsiaaliga piirkonda. Kas mõõtmise hetkel  $t_0$  oli rohkem energiat poolil või kondensaatoril?

**104. Kondensaatoriredel**

Autor: Siim Ainsaar, piirkonnavor, 2007, G 8

Ühesugustest kondensaatoritest mahtvusega  $C$  on koostatud joonisel näidatud lõpmatu ahel. Leidke ahela kogumahtvus  $C_k$ .

**105. Kondensaator**

Autor: Aigar Vaigu, piirkonnavor, 2010, G 7

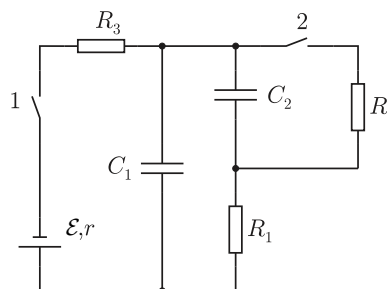
Muudetava mahtvusega kondensaator on ühendatud patareiga, mille klemmide pinge on  $U$ . Kondensaatori mahtvust muudetakse laadimisel nii, et kondensaatori laadimise vool  $I$  on konstantne. Leidke patarei võimsus ja kondensaatori laadimisel energia salvestamise kiirus. Põhjendage võimalikku erinevust.

**106. Kondensaatorid**

Autor: Mihkel Rähn, piirkonnavor, 2006, G 7

Joonisel toodud elektriskeemil on vooluallikas elektromotoorjõuga  $\mathcal{E}$  ja sisetakistusega  $r$ , kolm takistit takistustega  $R_1 = R_2 = R_3 = R$  ning kondensaatorid mahtvustega  $C_1$  ja  $C_2$ . Arvutage, kui suured on elektrilaengud kondensaatoritel pärast pika aja möödumist, kui:

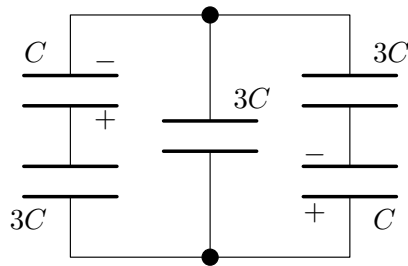
- lüliti 1 on suletud, lüliti 2 on avatud;
- mõlemad lülitid on suletud;
- eelmisest seisust avatakse mõlemad lülitid üheaegselt.



**107. Kondensaatorid**

Autor: Mihkel Kree, lõppvoor, 2009, G 3

Koosnegu kondensaatorite süsteem viiest kondensaatorist. Alghetkel on kolm neist laenguta ning kahel paikneb laeng  $q$  (vt joonist). Missugune laeng koguneb keskmisele kondensaatorile, kui süsteem on jõudnud tasakaaluolekusse?

**108. Elektrienergia**

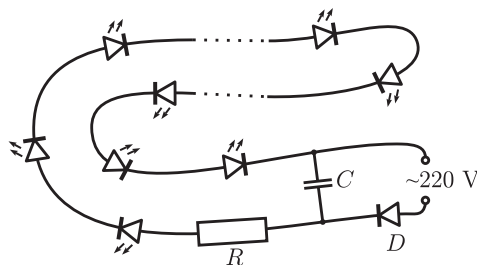
Autor: Eero Vaher, piirkonnavor, 2014, G 8

Suletud elektri ahelas on jadamisi ühendatud takisti takistusega  $R = 100 \Omega$ , kondensaator mahtuvusega  $C = 200 \text{ nF}$ , tühise aktiivtakistusega induktiivpool induktiivsusega  $L = 10 \text{ mH}$  ning sobivalt ühendatud ideaalsed mõõteseadmed. Hetkel  $t_0$  mõõdeti voolutugevuseks läbi kondensaatori  $I = 300 \text{ mA}$  ning pingeks poolil  $U = 50 \text{ V}$ . Teada on, et mõõtmise hetkel on vool poolis suunatud kõrgema potentsiaaliga piirkonnast madalama potentsiaaliga piirkonda. Kas mõõtmise hetkel  $t_0$  oli rohkem energiat poolil või kondensaatoril?

**109. Jõulukaunistus**

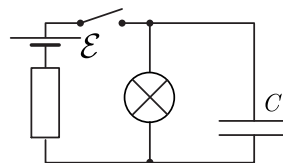
Autor: Valter Kiisk, lõppvoor, 2010, G 8

Jõulukaunistuse hankimiseks majandussurutise tingimustes otsustas Juku ühendada jadamisi kokku 50 valgusdiodi ja toita seda ahelat läbi alaldusdiodi  $D$  otse võrgupingega (vt joonist). Voolu piiramiseks on ahelasse lülitatud takisti ning voolu pulsatsiooni väljasilumiseks kondensaator. Pinge alaldusdiodil on tühine, igal valgusdiodil aga  $U_d = 3 \text{ V}$ . Kui suure takistusega  $R$  ja maksimumvõimsusega  $N$  tuleks valida takisti, kui valgusdiodid taluvad voolu kuni  $I = 20 \text{ mA}$ ? Kui suure mahtuvusega  $C$  kondensaator kindlustab, et voolutugevuse pulsatsioon jääb  $\alpha = 5\%$  piiresse? Võrgupinge sagedus on  $f = 50 \text{ Hz}$  ning amplituudväärtus  $U_0 = 311 \text{ V}$ .

**110. Kondensaator**

Autor: Jaan Kalda, lõppvoor, 2018, G 9

Vaatleme joonisel kujutatud elektriskeemi, mis koosneb kondensaatorist mahtuvusega  $C$ , patareist elektromotoorjõuga  $\mathcal{E}$ , takistist ja hõõglambist, mida võib lugeda mittelineaarseks takistikks (pinge sõltub voolust mittelineaarselt). Algselt oli kondensaator laenguta ja lüliti oli avatud. Seejärel suleti lüliti lühikeseks ajaks, misjärel see avati uuesti ning hoiti lahtisena seni, kuni kondensaator oli täielikult tühjenenud. Selle aja jooksul, mil lüliti oli suletud, eraldus kogu skeemil soojushulk  $Q_1$ ; lüliti avamise järel eraldus täiendavalt veel soojushulk  $Q_2$ . Leidke laeng, mis läbis hõõglambi sel perioodil, kui lüliti oli suletud.



### 111. Närvirakk

Autor: Andres Laan, lõppvoor, 2011, G 9

Närviraku membraani võib vaadelda kui õhukest kilet mahtuvusega  $C$ , mida läbivadioonkanalid, mis võimaldavad laengutel liikuda läbi membraani. Närviraku elektrilise tasakaalu seisukohast on olulisteks ioonideks naatrium ja kaalium. Kui naatriumioon (laenguga  $+e$ ) läbib ioonkanali (sisenedes närvirakku), siis sooritavad keemilised jõud töö  $e\mathcal{E}_{\text{Na}}$ , st võib öelda, et naatriumioonidele mõjub ioonkanalis elektromotoorjõud  $\mathcal{E}_{\text{Na}}$ . Kaaliumioonide puhul on kanali läbimise protsess täpselt samasugune, kuid efektiivne elektromotoorjõud on sel puhul  $\mathcal{E}_{\text{K}}$  ( $\neq \mathcal{E}_{\text{Na}}$ ). Peale keemiliste jõudude töö toimivad laengu liikumisel ioonkanalis ka hõõrdejõud, mida saab kirjeldada elektrilise takistuse abil: naatriumioonide jaoks on membraani elektriline takistus  $R_{\text{Na}}$  ja kaaliumioonide jaoks  $R_{\text{K}}$ . Millise laengu omandab närviraku membraan elektrilise tasakaalu saabudes?

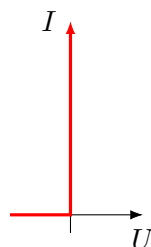
#### 4.2.11 Mittelineaarsed vooluelemendid

*Märksõnad: Mittelineaarsed vooluelemendid, sealhulgas diodid, ning nende voolu-pinge tunnusjoonte kasutamine.*

Elektriahela elementide jaoks, mis pole takistid, ei kehti Ohmi seadus. Paljusid neist saab kirjeldada pingevoolu tunnusjoonega  $I(U)$ . Selliste elementide omadused ei sõltu ajast nagu takistite puhul. Arvutuste tegemine toimib enamasti sarnaselt kasutades Krichoffi seadusi tavaliselt, kuid takistuse asemel vaadatakse pingevoolu tunnusjoont.

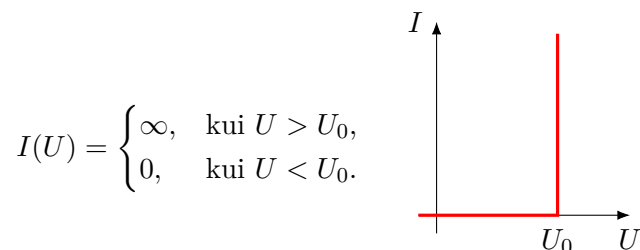
Ideaalne diod on element, mis ühte pidi laseb voolu läbi ainult ühes suunas (vt joonist 12).

$$I(U) = \begin{cases} \infty, & \text{kui } U < 0, \\ 0, & \text{kui } U \geq 0. \end{cases}$$



Joonis 12: Ideaalse diodi pingevoolu tunnusjoon.

Mõnevõrra realistlikum, kuid siiski idealiseeritud diood laseb voolu läbi ainult ühes suunas, kui dioodile on rakendatud piisavalt suur positiivne pinge (vt joonist 13). Olümpiaadil on enamasti kasutusel ideaalsed dioodid, kuid mõnikorda ka nende piisavalt realistlikumad variandid. Kui ülesandes pole otseselt öeldud, millise dioodiga on tegemist ning seda saab mõistlikult lahendada mõne realistlikuma dioodi mudeliga, siis seda ilmselt peaks ka tegema.



Joonis 13: Realistlikuma ideaalse dioodi pinge-voolu tunnusjoon.

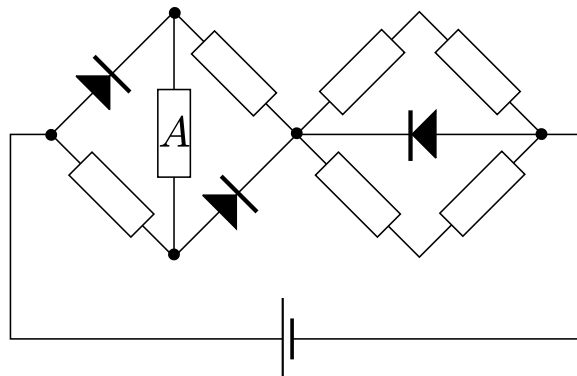
Reaalsetel diodidel on voolutugevus  $I(U)$  on väga väike kuni pinge on väiksem kui  $U_0$  ja siis suureneb sujuvalt. Negatiivsetel pingetel on voolutugevus väike kuni väga kõrge pingeni, kus tekib läbilöökk ning voolutugevus kasvab kiiresti pinget suurendades (sarnasel pärisuunale). Läbilöögi tekkimine enamasti rikub dioodi.

Osasid mittelineaarsete elementidega ülesandeid saab lahendada graafilise meetodiga. Vaatleme elektriskeemi, kus mittelineaarne element on järjestikku oomilise takistiga  $R$  ja ahelale rakendub elektromotoorjõud  $\mathcal{E}$  (vajadusel tuleb skeem muude võtetega sellisele kujule taandada). Mittelineaarsel elemendil olev pinge  $U$  ning voolutugevus  $I$  on tundmatud suurused ning Ohmi seadus ahelale tervikuna ei kehti. Kuid takisti tunnusjoone saab siiski esitada  $I$  kaudu:  $IR = \mathcal{E} - U$ . Lahendiks on selle sirge ja mittelineaarse elemendi tunnusjoone lõikepunkt. Sirge joonestamiseks piisab kahest punktist, nt  $U = 0, I = \mathcal{E}/R$  ning  $I = 0, U = \mathcal{E}$ . Kui juhtub mitu mittelineaarset elementi olema järjestiku või rööbiti, tuleb nende tunnusjooned liita vastavalt kas voolu või pinge järgi, selleks et saada summaarset voltamperkarakteristikut.

### 112. Takistid

Autor: Aigar Vaigu, lõppvoor, 2005, G 4

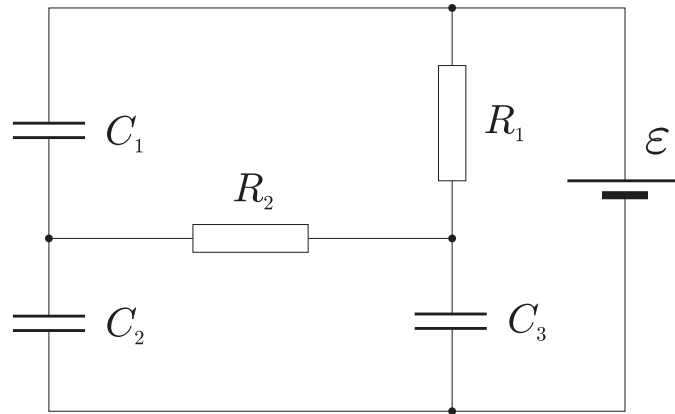
Mitu korda muutub joonisel kujutatud ahelas takistil  $A$  eralduv võimsus, kui vahetada alalispingeallika polaarsus? Kõik takistid on võrdse takistusega.





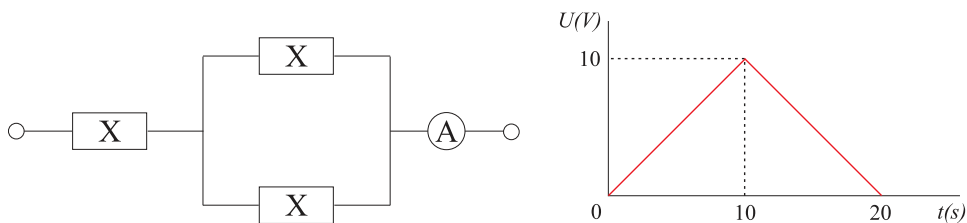
**113. Elektriskeem**

Autor: Tundmatu autor, lahtine, 2006, G 2

Leida laengud  $q_1$ ,  $q_2$  ja  $q_3$  kõikidel skeemil toodud kondensaatoritel.**114. Skeem**

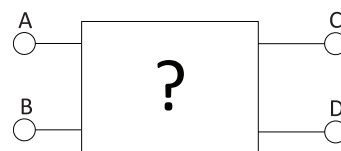
Autor: Tundmatu autor, lahtine, 2009, G 3

Elemendi  $X$  takistus muutub sõltuvalt selle pingest. Kui  $U_X \leq 1\text{ V}$ , siis selle takistus on  $R_1 = 1\ \Omega$ , kui aga  $U_X > 1\text{ V}$ , siis on takistus  $R_2 = 2\ \Omega$ . Kolm elementi  $X$  ühendatakse ideaalse ampermeetriga, nagu näidatud joonisel. Väljundklemmidele rakendatakse pinge, mille ajaline sõltuvus on toodud graafikul. Joonestage ampermeetri näidu ajalise sõltuvuse graafik.

**115. Must kast**

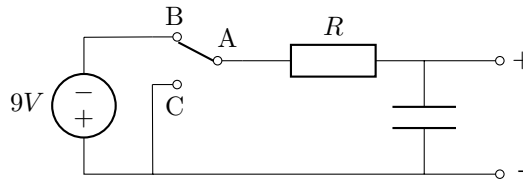
Autor: Kristian Kuppert, lõppvoor, 2013, G 4

Joonisel näidatud musta kasti kõik klemmid ühendatakse korraks kokku. Seejärel, kui klemmide A ja B külge ühendada patarei pingega  $U$  ja klemmide C ja D külge voltmeeter, on voltmeetri näit alghetkel  $U$ . Mõõtmise järel ühendatakse kõik klemmid veel korraks kokku. Kui ühendada sama patarei klemmide C ja D külge ning voltmeeter klemmide A ja B külge, on voltmeetri näit alghetkel  $\frac{U}{2}$ . Teades, et mustas kastis on ainult identsed kondensaatorid, joonistage musta kasti skeem.

**116. Elektroonikaskeem**

Autor: Sandra Schumann, lahtine, 2017, G 4

Joonisel on antud teatud elektroonikaseadme ühe osa skeem, mis koosneb 9 V vooluallikast, takistist ja kondensaatorist koosnevast filtrist, väljundklemmidest ja lülitist. Lüliti kaks võimalikku asendit on “sees” (ühendatud on A ja B) ning “väljas” (ühendatud on A ja C). Antud olukorras ei ole väljundklemmide külge midagi ühendatud.

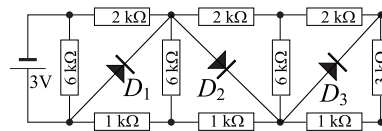


Kui toodud skeemis viia lüliti asendist “sees” asendisse “väljas” (st lülitada seade välja) ja muuta seejärel vooluallika polaarsus vastupidiseks, siis töötab elektroonikaseade pärast sisselülitamist endiselt. Kui aga vooluallika polaarsust muuta ilma seadet välja lülitamata, siis põleb takisti  $R$  läbi. Eeldusel, et takisti põleb läbi niipea, kui sellel eralduv võimsus ületab  $0,25\text{ W}$ , leia  $R$  minimaalne ja maksimaalne võimalik väärtus.

### 117. Dioodid

Autor: Jaan Kalda, lahtine, 2012, G 8

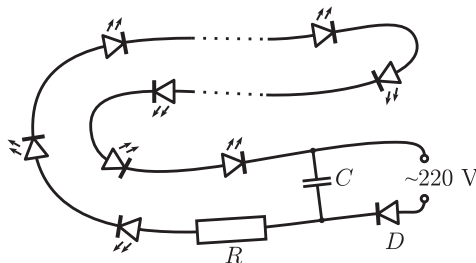
Millised võimsused eralduvad skeemil märgitud dioodidel? Diodide voolu võib lugeda nulliks kõikide vastupingete jaoks ning samuti ühest voldist väiksemate päripingete jaoks; suvalise pärioolu puhul on diodi pinge  $1,0\text{ V}$ . Takistite takistused ja elektromotoorjõu väärtus on toodud joonisel. Diodi skeemitähise noole suund näitab pärioolu suunda.



### 118. Jõulukaunistus

Autor: Valter Kiisk, lõppvoor, 2010, G 8

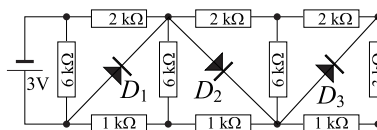
Jõulukaunistuse hankimiseks majandussurutise tingimustes otsustas Juku ühendada jadamisi kokku 50 valgusdiodi ja toita seda ahelat läbi alaldusdiodi  $D$  otse võrgupingega (vt joonist). Voolu piiramiseks on ahelasse lülitatud takisti ning voolu pulsatsiooni väljasilumiseks kondensaator. Pinge alaldusdiodil on tühine, igal valgusdiodil aga  $U_d = 3\text{ V}$ . Kui suure takistusega  $R$  ja maksimumvõimsusega  $N$  tuleks valida takisti, kui valgusdiodid taluvad voolu kuni  $I = 20\text{ mA}$ ? Kui suure mahutuvusega  $C$  kondensaator kindlustab, et voolutugevuse pulsatsioon jääb  $\alpha = 5\%$  piiresse? Võrgupinge sagedus on  $f = 50\text{ Hz}$  ning amplituudväärtus  $U_0 = 311\text{ V}$ .



### 119. Dioodid

Autor: Jaan Kalda, lahtine, 2012, G 8

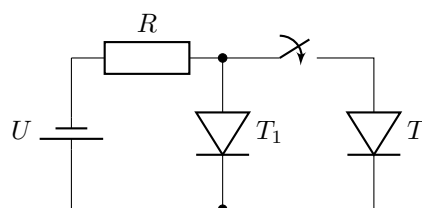
Millised võimsused eralduvad skeemil märgitud diodidel? Diodide voolu võib lugeda nulliks kõikide vastupingete jaoks ning samuti ühest voldist väiksemate päripingete jaoks; suvalise pärivoolu puhul on diodi pinge 1,0 V. Takistite takistused ja elektromotoorjõu väärtus on toodud joonisel. Diodi skeemitähise noole suund näitab pärivoolu suunda.



### 120. Türistor

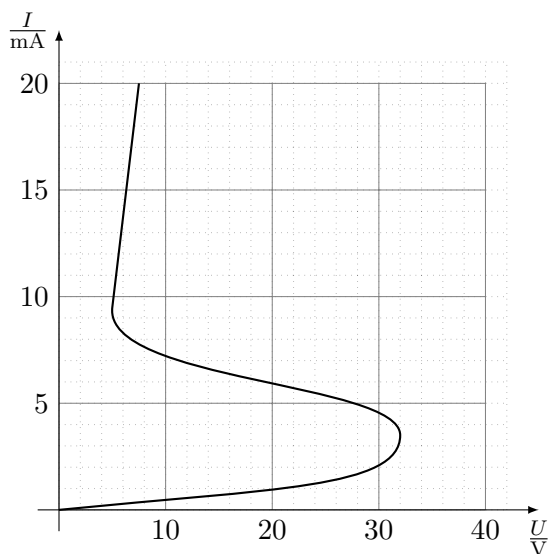
Autor: Jaan Toots, lõppvõor, 2015, G 10

Türistori (diodisarnase elemendi) volt-ampere karakteristik on juuresoleval graafikul. Kaks sellist türistori on ühendatud pingesallika ja takistiga kõrvalolevasse skeemi. Takistus  $R = 2\text{ k}\Omega$ .



a) Alguses on lüliti avatud. Pingesallika pinget suurendatakse lineaarselt  $t = 42\text{ s}$  jooksul väärtuselt  $U_0 = 0\text{ V}$  kuni väärtuseni  $U_a = 42\text{ V}$ . Skitseerige ahelat läbiva voolutugevuse  $I(t)$  sõltuvus ajast. Milline on voolutugevuse lõppväärtus  $I_a$ ?

b) Leidke lõppvoolutugevused mõlemas türistoris, kui lüliti suletakse ilma ahelale rakendatud pinget  $U_a$  muutmata.

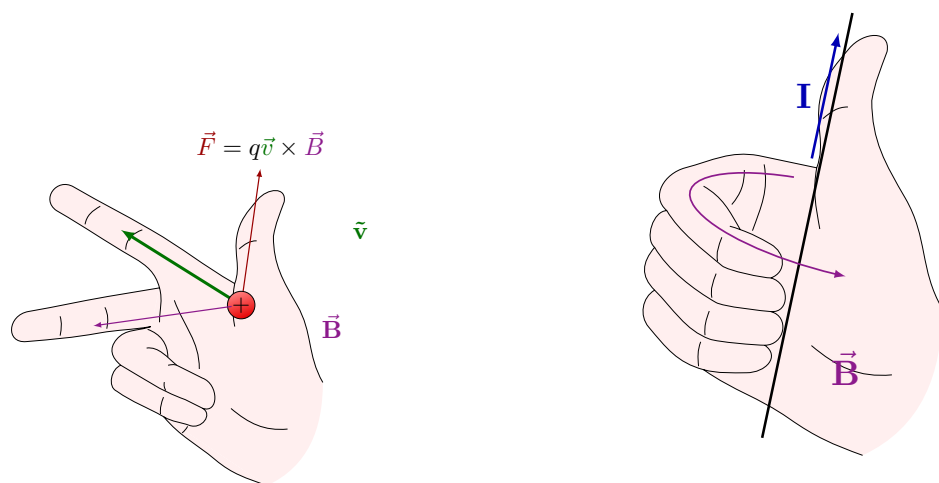


## 4.3 Üldisem elektromagnetism

### 4.3.1 Magnetväli.

### 4.3.2 Lorentzi jõud.

Lorentzi jõud kujul  $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$  tähendab lühidalt, et kiirusega  $\vec{v}$  liikuv keha laenguga  $q$  tajub magnetväljas tugevusega  $\vec{B}$  jõudu, mille tugevus on nende 3 suuruse korrutis. Täpsemaltõelduna läheb käiku vektorkorrutis  $\vec{v} \times \vec{B}$ , kusjuures saadud vektori pikkus avaldub kui  $|\vec{v} \times \vec{B}| = |\vec{v}||\vec{B}|\sin\alpha$ , kus  $\alpha$  on magnetvälja suuna ja liikumissuuna vaheline nurk. See tähendab, et Lorentzi jõud on maksimaalne, kui laeng liigub magnetväljaga risti ning null, kui kiirus ja jõud on samasihilised.



(a) Lorentzi jõud ja muud vektorkorrutised.

(b) Magnetvälja suund juhtme juures.

Joonis 14: Parema käe reeglid

Lorentzi jõu suunda aitab määrata parema käe reegel: võimalikke käeasetusi on mitmeid, toome välja ühe. Positiivselt laetud osakese liikumine olgu nimetissõrmega näidatud suunas. Nüüd asetada käsi nii, et nimetissõrmega risti olev keskmine sõrm (justkui kiir mis tuleb peopesast välja) on magnetvälja suund. Välja sirutatud põial näitab mõjuva Lorentzi jõu suunda. Negatiivse laengu puhul saab kas meelde jätta, et mõjuv jõud on vastassuunaline, või teha kogu protsess vasaku käega meetodit vahetamata.

Eelmises lõigus mainitud magnetvälja suund on tihtipeale ette antud, kusjuures lehe tasandisse sisenevaid ja sealt välja tulevaid magnetväljasid täistatakse sisenevate ja väljuvate noolte abil. Teistes olukordades võib magnetvälja tekitada magnet (jõujoon suunaga põhjast lõunasse) või liiguvad laengud ehk vool. Viimase korral võtame jälle abiks käepärase jäseme, seekord parem käsi „põial püsti“ asendis. Võimalikke rakendusi on 2.

1. kui põial näitab voolu suunda (positiivse laengukandja liikumine), siis kõverdunud sõrmed näitavad ringjat magnetvälja suunda juhtme ümber. Kasulik sirgete juhtmete korral.

2. kui kõverdatud sõrmed näitavad ringvoolu või poolis voolu suunda, siis pöial näitab tekitatud magnetvälja suunda, mis on ringvoolu tasandiga risti (piki pooli). Kasulik näiteks elektromagnetite ja trafode korral.

### 4.3.3 Ampère'i jõud.

Ampère'i jõuks nimetame jõudu, mis rakendub voolule magnetväljas. Seda saab mõista kui Lorentzi jõu ümbermõtestamist. Kuna kiirus  $v = \frac{L}{t}$  väljendab ajaühikus läbitud distantsi, aga voolutugevus  $I = \frac{q}{t}$  tähistab ajaühikus ristolõiget läbivat vooluhulka, siis Lorentzi jõu saaks ümber kirjutada kui

$$F = qvB = \frac{qLB}{t} = BIL.$$

Ehk, sirgele juhtmele pikkusega  $L$ , vooluga  $I$ , magnetinduktsioonis  $B$  rakendub jõud, mis on parema käe reeglina leitavas sihis (vool on "positiivse laengu liikumise,, suunas).

### 4.3.4 Laengute liikumine magnetväljas.

Laengute liikumine magnetväljas on tingitud Lorentzi jõu olemasolust. Kui laengu kiirus on risti magnetväljaga, siis on trajektoor ringjoon, või osa sellest (kui trajektoori läbimise ajal lahkub laeng magnetväljast.

Kui laengu kiirus ei ole täielikult magnetväljaga risti, siis:

1. Magnetväljaga samasihiline kiiruse komponent ei muutu Lorentzi jõu toimel, kuna see jõud on alati magnetinduktsiooniga risti.
2. Magnetväljaga risti olevas tasandis toimub jällegi ringjas liikumine

Need kaks liikumist koos moodustavad spiraalse trajektoori.

Osakese ringja trajektoori raadius sõltub magnetväljaga  $B$  risti olevast kiirusest  $v$ , osakese massist  $m$  ja laengust  $q$ . Ringliikumisel kesktõmbejõud  $F_k = \frac{mv^2}{r}$  on Lorentzi jõud  $F_e = qvB$ . Avaldades raadiuse saame  $r = \frac{qB}{mv}$ . Ringi suuna (päri- või vastupäeva) saab määrata parema käe reegli abil.

### 4.3.5 Faraday seadus, Lenzi reegel.

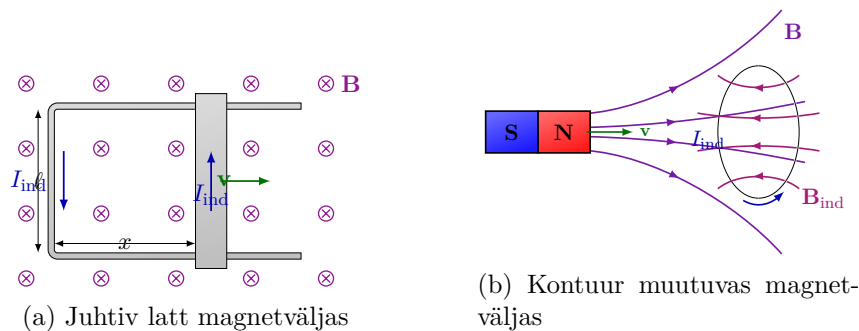
Kujutame ette elektrit juhtivaid relse, mis on ühest otsast traadiga ühendatud ning mida ühendab ka relssidel liigutatav juhtiv latt (vt joonis 15a). Lisaks, olgu ruumis homogeenne magnetväli suunaga lehe sisse.

Kui nüüd latti liigutada paremale, siis Lorentzi jõu põhjal võime näha, et kõikidele latis olevatele elektronidele mõjub jõud suunaga alla (vasaku käe reegel, kuna negatiivne laeng) ning vool on suunaga üles. Seega eksisteerib elektronidele mõjuv elektromotoorjõud ning on olemas magnetvälja poolt indutseeritud pinge.

Seda erijuhtu üldistab veidi Faraday seadus, mis seob omavahel magnetvoo  $\Phi$  läbi juhtiva kontuuri pindalaga  $S$  ning elektromotoorjõu (ühik V):

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt}$$

$$\Phi = BS \cos \theta,$$



Joonis 15: Elektromagnetiline induksioon

kus  $\theta$  on nurk magnetvälja jõuvektori ja kontuuri tasandi normaali vahel. Kui on mitu ühtivat kontuuri mida läbib sama magnetväli, näiteks pooli puhul (mitu samasugust traadist rõngast teineteise kohal), siis indutseeritakse sama  $\varepsilon$  igas rõngas. Märkame, et ülaltoodud näites on  $B$  konstantne ja kasvab  $S$ . Siiski võime ette kujutada ka vastupidist olukorda – näiteks magneti lähendamine poolile, kus muutub  $B$ . Võib muutuda ka uuritav nurk  $\theta$ . See juhtub näiteks siis, kui pöörata magnetit mis on pooli läheduses (nii töötavad mõned elektrigeneraatorid).

Lenzi reegel tegelikkuses sisaldub ülalmainitud faraday induksiooni seaduses, aga väärrib ka eraldi välja toomist: *indutseeritud magnetväli on selline, et hakata vastu muudu tekitajale*. See tähendab näiteks, et kui magneti lähendamine kontuurile suurendab magnetvoogu suunaga lehest välja, siis indutseeritud vool kontuuris on suunatud nii, et vähendada magnetvoo muutust – kontuuri omavool peab tekitama magnetvälja suunaga lehte sisse, seega vool on meie vaates päripäeva. Sellest nähtusest tuleneb ka näiteks see, et magnet kukub vasktorus aeglaselt. Indutseeritud voolud torus käituvad vastu magnetvoo muutumisele ehk lõppude lõpuks vähendavad muutvat mõju, milleks on magneti liikumiskiirust.

## Vihjed

### Lahendused