

# Eesti koolinoorte 70. füüsikaolümpiaad

10. veebruar 2023. a. Piirkondlik voor.  
Gümnaasiumi ülesannete lahendused (10.–12. klass)

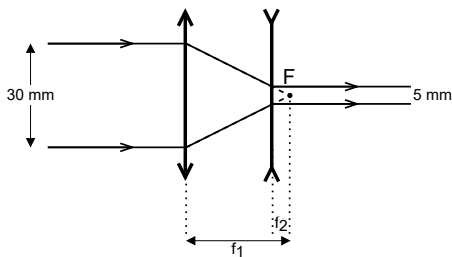
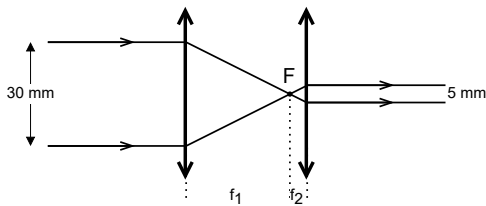
## Eessõna

Allpool on toodud iga ülesande üks õige lahenduskäik (mõnel juhul ka enam). **Kõik alternatiivsed õiged lahenduskäigud tuleb hinnata samuti maksimumpunktidega.** Iga alternatiivse lahenduskäigu jaoks tuleb kontrollijatel koostada hindamisskeem, juhindudes võimalusel juuresoleva hindamisskeemi punktijagamisproportsioonist. Soovituslikud mahaarvamise punktid:

- numbriline arvutusviga — [0,5 p];
- viga teisendustes — [0,5 p] (märgi jms väiksem viga) või [1 p] (viga, mis viib dimensioonide konfliktini), maha arvata ainult üks kord, st edasikanduvat viga mitte karistada;
- kui vastus tuleb füüsikaliselt absurdne, siis võib täiendavalt karistada [0,5 p];
- üksik viga lähtevalemis — [0,5 p] (kui märgiviga) kuni 50% (sisuline viga).

## 1. (VALGUSVIHK) (6 p.) Autor: Richard Luhtaru

Kummagi juhu skeemid on toodud allpool. Mõlemal juhul läätsede fookused kattuvad, mistõttu valgusvihk jääb paralleelseks pärast läätsede läbimist.



Sarnastest kolmnurkadest leiame, et kummalgi juhul  $\frac{f_1}{f_2} = \frac{30 \text{ mm}}{5 \text{ mm}} = 6$ . Ainsad Maril olevad läätsed, mille fookuskauguste suhe on 6, on 12 cm ja 2 cm. Seega esimesel juhul on Maril vaja kumerläätsi fookuskaugustega 12 cm ja 2 cm. Teisel juhul on Maril vaja kumerläätsi fookuskaugusega 12 cm ja nõugsläätsi fookuskaugusega 2 cm.

*Hindamisskeem:*

- Joonistatud õige skeem — kumbki osa [1,5 p].
- Leitud fookuskauguste suhe  $f_1/f_2 = 6$  — kumbki osa [1 p].
- Leitud õige vastus (12 cm, 2 cm) — kumbki osa [0,5 p].

Tõestust, et teised läätsepaarid ei sobi, ei ole vaja.

## 2. (OTSENE KALORIMEETRIA) (6 p.) Autor: Konstantin Dukatsš

Kui vesi voolab torus, siis vesi soojeneb inimeselt eralduva soojuse tõttu. Märkame, et aja  $\Delta t$  jooksul siseneb väike vee element tuppja ja teine vee element samal hetkel väljub. Olgu  $Q_i$  inimesest eralduv soojus aja  $\Delta t$  jooksul ning  $Q_v$  veele lisandunud soojusenergia. Energia jäävusest  $Q_v = Q_i$  [1 p].

Teame, et  $Q_v = c\Delta m(T_2 - T_1)$  [0,5 p] ja  $Q_i = P\Delta t$  [0,5 p], seega

$$c\Delta m(T_2 - T_1) = P\Delta t,$$

$$P = c \frac{\Delta m}{\Delta t} (T_2 - T_1). \quad [1 \text{ p}]$$

Avaldame siseneva/väljuva vee elemendi massi

$$\Delta m = \rho\Delta V = \rho Su\Delta t. \quad [1 \text{ p}]$$

Seega

$$P = c\rho Su(T_2 - T_1), \quad [1 \text{ p}]$$

$$P = 4200 \frac{\text{J}}{\text{kg}\cdot^\circ\text{C}} \cdot 1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 10^{-4} \text{ m}^3 \cdot 2 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 0,15^\circ\text{C} = 126 \text{ W}. \quad [1 \text{ p}]$$

## 3. (ÖKONOOMNE SÕIT) (8 p.) Autor: Marten Rannut

Ülesandes pole vahet, kas leiame kütusekulude suhte 100 m või 100 km kohta [1 p] (juhul kui õpilane arvutab kütusekulud 100 km jaoks, siis anda see punkt, kui õpilane leiab korrektselt  $E_l$  100 km jaoks). Linnas kiirendab auto iga 100 m tagant kiiruseni  $v_l = 40 \frac{\text{km}}{\text{h}} \approx 11,1 \frac{\text{m}}{\text{s}}$  [1 p]. Selleks kulub energia

$$E_l = \frac{mv_l^2}{2} = \frac{1500 \text{ kg} \cdot (11,1 \frac{\text{m}}{\text{s}})^2}{2} \approx 92,4 \text{ kJ}. \quad [1 \text{ p}]$$

Maanteeõidul on auto kiirus  $v_m = 90 \frac{\text{km}}{\text{h}} = 25 \frac{\text{m}}{\text{s}}$  [1 p]. Auto poolt tehtav töö õhutakistuse ületamiseks on  $E_m = F s$  [1 p], seega

$$E_m = cv^2 s = 1,3 \frac{\text{kg}}{\text{m}} \cdot \left(25 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 \cdot 100 \text{ m} \approx 81,3 \text{ kJ}. \quad [1 \text{ p}]$$

Kuna mootori kasutegur on mõlemal juhul sama, siis kütusekulude suhe on võrdne kuluva energia suhtega [1 p]. Seega kütusekulude suhe on

$$\frac{k_m}{k_l} = \frac{81,3 \text{ kJ}}{92,4 \text{ kJ}} \approx 0,88. \quad [1 \text{ p}]$$

(või  $k_l/k_m \approx 1,14$ ).

#### 4. (DROON) (8 p.) Autor: Marten Rannut

Tuule jõu muutus ajas on  $\frac{25\text{N}}{0,7\text{s}} = 35,7 \frac{\text{N}}{\text{s}}$  [0,5 p]. Drooni jõu muutus ajas on  $\frac{20\text{N}}{1\text{s}} = 20 \frac{\text{N}}{\text{s}}$  [0,5 p]. Järelikult resultantjõu muutus ajas on  $\frac{\Delta F}{\Delta t} = 35,7 \frac{\text{N}}{\text{s}} - 20 \frac{\text{N}}{\text{s}} = 15,7 \frac{\text{N}}{\text{s}}$  [1 p]. Kuna  $F = ma$ , siis hakkab droon kiirenema, kusjuures kiirendus hakkab ühtlaselt kasvama [1 p]. Kiirenduse kasvamise kiirus on

$$\frac{\Delta a}{\Delta t} = \frac{1}{m} \frac{m \Delta a}{\Delta t} = \frac{1}{m} \frac{\Delta F}{\Delta t} = \frac{1}{0,5 \text{ kg}} \cdot 15,7 \frac{\text{N}}{\text{s}} = 31,4 \frac{\text{m}}{\text{s}^3}. \quad [1 \text{ p}]$$

Teame, et kui keha algne kiirus on 0 ja kiirus hakkab kasvama ühtlaselt kiirendusega  $a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$ , siis asukoha muutus on  $\Delta s = \frac{at^2}{2} = \frac{\frac{\Delta v}{\Delta t} t^2}{2}$ . Analoogselt, kuna kiirendus  $a$  on kiiruse muutumise kiirus ja  $\frac{\Delta a}{\Delta t}$  kiirenduse muutumise kiirus, siis ühtlase kiirenduse kasvamise korral  $\Delta v = \frac{\Delta a}{\Delta t} t^2$  [3 p]. (Kui  $\Delta v$  valemit pole leitud, aga on idee kasutada konstantse kiirenduse valemit  $s = \frac{at^2}{2}$ , siis [1 p].)

Et drooni kiirus on algselt 0, siis drooni kiirus pärast  $t = 0,5 \text{ s}$  on

$$v = \Delta v = \frac{\Delta a}{\Delta t} t^2 = \frac{31,4 \frac{\text{m}}{\text{s}^3} \cdot (0,5 \text{ s})^2}{2} \approx 3,93 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Numbrilise vastuse eest [1 p].

#### 5. (VEDRU KEERUTAMINE) (8 p.) Autor: Sandra Schumann

Olgu vedrude jäikused  $k_1$  ja  $k_2$ , raskuste massid vastavalt  $2m$  ja  $m$ , posti nurkkiirus  $\omega$  ning vedrude algne pikkus  $l$ . Siis pikeneb esimene vedru pikkuse

$2l - l = l$  võrra ja teine  $4l - l = 3l$  võrra [1 p]. Esimese vedru pikennemisest tulenev jõud on  $k_1 \cdot l$  ja teise vedru pikennemist tulenev jõud on  $k_2 \cdot 3l$  [2 p]. Ringliikumisest saame ka, et esimese jõu suurus peab olema  $2m\omega^2 \cdot 2l$  ja teise jõu suurus  $m\omega^2 \cdot 4l$  [2 p]. Saame kirja panna, et:

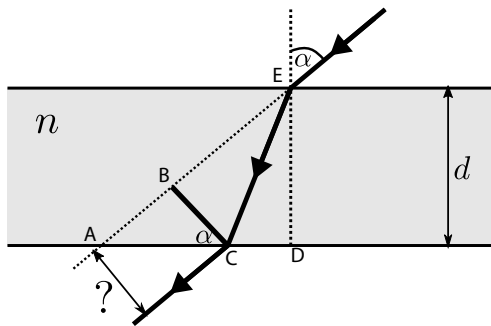
$$k_1 \cdot l = 2m\omega^2 \cdot 2l$$

$$k_2 \cdot 3l = m\omega^2 \cdot 4l$$

$$\frac{k_1}{k_2} = \frac{2m\omega^2 \cdot 2l}{m\omega^2 \cdot 4l} \cdot \frac{3l}{l} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 3}{4 \cdot 1} = 3$$

Vedruude jäikuste suhe on 3-kordne [3 p].

6. (KLAASPLAAT) (10 p.) Autor: Erkki Tempel



Kolmnurgast  $\triangle ABC$  saame avaldada kiire nihke  $BC$

$$BC = AC \cos \alpha \quad [2 \text{ p}]$$

Külje  $AC$  pikkuse saame leida lõikude  $AD$  ja  $CD$  kaudu

$$AC = AD - CD \quad [1 \text{ p}]$$

Avaldame külje  $AD$  kolmnurgast  $\triangle ADE$

$$AD = d \tan \alpha \quad [1 \text{ p}]$$

Külje  $CD$  leidmiseks kasutame murdumisnäitaja seost

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \gamma} = n \quad \implies \quad \sin \gamma = \frac{\sin \alpha}{n} \quad [1 \text{ p}]$$

Kolmnurgast  $\triangle CDE$  saame avaldada  $\sin \gamma$  ning sealt külje  $CD$

$$\sin \gamma = \frac{CD}{CE} \implies CD = \frac{CE \sin \alpha}{n} \quad [1 \text{ p}]$$

Kasutades eelnevat seost ning Püthagorase teoreemi kolmnurgast  $\triangle CDE$ , saame avaldada külje  $CD$

$$CD = \frac{d \sin \alpha}{\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}} \quad [2 \text{ p}]$$

Seega nihkub esialgne kiir kõrvale oma algsest sihist

$$BC = d \sin \alpha \left( 1 - \frac{\cos \alpha}{\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}} \right) \quad [2 \text{ p}]$$

Kui lõppvastusesse on jäetud lihtsustamata trigonomeetriline pöördfunktsioon (nt  $\arcsin$ ,  $\arccos$ ), siis anda ülesande eest kuni [8 p].

### 7. (VOLTMEETER) (10 p.) Autor: Päivo Simson

Olgu voltmeetri sisetakistus  $R_v$ . Skeemi sümmeetriast ja võrdusest  $V_{AB} = V_{CD}$  järeldub, et takistused  $R_1$  ja  $R_3$  peavad olema võrdsed, st  $R_3 = R_1$ . [1 p]

1) Koostame kõigepealt skeemi, mis kujutab pin-  
ge mõtmist punktide A ja B vahel.  $R_v$  ja  $R_1$  on  
ühendatud rööbiti ja takistus punktide A ja B  
vahel on järelikult

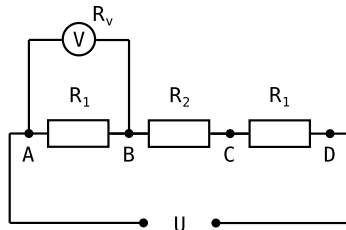
$$R_{AB} = \frac{R_v R_1}{R_v + R_1}. \quad [0,5 \text{ p}]$$

Skeemi kogutakistus on

$$R_k = \frac{R_v R_1}{R_v + R_1} + R_1 + R_2. \quad [0,5 \text{ p}]$$

Pinge kahe punkti vahel jaotub proportsionaalselt nende punktide vahelise takistusega ja järelikult

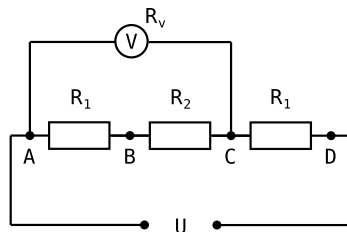
$$\begin{aligned} V_{AB} &= U \cdot \frac{R_{AB}}{R_k} = \frac{U \frac{R_v R_1}{R_v + R_1}}{\frac{R_v R_1}{R_v + R_1} + R_1 + R_2} = \\ &= \frac{U R_v R_1}{R_v (2R_1 + R_2) + R_1 (R_1 + R_2)}. \quad [1 \text{ p}] \end{aligned}$$



2) Koostame skeemi, mis kujutab pinget mõõtmist punktide A ja C vahel. Analoogiliselt eelmise skeemiga saame

$$R_{AC} = \frac{R_v(R_1 + R_2)}{R_v + R_1 + R_2}, \quad [0,5 \text{ p}]$$

$$R_k = \frac{R_v(R_1 + R_2)}{R_v + R_1 + R_2} + R_1, \quad [0,5 \text{ p}]$$



$$V_{AC} = U \cdot \frac{R_{AC}}{R_k} = \frac{U \frac{R_v(R_1+R_2)}{R_v+R_1+R_2}}{\frac{R_v(R_1+R_2)}{R_v+R_1+R_2} + R_1} = \frac{UR_v(R_1 + R_2)}{R_v(2R_1 + R_2) + R_1(R_1 + R_2)}. \quad [1 \text{ p}]$$

3) Paneme tähele, et  $V_{AB}$  ja  $V_{AC}$  murdavaldiste nimetajad on samad. Jagame need avaldised omavahel.

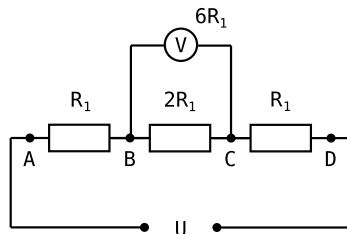
$$\frac{V_{AB}}{V_{AC}} = \frac{R_1}{R_1 + R_2} = \frac{28}{84} = \frac{1}{3} \implies R_2 = 2R_1. \quad [2 \text{ p}]$$

Asendades saadud tulemuse  $V_{AB}$  avaldisse saame

$$\frac{126R_v}{4R_v + 3R_1} = 28 \implies R_v = 6R_1. \quad [2 \text{ p}]$$

4) Nüüd saame leida voltmeetri näidu  $V_{BC}$ . Vas-tavalt skeemile saame

$$V_{AB} = U \cdot \frac{R_{BC}}{R_k} = 126 \text{ V} \cdot \frac{\frac{2R_1 \cdot 6R_1}{8R_1}}{\frac{2R_1 \cdot 6R_1}{8R_1} + 2R_1} = 126 \text{ V} \cdot \frac{12}{12 + 8 \cdot 2} = 54 \text{ V}. \quad [1 \text{ p}]$$



## 8. (SÜVEND JA KERA) (10 p.) Autor: Marko Tsengov

Juhul  $\theta > 90^\circ$  kukub kera kindlasti tasandilt maha.

Olgu  $C \equiv \sqrt{(R-h)^2 + r^2}$ . Kui  $R = C$ , siis puudutab kera korruga nii süvendi põhja kui ka äärt. Seega juhul  $R > C$  puudutaks kera ainult süvendi äärt (mis pole ülesandes antuga kooskõlas).

Kui  $R \leq C$ , libiseb kera esmalt mööda süvendi põhja kauguse  $C - R$  võrra, kogudes kineetilist energiat potentsiaalse energia arvelt. Seejärel kera pörkab servalt – võib-olla korduvalt – kuni ta kas ületab süvendi serva või jääb (aeglaselt sumbuvate pörkamistega) süvendisse. Selleks, et kera süvendist väljuks, peaks algne potentsiaalne energia olema suurem potentsiaalsest energiast, mille kera saavutab, kui see puudutab serva ning selle masskeske on täpselt puutepunkti kohal. Teisisõnu peab kera sellises olekus olema madalamal kui algolekus. Kõrguste vahe saame leida, liigutades kera masskeskme mõtteliselt:

1. Kera algsesse puutepunkti:  $\Delta H = -R \cos \theta$
2. Süvendi serva alumisse punkti:  $\Delta H = -r \sin \theta$
3. Süvendi serva ülemisse punkti (süvendi ääre peale):  $\Delta H = h \cos \theta$
4. Süvendi ääre kohale, nii et kera masskeske on täpselt puutepunkti kohal:  $\Delta H = R$

Liites kõrguste vahed kokku, saame

$$\Delta H = -R \cos \theta - r \sin \theta + h \cos \theta + R = R - r \sin \theta - (R - h) \cos \theta$$

Kera saab süvendist väljuda, kui  $\Delta H \leq 0$ , st

$$R - r \sin \theta - (R - h) \cos \theta \leq 0$$

*Hindamisskeem:*

- Idee, et piirjuht tekib juhul, kui keral on piisavalt energiat, et süvendi äär ületada — [3 p].
- Märkatud, et kera ületab süvendi ääre siis ja ainult siis kui kera esialgne potentsiaalne energia/kõrgus on suurem kui kera potentsiaalne energia/kõrgus süvendi serval täpselt puutepunkti kohal — [2 p]. *Kui õpilasel on idee leida tingimused muul moel energia jäävuse kaudu, lahendust sel moel lõpuni viimata – kuni [1 p].*
- Avaldatud kõrguste vahe  $\Delta H$  (või potentsiaalsete energiatega vahe) — [4 p]. *Kui on leitud kõrguste vahe, milles mõni liige algandmete kaudu ei avaldu — kuni [2 p]. Eeldatavasti on võimalikke lähenemisi geomeetrilise süsteemi lahendamisele mitmeid, seega näiteks seose punktid ülaltoodud lahenduse korral:*

\* Idee avaldada kõrguste vahe lihtsama kera mõttelise trajektoori abil — [1 p].

\* Avaldatud (algandmetest) vähemalt kaks liiget vastavast trajektoorist — [2 p].

- Leitud korrektne tingimus (nt  $R - r \sin \theta - (R - h) \cos \theta \leq 0$ ) — [1 p].

Ei ole oluline, kas õpilane kasutab tingimuses ranget ( $<$ ) või mitteranget ( $\leq$ ) võrratust.

### 9. (SÜGAV KAEV) (12 p.) Autor: Jaan Kalda

Vesi lõpetab kerkimise, kui see hakkab toru ülemises otsas keema, st küllastunud veeauru rõhk seal saab võrdseks atmosfäärirõhuga. Et temperatuuri tõustes küllastunud veeauru rõhk kasvab, siis vesi kaevu torus hakkab keema suurema rõhu juures, mistõttu veesamba kõrgus torus jääb väiksemaks.

Küllastunud veeauru rõhu saame leida vaadeldavatel temperatuuridel tänu sellele, et teame veeauru tihedust õhus ning õhu suhtelise niiskust. Kirjutame ideaalse gaasi olekuvõrrandi õhus oleva veeauru jaoks:  $p_a V = \frac{m_a}{\mu} RT$  [1 p], kus  $p_a$  on veeauru osarõhk,  $V$  on ruumala ja  $m_a$  on selles ruumalas oleva veeauru mass. Jagades selle võrduse  $V$ -ga saame siduda rõhu ja tiheduse,  $p_a = \frac{\rho_a}{\mu} RT$  [1 p].

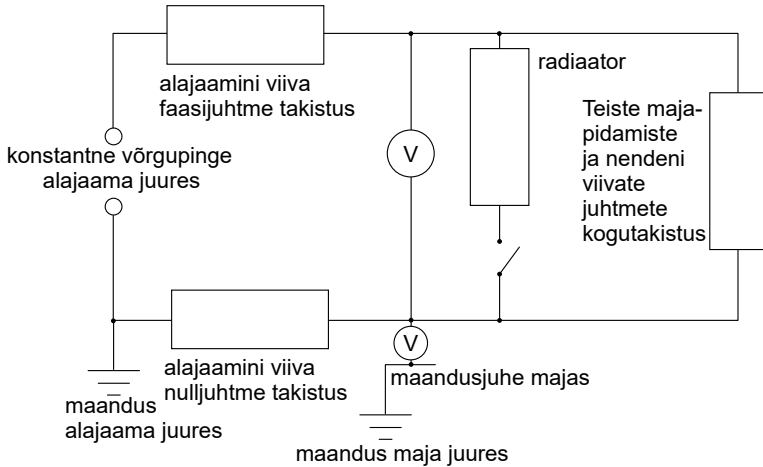
Küllastunud auru rõhk on leitav suhtelise õhuniiskuse definitsioonist:  $p_k = p_a/r$  [1 p], millest küllastunud aururõhu muutus  $\Delta p_k = \frac{\rho_a}{\mu} R(T_1/r_1 - T_2/r_2)$  [1 p]. Kaevutoru alumise otsa juures, kus põhjavee vaba pind on kontaktis atmosfääriga, on rõhk vees võrdne atmosfääri rõhuga  $p_0$ . Torus oleva veesamba ülemise otsa juures, kus toimub keemine, on rõhk torus väiksem veesamba tekitatud rõhu võrra,  $p = p_0 - \rho_v gh$  [1 p], kus  $h$  on veesamba rõhk. Et pumbates pumbatakse torust õhk välja ning asemele keeb veeaur, siis võime lugeda, et torus ongi puhas veeaur [2 p], mille rõhk on võrdne küllastunud veeauru rõhuga antud temperatuuril, sest toimub keemine [2 p], seega  $p_k = p_0 - \rho gh$ . Et  $p_0$  ei muutu, siis saame selle võrduse abil siduda veesamba kõrguse muudu küllastunud veeauru rõhu muuduga:  $\Delta p_k = \rho g \Delta h$  [1 p], kust saame, et

$$\Delta h = \frac{\rho_v R}{\mu \rho g} \left( \frac{T_1}{r_1} - \frac{T_2}{r_2} \right) \quad [1 \text{ p}]$$

ning numbriliselt  $\approx 14 \text{ cm}$  [1 p].



10. (ALAJAAMA KAUGUS) (12 p.) Autor: Jaan Kalda



Kõigepealt teeme ekvivalentskeemi: radiaatori (takistusega  $R_r$ ) ja teiste tarbijate (takistusega  $R_t$ ) rööpühendus on järjestikku mõlema juhtmega pingeallika külge, milleks on alajaam; olgu kummagi juhtme takistus  $R_j$  ja pinge alajaamas  $U_a$ . Selles skeemis on teada pinge ühel juhtmel  $U_1$  ja pinge radiaatoril  $U_f$ ; kui eemaldada skeemist radiaator, siis tekkiva uue olukorra jaoks on teada uus pinge juhtmel  $U_0$ . Kummagi ekvivalentskeemi eest saab [1 p].

Esimesest ekvivalentskeemist saame Kirchoffi pingeseaduse tõttu

$$U_a = U_f + 2U_1;$$

see võrrand annab [2 p] (kui puudub tegur 2, siis [1 p]). Teisest ekvivalentskeemist saame tänu Kirchoffi pingeseadusele avaldada uue faasipinge, st pinge teistel koormistel:

$$U_f' = U_a - 2U_0 = U_f + 2(U_1 - U_0) = 210 \text{ V} + 2(30 - 20) \text{ V} = 230 \text{ V}.$$

see võrrand annab samuti [2 p] (kui puudub tegur 2, siis [1 p]).

Selleks, et leida juhtme pikkus, on meil esimese sammuna vaja leida juhtme takistus. Peale pingete avaldamist on meil on alles jäänud kolm tundmatut takistit, millest radiaatori takistuse saame avaldada tänu nominaalandmetele:

$$P_n = U_n^2 / R_r \Rightarrow R_r = U_n^2 / P_n = 26,45 \Omega.$$

See seos (emb-kumb) annab [1 p]. Kahe tundmatu leidmiseks vajame kahte võrrandit, milleks on Ohmi ja Kirchoffi seadustest tulenev järeldus: jadaühenduses jagunevad pinged võrdeliselt takistustega. Seega

$$U_0/U_f' = R_j/R_t, \quad [1 \text{ p}]$$

$$U_1/U_f = R_j(1/R_t + 1/R_r). \quad [1 \text{ p}]$$

Lahutades teisest võrrandist esimese saame

$$U_1/U_f - U_0/U_f' = R_j/R_r \Rightarrow R_j = R_r(U_1/U_f - U_0/U_f') = 1,479 \Omega. \quad [1 \text{ p}]$$

Et  $R_j = \rho L/S$  [1 p], siis  $L = SR_j/\rho \approx 1920 \text{ m}$ . Numbrilise vastuse eest [1 p].

**E1.** (PLIIATSI TIHEDUS) (12 p.) Autor: Eero Uustalu

Pliiatsi tiheduse mõõtmiseks kasutame üleslükkejõudu. Asetades pliiatsi vette märkame, et pliiats ujub. Sellisel juhul:

$$\rho_v V_v = \rho_p V_p$$

kus  $\rho_p$  on pliiatsi tihedus,  $V_p$  on pliiatsi koguruumala,  $\rho_v$  on vee tihedus ja  $V_v$  on väljatõrjutud vee ruumala (ehk see osa pliiatsi ruumalast, mis on vees). Lihtsalt pliiatsi vette pannes lebab see aga lapiti vees ja seega on täpne vees oleva ruumala osa täpne määramine võimatu. (Lisaks segab mõõtmist ka pindpinevusjõud ja sellest tulenev kaardunud veepind pliiatsi ümber.)

Ku saaksime pliiatsi asetada vette püstisena, siis oleks vette uputatud osa ruumala määramine üsna lihtne:

$$\rho_v h_v S_p = \rho_p h_p S_p$$

kus  $h_p$  on pliiatsi pikkus,  $h_v$  on vette uputatud pliiatsi osa pikkus ja  $S_p$  on pliiatsi ristlõikepindala. Ja seega saaksime:

$$\rho_p = \frac{\rho_v h_v}{h_p}$$

Aga pliiatsit ei tohi mingite ümritsevate esemetaga seotud objektiga püstisena hoida, sest süsteemi lisanduksid määramatud jõud ja/või hõõrdejõud. Pliiatsi saaks püsti, kui tema alumisse otsa saaks kinnitada piisavalt suure lisaraskuse.

Selleks võib ühe kirjaklambritest painutada sirgeks ja saadud traadi keerata mitmeid keerde ümber pliiatsi ning jättes ühe või kaks otsa üles suunatud

konksudeks. Tegelikult võib traadi vabast otsast moodustada konksu ka otse pliiatsi otsa alla. Et spiraal pliiatsilt maha ei libiseks, tuleb ta pliiatsilt eemaldada ning saadud traatrõngad natuke rohkem kokku deformeerida (selliselt, et traatrõnga läbimõõt väheneks) ja saadud tihedalt istuv rõngas pliiatsi otsa ajada.

Nüüd on võimalik konksu otsa järjest kirjaklambreid lisades (vahepeal peab pliiatsi veest klambrite lisamiseks välja tõstma) pliiats ilusti vette püsti saada ja hiljem ka peaaegu ära uputada, jättes vaid pisikese osa pliiatsist veest välja. Saame olukorra:

$$\rho_v S_p (h_v + n_1 \cdot h_{\text{klamber}}) + n_1 \cdot \rho_v V_{\text{klamber}} = \rho_p h_p S_p + n_1 \cdot m_{\text{klamber}}$$

Kus  $n_1$  on lisatud klambrite arv,  $h_{\text{klamber}}$  on klambri lisamise tõttu täiendavalt vette vajunud pliiatsi osa pikkus,  $V_{\text{klamber}}$  on ühe klambri ruumala ja  $m_{\text{klamber}}$  on ühe klambri mass.

Mõõdame väljaulatuva pliiatsi osa pikkuse  $h_{n_1}$ . Saame:

$$h_{n_1} = h_p - h_v - n_1 \cdot h_{\text{klamber}}$$

Kui nüüd vähendame järk-järgult lisatud klambrite arvu kuni pliiats veel vees püstises asendis on, saame:

$$\rho_v S_p (h_v + n_2 \cdot h_{\text{klamber}}) + n_2 \cdot \rho_v V_{\text{klamber}} = \rho_p h_p S_p + n_2 \cdot m_{\text{klamber}}$$

kus  $n_2$  on järele jäänud klambrite arv.

Mõõdame väljaulatuva pliiatsi osa pikkuse  $h_{n_2}$ . Saame:

$$h_{n_2} = h_p - h_v - n_2 \cdot h_{\text{klamber}}$$

ja lahutades  $h_{n_1}$  avaldisest  $h_{n_2}$  saame

$$h_{\text{klamber}} = \frac{h_{n_1} - h_{n_2}}{n_1 - n_2}$$

ning asetades saadud seose  $h_{n_1}$  avaldisse, avaldame

$$h_v = h_p - h_{n_1} - n_1 \cdot \frac{h_{n_1} - h_{n_2}}{n_1 - n_2}$$

Saadud väärtuse aga saame lisada avaldisse

$$\rho_p = \frac{\rho_v h_v}{h_p} = \frac{\rho_v}{h_p} \cdot \left( h_p - h_{n_1} - n_1 \cdot \frac{h_{n_1} - h_{n_2}}{n_1 - n_2} \right)$$

Testkomplektiga mõõtes saime järgmised väärtused:

$$h_p = 150 \text{ mm}$$

$$n_1 = 6$$

$$n_2 = 4$$

$$h_{n_1} = 0,5 \text{ mm}$$

$$h_{n_2} = 12,5 \text{ mm}$$

$$\rho_v = 1 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$$

Asetades väärtused ülaltoodud avaldissse saame  $\rho_p = 0,757 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$ .

*Hindamisskeem:*

- Tõdemus, et lapikult vees lebava pliiatsi tihedust täpselt mõõta ei saa — **[0,5 p]**.
- Idee asetada klambritest lisaraskus ühte otsa — **[1 p]**.
- Mõistmine, et kõik kirjaklambrid on ühesuguse massiga koormised — **[0,5 p]**.
- Korrektnel avaldis püstioleval mittekoormatud homogeenise pliiatsi tiheduse leidmiseks — **[1 p]**.
- Avaldis, kus seotakse klambri lisamass vette vajunud pliiatsi lisaruumalaga ja seega ka lisandunud vette vajunud pliiatsiosa kõrgusega — **[1 p]**.
- Idee, et kui on teada kaks eri lisamassi juhtu, saab leida pliiatsi lisandunud vettevajumise kõrguse ühe lisamassi kohta ( $h_{\text{klamber}}$ ) — **[1,5 p]**.
- Klambritest eri massiga lisaraskused on pliiatsi otsa edukalt kinnitatud — **[1 p]**.
- On leitud pliiatsi pikkus (**[0,5 p]**), kahe lisamassi juhtumi kirjaklambrite arvud (kumbki **[0,5 p]**), kaks vastavat pliiatsi uppunud (või õhus) oleva osa pikkust (kumbki **[0,5 p]**) — kokku **[2,5 p]**.
- Lisamassist tingitud sissevajumise üks punkt on mõõdetud pea pliiatsi uppumise piirile — **[0,5 p]**.
- Lisamassist tingitud sissevajumise üks punkt on mõõdetud olukorras, kus pliiats veel enam-vähem vertikaalselt püsti püsib — **[0,5 p]**.
- Vettevajunud osa pikkusest on lisamassist lisandunud väärtused maha arvestatud — **[0,5 p]**.
- Arvutatud pliiatsi tihedus — **[0,5 p]**.
- Pliiatsi tiheduse väärtus on tõepärane (ei erine tõelisest üle 10%) — **[1 p]**.

KUI mõõtmise viidi läbi püstise, kuid väliste jõudude või esemet poolt toetatuna (võimalik hõõrdejõu mõju), siis kokku maksimaalselt kuni **[3 p]**, võivad lisanduda lisapunktid õigete avaldiste eest.

KUI mõõtmise viidi läbi vees lapikult lebava pliiatsiga, siis kokku maksimaalselt kuni [1 p], võivad lisanduda lisapunktid õigete avaldiste eest.

**E2.** (VEEREHÕÕRE) (12 p.) Autor: Jaan Kalda

Lükkame pliiatsi piki lauda ühes suunas veerema ja mõõdame veeremise aja (kuni seiskumiseni)  $t_1$  ning läbitud teepikkuse  $l_1$ ; nendest andmete põhjal saame leida pliiatsi kiirenduse (mis on konstantne, sest pliiatsile mõjuvad jõud püsivad konstantsena):

$$l_1 = a_1 t_1^2 / 2 \Rightarrow a_1 = 2l_1 / t_1^2.$$

Kuivõrd veerehõõrdetegur on väga väike, siis on teepikkus väga tundlik laua kalde suhtes ning laud pole kunagi ideaalselt horisontaalne ning pliiatsile mõjub ka mingisugune raskusjõu horisontaalkomponent  $F_r$ . Samas on laua kaldenurk nii väike, et kaldenurga koosinuse võime lugeda võrdseks ühega, st toereaktsioon on võrdne pliiatsi kaaluga  $N = mg$ . Seetõttu võime kirjutada võrrandi

$$ma_1 = \mu_v mg + F_r,$$

kus  $a_1$  tähistab pliiatsi kiirendust antud juhul. Korrates katset vastassuunas veeretamisega muudab  $F_r$  märki:

$$ma_2 = \mu_v mg - F_r,$$

Liites kaks võrdust kokku saame

$$m(a_1 + a_2) = \mu_v mg,$$

millest

$$\mu_v = (a_1 + a_2) / 2g.$$

Kasutades eelpooltoodud avaldist kiiruse jaoks saame

$$\mu_v = \left( \frac{l_1}{t_1^2} + \frac{l_2}{t_2^2} \right) \frac{1}{g}.$$

Suurema täpsuse huvides kordame katset mitu (vähemalt 5) korda ning keskmistame tulemused, see aitab vähendada juhuslikku viga.

Lükkame pliiatsi piki lauda ühes suunas veerema ja mõõdame veeremise aja (kuni seiskumiseni)  $t_1$  ning läbitud teepikkuse  $l_1$ ; nendest andmete põhjal saame leida pliiatsi kiirenduse (mis on konstantne, sest pliiatsile mõjuvad jõud püsivad konstantsena):

$$l_1 = a_1 t_1^2 / 2 \Rightarrow a_1 = 2l_1 / t_1^2.$$

Kuivõrd veerehõõrdetegur on väga väike, siis on teepikkus väga tundlik laua kalde suhtes ning laud pole kunagi ideaalselt horisontaalne ning pliiatsile mõjub ka mingisugune raskusjõu horisontaalkomponent  $F_r$ . Samas on laua kaldenurk nii väike, et kaldenurga koosinuse võime lugeda võrdseks ühega, st toereaktsioon on võrdne pliiatsi kaaluga  $N = mg$ . Seetõttu võime kirjutada võrrandi

$$ma_1 = \mu_v mg + F_r,$$

kus  $a_1$  tähistab pliiatsi kiirendust antud juhul. Korrates katset vastassuunas veeretamisega muudab  $F_r$  märki:

$$ma_2 = \mu_v mg - F_r,$$

Liites kaks võrdust kokku saame

$$m(a_1 + a_2) = \mu_v mg,$$

millest

$$\mu_v = (a_1 + a_2)/2g.$$

Kasutades eelpooltoodud avaldist kiiruse jaoks saame

$$\mu_v = \left( \frac{l_1}{t_1^2} + \frac{l_2}{t_2^2} \right) \frac{1}{g}.$$

Suurema täpsuse huvides kordame katset mitu (vähemalt 5) korda ning keskmistame tulemused, see aitab vähendada juhuslikku viga.

*Hindamisskeem:*

- Idee veeretada pliiatsit ja mõõta vahemaad ning aega — [2 p].
- Leitud  $l_1 = at^2/2$  — [2 p].
- Leitud  $N = mg$  — [1 p].
- Leitud  $ma = \mu_v mg - F_r$  — [1 p] (ka siis, kui  $F_r$  puudub).
- Mõõtmistulemuste ja toodud valemite abil õigesti leitud  $\mu_v$  — [2 p].
- Katse läbi viidud mõlemas suunas veeretades — [1 p].
- Mõlemas suunas veeretades  $\mu_v$  arvutatud õigesti (st  $\mu_v = (a_1 + a_2)/2g$ ) — [1 p].
- Katse sooritatud vähemalt viiel korral — [2 p]; (3-4 korda — [1 p]).

Konkreetsed arvud sõltuvad pliiatsist ja lauast, aga ajad võiksid tulla kahekolme sekundi suurusjärku ning vahemaad mõnekümne sentimeetri suurusjärku. Väiksemad väärtused oleksid võimalikud, kuid siis tuleb aja mõõtmise suhteline viga väga suur; suuremaid väärtusi piirab laua pikkus. Mõistlik  $\mu_v$  väärtus võiks tulla orienteeruvalt vahemikus 0,005 kuni 0,02.