Piirkonnavoor 2023

Ülesanded **1**
- 7. klass 1
- 8. klass 3
- 9. klass 5
- 7. klass 7
- 8. klass 8
- 9. klass 9
- 10. klass 10
- 11. klass 11
- 12. klass 12

Ülesanded vene keeles **13**
- 7 класс 13
- 8 класс 15
- 9 класс 17
- 7 класс 19
- 8 класс 20
- 9 класс 21
- 10 класс 22
- 11 класс 23
- 12 класс 24

Lahendused **25**
- 7. klass 25
- 8. klass 28
- 9. klass 31
- 7. klass 34
- 8. klass 36
- 9. klass 39
- 10. klass 43
- 11. klass 47
- 12. klass 54

Põhikooli hindamisjuhised **61**
- Üldjuhend 61
- 7. klass 63
- 8. klass 64
- 9. klass 65
- 7. klass 66
- 8. klass 67
- 9. klass 69

Gümnaasiumi hindamisskeemid **71**
- 10. klass 71
- 11. klass 75
- 12. klass 79

Põhikooli kommentaarid **85**
- Kokkuvõte 85
- 7. klass 87
- 8. klass 88
- 9. klass 89

Võistluskomplekti valmimisse panustasid:

Elts Abel
Mart Abel
Maksim Ivanov
Urve Kangro
Oleg Košik
Aleksei Lissitsin
Härmel Nestra
Erik Paemurru
Sandra Schumann
Marko Tsengov
Birgit Veldi
Raili Vilt

Eesti 70. matemaatikaolümpiaad

1. veebruar 2023 Piirkonnavoor **7. klass**

I osa. *Lahendamisaega on 40 minutit.*
Sellele lehele kirjuta ainult vastused, lahendamiseks võid kasutada lisapaberit.
Iga ülesande õige vastus annab 2 punkti.
Elektroonilised ega kirjalikud abivahendid ei ole lubatud.

1. Arvuta: $1248 \cdot 12 : 48 =$ .....

2. Leia vähim naturaalarv a, mille numbrite summa on 20 ning mille korral arv $a + 7$ jagub arvuga 5.

.....

3. Leia arv $a+2b-3c$, kui arv a on 2 võrra väiksem arvust b ja 3 võrra väiksem arvust c.

.....

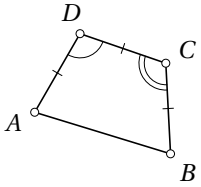
4. Reas on kolm korvi, milles on kokku 50 õuna. Kahes vasakpoolseimas korvis on kokku 40 õuna ja kahes parempoolseimas kokku 30 õuna. Mitu õuna on kahes äärmises korvis kokku?

.....

5. Leia naturaalarv, mille ruut on sada korda suurem kui miljon.

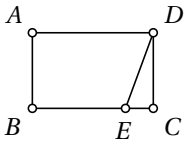
.....

6. Nelinurga $ABCD$ külgede AD, DC ja CB pikkused on võrdsed ning nurkade ADC ja DCB suurused on vastavalt 100° ja 110°. Leia nelinurga $ABCD$ diagonaalide vahelise teravnurga suurus.



. . . . . .

7. Punkt E ristküliku $ABCD$ küljel BC valitakse nii, et nelinurga $ABED$ pindala on 7 korda suurem kolmnurga ECD pindalast. Mitu korda on lõigu BE pikkus suurem lõigu EC pikkusest?

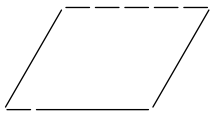


. . . . . .

8. Mitu erinevat võimalust on arvus 2023 ühe numbri asendamiseks mõne teise numbriga nii, et saadud arv jaguks arvuga 3?

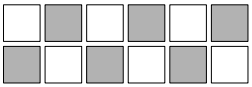
. . . . . .

9. On kahe pikkusega tikke: lühikesed ja pikad. Kuuest lühikesest ja kolmest pikast tikust moodustatakse joonisel olev rööpkülik. Leia rööpküliku ümbermõõt, kui pika tiku pikkus on 7 cm.



. . . . . .

10. Joonisel on antud üleni hallidest ja valgetest kuubikutest moodustatud kujundi pealtvaade. Ühe kuubiku saab kujundist ära võtta, kui tema vähemalt 3 tahku on nähtavad. Kõigi kuubikute alumised tahud asuvad ühel ja samal tasapinnal ning ei ole nähtavad. Milline on vähim arv valgeid kuubikuid, mis tuleb ära võtta selleks, et saaks ära võtta kõik hallid kuubikud?



. . . . . .

Eesti 70. matemaatikaolümpiaad

1. veebruar 2023 Piirkonnavoor **8. klass**

I osa. *Lahendamisaega on 40 minutit.*
Sellele lehele kirjuta ainult vastused, lahendamiseks võid kasutada lisapaberit.
Iga ülesande õige vastus annab 2 punkti.
Elektroonilised ega kirjalikud abivahendid ei ole lubatud.

1. Esita taandumatu murruna: $\dfrac{7 \cdot 88 + 8 \cdot 77}{77 \cdot 88} = \ldots\ldots\ldots\ldots$

2. Leia arvust 80 väiksem naturaalarv, millega arv 80 jagub, aga arv 120 ei jagu.

.....

3. Leia arv x, kui arvud a ja b on erinevad ning kehtib $ax - 8b = bx - 8a$.

.....

4. Annil on 3 korda rohkem komme kui Bennol. Bennol on 8 kommi vähem kui Annil. Mitu kommi on Annil ja Bennol kokku?

.....

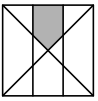
5. Kolmest järjestikusest naturaalarvust keskmine annab arvuga 9 jagamisel jäägi 2. Millise jäägi annab nende kolme arvu korrutis jagamisel arvuga 9?

.....

6. Nürinurkse kolmnurga teravnurga poolitaja jaotab selle kolmnurga kaheks väiksemaks nürinurkseks kolmnurgaks, mille nürinurkade suurused on vastavalt 130° ja 150°. Leia esialgse nürinurkse kolmnurga väikseima nurga suurus.

. . . . . .

7. Ruut küljepikkusega 6 cm on külgedega paralleelsete lõikudega jaotatud 3 võrdseks osaks, mis on ruudu kahe diagonaaliga omakorda jaotatud osadeks. Leia halliks värvitud osa pindala.



. . . . . .

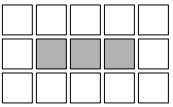
8. Mitu sellist neljakohalist naturaalarvu, mille numbrid on 2, 0, 2 ja 3 mingis järjekorras, saab moodustada?

. . . . . .

9. Traat pikkusega 12 cm lõigati 12 jupiks. Neist moodustati neljaks väiksemaks ristkülikuks jaotatud suur ristkülik. Leia suure ristküliku ümbermõõt.

. . . . . .

10. Joonisel on antud üleni hallidest ja valgetest kuubikutest moodustatud kujundi pealtvaade. Ühe kuubiku saab kujundist ära võtta, kui tema vähemalt 3 tahku on nähtavad. Kõigi kuubikute alumised tahud asuvad ühel ja samal tasapinnal ning ei ole nähtavad. Milline on vähim arv valgeid kuubikuid, mis tuleb ära võtta selleks, et saaks ära võtta kõik hallid kuubikud?



. . . . . .

Eesti 70. matemaatikaolümpiaad

1. veebruar 2023 Piirkonnavoor **9. klass**

I osa. *Lahendamisaega on 40 minutit.*
Sellele lehele kirjuta ainult vastused, lahendamiseks võid kasutada lisapaberit.
Iga ülesande õige vastus annab 2 punkti.
Elektroonilised ega kirjalikud abivahendid ei ole lubatud.

1. Arvuta: $1236 : (12 + 36) \cdot (12 - 36) =$ .....

2. Leia vähim naturaalarv n, mille korral arv $97n + 8$ jagub arvuga 10.

.....

3. Teada on, et $a = 2b$ ja $3b = 4c$, kus a, b ja c on nullist erinevad arvud. Leia arv $\dfrac{a+b}{c}$.

.....

4. Kolme lauamängu A, B ja C hindade kohta on teada, et mängud B ja C maksavad kokku 50 eurot rohkem kui mäng A ning mängud A ja B maksavad kokku 60 eurot rohkem kui mäng C. Kui palju maksab mäng B?

.....

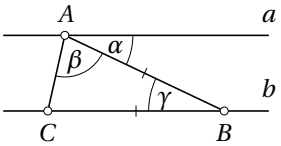
5. Kolm erinevat naturaalarvu a, b ja c annavad kõik arvuga 9 jagamisel jäägi 4. Millise jäägi annab korrutis abc jagamisel arvuga 9?

.....

6. Kui palju on arvust 2023 suuremaid neljakohalisi arve, mille numbrite summa on 7 ja milles on täpselt kaks numbrit 2?

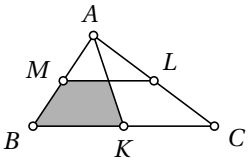
. . . . . .

7. Sirged a ja b on paralleelsed, lõigud CB ja AB on võrdse pikkusega. Joonisel märgitud nurkade suuruste α, β ja γ summa on 150°. Leia α.



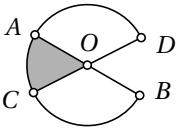
. . . . . .

8. Kolmnurga ABC pindala on $16\ \text{cm}^2$. Leia halliks värvitud ala pindala, kui AK on kolmnurga ABC mediaan ja LM on kolmnurga ABC kesklõik.



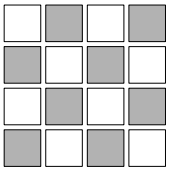
. . . . . .

9. Ringist diameetritega AB ja CD ja keskpunktiga O on välja lõigatud sektor BOD. Ringist alles jäänud osast moodustab halliks värvitud sektor COA ühe viiendiku. Kui suure osa moodustab sektor COA esialgsest ringist?



. . . . . .

10. Joonisel on antud üleni hallidest ja valgetest kuubikutest moodustatud kujundi pealtvaade. Ühe kuubiku saab kujundist ära võtta, kui tema vähemalt 3 tahku on nähtavad. Kõigi kuubikute alumised tahud asuvad ühel ja samal tasapinnal ning ei ole nähtavad. Milline on vähim arv valgeid kuubikuid, mis tuleb ära võtta selleks, et saaks ära võtta kõik hallid kuubikud?



. . . . . .

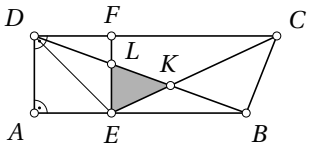
Eesti 70. matemaatikaolümpiaad

1. veebruar 2023 Piirkonnavoor **7. klass**

II osa. *Lahendamisaega on 2 tundi.*
Ülesannete lahendused kirjuta eraldi lehele.
Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti. Ainult vastusest ei piisa!
Elektroonilised ega kirjalikud abivahendid ei ole lubatud.

1. Leia nii vähim kui ka suurim neljakohaline naturaalarv, mis jagub iga oma numbriga ja milles numbrid ei kordu.

2. Nelinurgas $ABCD$ on külg AD risti külgedega AB ja CD. Külgedel AB ja CD valitakse vastavalt sellised punktid E ja F, mille korral $|EA| = |AD| = |DF|$. Nelinurga $ABCD$ diagonaal BD lõikab sirget CE punktis K ja sirget EF punktis L. On teada, et nurga BDC suurus moodustab $\frac{4}{9}$ nurga EDF suurusest ja nurga DCE suurus on 25% võrra suurem nurga BDF suurusest. Leia kolmnurga EKL nurkade suurused.



3. Poes on müügil 20 erinevat palli. Kõige odavam pall maksab 1 euro ja kõige kallim pall 20 eurot, kusjuures kõik pallid on erineva hinnaga ja maksavad täisarvu eurosid. Leia kõik võimalused jaotada need pallid 6 rühma nii, et igas rühmas olevate pallide kogumaksumus on sama, kusjuures ühes rühmas maksab kõige kallim pall 8 eurot, mingis teises rühmas aga 15 eurot.

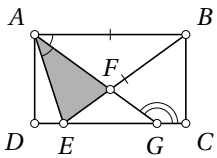
Eesti 70. matemaatikaolümpiaad

1. veebruar 2023 Piirkonnavoor **8. klass**

II osa. *Lahendamisaega on 2 tundi.*
Ülesannete lahendused kirjuta eraldi lehele.
Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti. Ainult vastusest ei piisa!
Elektroonilised ega kirjalikud abivahendid ei ole lubatud.

1. Pakis on 600 kaarti. Iga kaart on punane või sinine. Kaarte hakatakse teise pakki ümber laduma järjekorras punane, punane, sinine, punane, punane, sinine, punane, punane, sinine jne. Kui ümber on tõstetud 385 kaarti, siis ei saa enam sama värvide järgnevust jätkata. Mitme kaardi ümbertõstmise järel katkeks värvide järgnevus juhul, kui järjekord oleks olnud punane, sinine, sinine, punane, sinine, sinine, punane, sinine, sinine jne?

2. Ristküliku $ABCD$ pikemal küljel CD valitakse punkt E nii, et $|BE| = |AB|$. Nurga BAE poolitaja lõikab sirgeid BE ja CD vastavalt punktides F ja G. Nurga AGC suurus on 144°.



a) Leia kolmnurga AEF nurkade suurused.

b) Leia kolmnurga AEF ümbermõõt, kui lõigu DG pikkus on 8 cm.

3. Arvutimängus saab igal osalejal olla igal hetkel mingi naturaalarv punkte. Marko ja Tõnu said mängu sisenedes mingi arvu punkte boonuseks. Kui Marko saanuks boonuseks 2 korda vähem punkte kui ta tegelikult sai, siis Tõnul olnuks 25 boonuspunkti rohkem kui Markol. Kui aga Marko saanuks boonuseks 2 korda rohkem punkte kui ta tegelikult sai, siis Tõnul olnuks ikkagi 1 boonuspunkt rohkem. Mängu lõpus on ühel neist mängijatest punktide arv alguses saadud boonuspunktidest n korda suurem ja teisel n korda väiksem, kus n on mingi naturaalarv (mõlema mängija puhul sama). Leia kõik võimalused, mitu punkti saab mängu lõpuks olla Markol ja Tõnul kokku, kui on teada, et otsitav arv on suurem kui 100 ja väiksem kui 200.

Eesti 70. matemaatikaolümpiaad

1. veebruar 2023 Piirkonnavoor **9. klass**

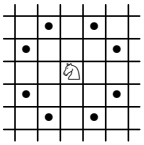
II osa. *Lahendamisaega on 4 tundi.*
Ülesannete lahendused kirjuta eraldi lehele.
Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti. Ainult vastusest ei piisa!
Elektroonilised ega kirjalikud abivahendid ei ole lubatud.

1. Tõesta, et iga mittenegatiivset täisarvu on võimalik esitada kujul $2a + b$, kus a ja b on mittenegatiivsed täisarvud, millest kumbki annab arvuga 4 jagades jäägi 0 või 1.

2. Tahvlil on täisarvud $-9, -8, -7, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$. Ühel sammul võib kustutada suvalised kaks tahvlil olevat arvu x ja y ja kirjutada asemele ühe arvu $xy + 2(x + y + 1)$. Nii toimitakse, kuni tahvlile jääb vaid üks arv. Leia kõik võimalused, milline arv võib jääda lõpuks tahvlile.

3. Olgu ABC erikülgne teravnurkne kolmnurk, mille kõrgused lõikuvad punktis H. Tõesta, et nurkade ACB ja AHB poolitajad on paralleelsed.

4. Mari ja Jüri mängivad malelaual mõõtmetega 8×9 järgmist mängu. Mängu alguses on Mari ratsu malelaua vasakul alumisel nurgaruudul ning Jüri ratsu paremal ülemisel nurgaruudul. Edasi hakkavad nad kordamööda tegema oma ratsudega malekäike (ratsu saab käia parajasti nendele ruutudele, mis asuvad temast horisontaalis ühe ja vertikaalis kahe ruudu või horisontaalis kahe ja vertikaalis ühe ruudu kaugusel nagu joonisel näidatud), seejuures Mari alustab. Jüri võidab, kui mõlema mängija ratsud satuvad korraga ühele ja samale ruudule (ükskõik kumma mängija käigu tulemusel). Kas Jüril on võimalik tagada võit sõltumata Mari vastumängust?



Eesti 70. matemaatikaolümpiaad

1. veebruar 2023 Piirkonnavoor **10. klass**

Lahendamisaega on 5 tundi.
Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti.
Elektroonilised ega kirjalikud abivahendid ei ole lubatud.

1. Sportlane ujub piki jõge ühest sillast teiseni pärivoolu 10 minutit, tagasi aga 50 minutit. Mõlemal korral ujub ta vee suhtes sama kiirusega. Mitu protsenti on sportlase kiirus vee suhtes suurem kui jõe voolu kiirus?

2. Paulil on 48 münti rohkem kui Liisal. Kui Liisa annaks Paulile teatud arvu oma münte, siis nende käes olevate müntide arvud erineksid 3 korda. Kui aga hoopis Paul annaks Liisale sama arvu oma münte, siis nende käes olevate müntide arvud erineksid 2 korda. Leia kõik võimalused, mitu münti saab olla Liisal.

3. Muutujate x ja y väärtused on sellised naturaalarvud, et avaldise $20x + 23y$ väärtus on 2023. Leia summa $x + y$ suurim ja vähim võimalik väärtus.

4. Tahvlile kirjutatakse 11 erinevat positiivset täisarvu. Neist kuue suurema arvu summa on 3 korda suurem nelja väiksema arvu summast. Leia vähim võimalik kõigi tahvlile kirjutatud arvude summa.

5. Kõõlnelinurga $ABCD$ küljel BC valitakse punkt E. Olgu F selline punkt, et $ACFE$ on rööpkülik. Olgu L sirgete AD ja EF lõikepunkt. Tõesta, et punktid B, D, E ja L asuvad ühel ringjoonel.

6. Rivis seisab 2023 erineva pikkusega inimest. Nimetame inimest *huvitavaks*, kui ta on kas rivis seisvate inimeste seas lühim või pikim või on rivis temast lühemaid ja pikemaid inimesi ühepalju. Kas võib kindlalt väita, et rivi keskel paiknev inimene on huvitav, kui

a) ühegi 1013 järjestikuse inimese seas pole lühim üks äärmistest?

b) iga 1013 järjestikuse inimese seas on lühim üks äärmistest?

c) iga 1013 järjestikuse inimese seas on nii lühim kui ka pikim üks äärmistest?

Eesti 70. matemaatikaolümpiaad

1. veebruar 2023 Piirkonnavoor **11. klass**

Lahendamisaega on 5 tundi.
Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti.
Elektroonilised ega kirjalikud abivahendid ei ole lubatud.

1. Risttahukas mõõtmetega $6 \times 8 \times 10$ pannakse kokku 480 ühikkuubist. Mitmel erineval viisil on võimalik selles valida kaks ühise tahuga ühikkuupi?

2. Ma mõtlesin ühe positiivse reaalarvu. Kui ma tõstsin selle arvu kuupi, siis ma sain sama tulemuse nagu siis, kui ma kolmveerandile mõeldud arvust liitsin mõeldud arvu ruudu. Leia kõik võimalused, millise arvu ma võisin mõelda.

3. Pool õuna kaalub 50 g võrra rohkem kui kolmandik pirni. Pool pirni kaalub 120 g võrra rohkem kui kolmandik ploomi. Õun, pirn ja mingi positiivne täisarv ploome kaaluvad kokku täpselt 1 kg. Kui palju kaalub ploom, kui on teada, et iga ploomi mass on üks ja sama täisarv gramme?

4. Tõesta, et mistahes reaalarvude x ja y korral

$$x^2 + 4 > (x - y)(y + 2).$$

5. Kõõlkuusnurgas $ABCDEF$ kehtivad võrdused $|FA| = |AB|$ ja $|CD| = |DE|$ ning võrratus $|BC| < |EF|$. Diagonaalid BF ja CE lõikavad diagonaali AD vastavalt punktides K ja L, diagonaalide BF ja CE pikendused aga lõikuvad punktis M. Tõesta, et kolmnurk KLM on võrdhaarne.

6. Arturil ja Karlil on algul kahe peale kokku 240 münti. Peetril ainsana kolmest poisist münte ei ole. Ühe käiguga annab kumbki kahest poisist, kellel on kummalgi rohkem münte kui kolmandal, viimasele täpselt poole oma müntidest. Pärast neljandat käiku on Karlil niisama palju münte kui alguses. Mitu münti on alguses Arturil?

Eesti 70. matemaatikaolümpiaad

1. veebruar 2023 Piirkonnavoor **12. klass**

Lahendamisaega on 5 tundi.
Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti.
Elektroonilised ega kirjalikud abivahendid ei ole lubatud.

1. Kui kauba algset hinda vähendada $4a$ protsendi võrra, siis kauba hind väheneb 20 euro võrra. Kui uut hinda suurendada $5a$ protsendi võrra, siis see tõuseb 23 euro võrra. Leia kauba esialgne hind.

2. Kas leiduvad sellised kaks reaalarvu, mille vahe on 40 ning aritmeetilise ja geomeetrilise keskmise vahe on 8?

3. Positiivsed täisarvud n ja m on sellised, et $\sqrt{n}+\sqrt{m}$ on ratsionaalarv. Tõesta, et n ja m on täisarvude ruudud.

4. Peres on 7 last. Iga laps sai jõuludeks kommipaki. Kui lapsed oma kommid üle lugesid, selgus, et igaüks oli saanud erineva arvu komme, kõigil kokku oli aga täpselt 100 kommi. Tõesta, et leidub 3 last, kes said kokku vähemalt 50 kommi.

5. Võrdkülgse kolmnurga igale küljele kui diameetrile joonestatakse ringjoon. Leia kõigi ringjoonte sisse jääva ala pindala, kui kolmnurga küljepikkus on a.

6. Olgu n positiivne täisarv. Jüri ja Mari mängivad arvteljel järgmist mängu. Kummalgi mängijal on nupp, mis on algul nullpunktis. Oma käigul sooritab mängija vabal valikul ühe järgnevast kahest tegevusest:

1) liigutab enda nupu ühe ühiku võrra positiivses või negatiivses suunas;
2) tõstab vastase nupu üle enda nupu teisele poole niisama kaugele (kui mängija nupp on punktis a ning vastase nupp on enne käiku punktis b, siis pärast käiku on vastase nupp punktis $2a-b$).

Mängijad sooritavad vaheldumisi kumbki n käiku, alustab Jüri. Võidab see mängija, kelle nupp on mängu lõpuks nullpunktist kaugemal. Kumb mängija saab võita vastase iga vastumängu korral, kui võrdse kauguse puhul nullpunktist võidab:

a) Mari;
b) Jüri?

70-я Олимпиада Эстонии по математике

1 февраля 2023 г. Региональный тур **7 класс**

I часть. *Время, отводимое для решения: 40 минут.*
На этом листке написать только ответы, для решения можно использовать дополнительную бумагу.
Верный ответ каждой задачи даёт 2 балла.
Вспомогательные письменные материалы или электронные приборы не разрешены.

1. Вычислить: $1248 \cdot 12 : 48 =$ .....

2. Найти наименьшее натуральное число a, сумма цифр которого равна 20 и при котором число $a + 7$ делится на число 5.

.....

3. Найти число $a + 2b - 3c$, если число a на 2 меньше числа b и на 3 меньше числа c.

.....

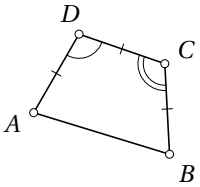
4. В ряд стоят три корзины, в которых всего 50 яблок. В двух стоящих левее корзинах всего 40 яблок, а в двух стоящих правее корзинах всего 30 яблок. Сколько всего яблок в двух крайних корзинах?

.....

5. Найти натуральное число, квадрат которого в сто раз больше миллиона.

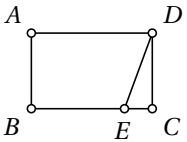
.....

6. В четырехугольнике $ABCD$ длины сторон AD, DC и CB равны между собой, а величины углов ADC и DCB равняются соответственно 100° и 110°. Найти величину острого угла между диагоналями четырехугольника $ABCD$.



. . . . . .

7. На стороне BC прямоугольника $ABCD$ выбрана точка E так, что площадь четырехугольника $ABED$ в 7 раз больше площади треугольника ECD. Во сколько раз длина отрезка BE больше длины отрезка EC?

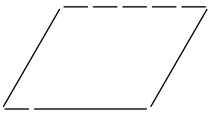


. . . . . .

8. Сколько всего различных возможностей для замены в числе 2023 одной цифры на другую так, чтобы полученное число делилось на число 3?

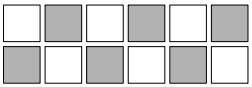
. . . . . .

9. Имеются спички двух длин: короткие и длинные. Из шести коротких и трех длинных спичек составили показанный на рисунке параллелограмм. Найти периметр этого параллелограмма, если длина одной длинной спички равна 7 см.



. . . . . .

10. На рисунке показан вид сверху тела, образованного из серых (все грани серые) и белых (все грани белые) кубиков. Кубики из тела можно забирать по одному, но только тогда, когда у забираемого кубика видны хотя бы 3 его грани. Нижние грани всех кубиков лежат на одной и той же плоскости, и они не видны. Найти наименьшее количество белых кубиков, которые необходимо забрать из тела для того, чтобы можно было забрать из него все серые кубики.



. . . . . .

70-я Олимпиада Эстонии по математике

1 февраля 2023 г. Региональный тур **8 класс**

I часть. *Время, отводимое для решения: 40 минут.*
На этом листке написать только ответы, для решения можно использовать дополнительную бумагу.
Верный ответ каждой задачи даёт 2 балла.
Вспомогательные письменные материалы или электронные приборы не разрешены.

1. Представить в виде несократимой дроби: $\dfrac{7 \cdot 88 + 8 \cdot 77}{77 \cdot 88} = \ldots\ldots\ldots\ldots$

2. Найти натуральное число, которое само меньше числа 80 и на которое число 80 делится, а число 120 не делится.

$\ldots\ldots\ldots\ldots$

3. Найти число x, если действует равенство $ax - 8b = bx - 8a$, где a и b различные числа.

$\ldots\ldots\ldots\ldots$

4. У Ани конфет в 3 раза больше, чем у Васи. У Васи на 8 конфет меньше, чем у Ани. Сколько конфет у Ани и Васи вместе?

$\ldots\ldots\ldots\ldots$

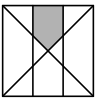
5. Среднее из трех последовательных натуральных чисел дает при делении на число 9 в остатке 2. Какое число в остатке даст произведение этих же трех чисел при делении на число 9?

$\ldots\ldots\ldots\ldots$

6. Биссектриса острого угла тупоугольного треугольника делит этот треугольник на два меньших тупоугольных треугольника, величины тупых углов которых равны соответственно 130° и 150°. Найти величину наименьшего угла изначального тупоугольного треугольника.

. . . . . .

7. Квадрат с длиной стороны 6 см поделили двумя параллельными сторонам квадрата отрезками на 3 равные части. Затем провели обе диагонали квадрата. Найти площадь покрашенной в серый цвет фигуры.



. . . . . .

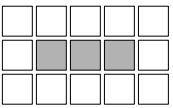
8. Сколько всего имеется различных четырехзначных натуральных чисел, у которых цифры 2, 0, 2 и 3 записаны в каком-то порядке?

. . . . . .

9. Проволоку длиной 12 см разрезали на 12 кусочков. Из них образовали поделенный на четыре меньших прямоугольника большой прямоугольник. Найти периметр большого прямоугольника.

. . . . . .

10. На рисунке показан вид сверху тела, образованного из серых (все грани серые) и белых (все грани белые) кубиков. Кубики из тела можно забирать по одному, но только тогда, когда у забираемого кубика видны хотя бы 3 его грани. Нижние грани всех кубиков лежат на одной и той же плоскости, и они не видны. Найти наименьшее количество белых кубиков, которые необходимо забрать из тела для того, чтобы можно было забрать из него все серые кубики.



. . . . . .

70-я Олимпиада Эстонии по математике

1 февраля 2023 г. Региональный тур **9 класс**

I часть. *Время, отводимое для решения: 40 минут.*
На этом листке написать только ответы, для решения можно использовать дополнительную бумагу.
Верный ответ каждой задачи даёт 2 балла.
Вспомогательные письменные материалы или электронные приборы не разрешены.

1. Вычислить: $1236 : (12 + 36) \cdot (12 - 36) =$ .....

2. Найти наименьшее натуральное число n, при котором число $97n + 8$ делится на число 10.

.....

3. Известно, что $a = 2b$ и $3b = 4c$, где a, b и c отличные от нуля числа. Найти число $\dfrac{a+b}{c}$.

.....

4. Про стоимость настольных игр A, B и C известно, что игры B и C стоят вместе на 50 евро больше, чем игра A, а игры A и B стоят вместе на 60 евро больше, чем игра C. Сколько стоит игра B?

.....

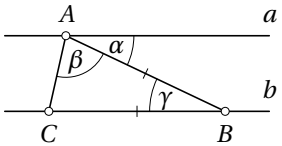
5. Каждое из трех различных натуральных чисел a, b и c дает при делении на число 9 в остатке 4. Какое число в остатке даст произведение abc при делении на число 9?

.....

6. Сколько всего имеется таких четырехзначных чисел, каждое из которых больше числа 2023, имеет сумму цифр 7 и ровно две цифры 2 в своей записи?

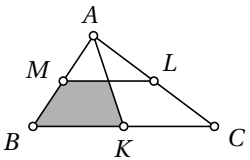
. . . . . .

7. Прямые a и b параллельны, а отрезки CB и AB имеют равную длину. Сумма величин обозначенных на рисунке углов α, β и γ равна 150°. Найти величину угла α.



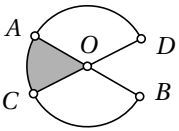
. . . . . .

8. Площадь треугольника ABC равна 16 см^2. Найти площадь закрашенной в серый цвет фигуры, если AK является медианой треугольника ABC, а LM является средней линией треугольника ABC.



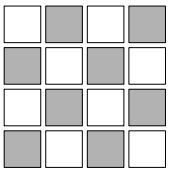
. . . . . .

9. Из круга с центром O и с диаметрами AB и CD вырезали сектор BOD. Закрашенный в серый цвет сектор COA составляет одну пятую часть от оставшейся части круга. Какую часть составляет сектор COA от изначального круга?



. . . . . .

10. На рисунке показан вид сверху тела, образованного из серых (все грани серые) и белых (все грани белые) кубиков. Кубики из тела можно забирать по одному, но только тогда, когда у забираемого кубика видны хотя бы 3 его грани. Нижние грани всех кубиков лежат на одной и той же плоскости, и они не видны. Найти наименьшее количество белых кубиков, которые необходимо забрать из тела для того, чтобы можно было забрать из него все серые кубики.



. . . . . .

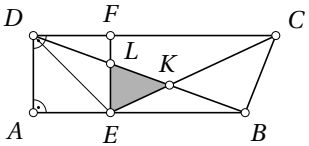
70-я Олимпиада Эстонии по математике

1 февраля 2023 г. Региональный тур **7 класс**

II часть. *Время, отводимое для решения: 2 часа.*
Решения задач написать на отдельном листе.
Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи даёт 7 баллов. Написать только ответ недостаточно!
Вспомогательные письменные материалы или электронные приборы не разрешены.

1. Найти как наименьшее, так и наибольшее четырехзначное натуральное число, которое делится на каждую свою цифру и в котором цифры не повторяются.

2. В четырехугольнике $ABCD$ сторона AD перпендикулярна сторонам AB и CD. На сторонах AB и CD выбраны соответственно точки E и F так, что $|EA| = |AD| = |DF|$. Диагональ BD четырехугольника $ABCD$ пересекает прямую CE в точке K и прямую EF в точке L. Известно, что величина угла BDC составляет $\frac{4}{9}$ от величины угла EDF, а величина угла DCE на 25% больше величины угла BDF. Найти величины углов треугольника EKL.



3. В магазине в продаже 20 различных мячей. Самый дешевый из них стоит 1 евро, а самый дорогой 20 евро, причем цены всех мячей различны и равны целому числу евро. Найти все возможности поделить эти 20 мячей на 6 групп так, чтобы общая стоимость мячей в каждой группе была одинаковой, чтобы в одной группе самый дорогой мяч стоил 8 евро, а в какой-то другой группе самый дорогой мяч стоил 15 евро.

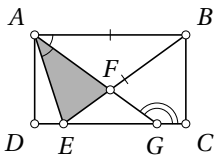
70-я Олимпиада Эстонии по математике

1 февраля 2023 г. Региональный тур **8 класс**

II часть. *Время, отводимое для решения: 2 часа.*
Решения задач написать на отдельном листе.
Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи даёт 7 баллов. Написать только ответ недостаточно!
Вспомогательные письменные материалы или электронные приборы не разрешены.

1. В колоде было всего 600 карт. Каждая карта была красная или синяя. Карты стали перекладывать в новую колоду в следующем порядке: красная, красная, синяя, красная, красная, синяя, красная, красная, синяя и так далее. Когда в новую колоду переложили 385 карт, то для продолжения не оказалось карты нужного цвета. Если бы карты перекладывали в новую колоду в следующем порядке: красная, синяя, синяя, красная, синяя, синяя, красная, синяя, синяя и так далее, то после перекладывания в нее какого количества карт снова для продолжения не оказалось бы карты нужного цвета?

2. На большей стороне CD прямоугольника $ABCD$ выбрана точка E так, что $|BE| = |AB|$. Биссектриса угла BAE пересекает прямые BE и CD соответственно в точках F и G. Величина угла AGC равна 144°.



а) Найти величины углов треугольника AEF.

б) Найти периметр треугольника AEF, если длина отрезка DG равна 8 см.

3. У каждого участника компьютерной игры в любой момент некоторое натуральное число очков. Миша и Тимур, войдя в игру, сразу получили некоторое число бонусных очков. Если бы Миша получил в виде бонусов в 2 раза меньше очков, чем он получил на самом деле, то у Тимура было бы на 25 бонусных очков больше, чем у Миши. А если бы Миша получил в виде бонусов в 2 раза больше очков, чем он получил на самом деле, то все равно у Тимура было бы на 1 бонусное очко больше, чем у Миши. В конце игры количество очков у одного из них оказалось в n раз больше, а у другого в n раз меньше в начале игры полученного им количества бонусных очков, где n — некоторое натуральное число (одинаковое для обоих игроков). Какое общее количество очков могло в конце игры оказаться у Миши и Тимура вместе, если известно, что это количество больше числа 100 и меньше числа 200? Найти все возможности.

70-я Олимпиада Эстонии по математике

1 февраля 2023 г. Региональный тур **9 класс**

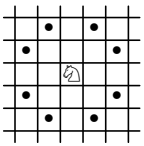
II часть. *Время, отводимое для решения: 4 часа.*
Решения задач написать на отдельном листе.
Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи даёт 7 баллов. Написать только ответ недостаточно!
Вспомогательные письменные материалы или электронные приборы не разрешены.

1. Доказать, что каждое неотрицательное целое число можно представить в виде $2a+b$, где a и b — неотрицательные целые числа, каждое из которых даёт при делении на число 4 остаток 0 или 1.

2. На доске записаны целые числа $-9, -8, -7, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$. За один шаг можно стереть любые два числа x и y на доске и написать вместо них одно число $xy+2(x+y+1)$. Это делается до тех пор, пока на доске не останется только одно число. Найти все возможности, какое число может остаться в конце на доске.

3. Пусть ABC — разносторонний остроугольный треугольник, высоты которого пересекаются в точке H. Доказать, что биссектрисы углов ACB и AHB параллельны.

4. Маша и Юра играют на шахматной доске 8×9 в следующую игру. В начале игры конь Маши находится в левой нижней угловой клетке шахматной доски, а конь Юры — в правой верхней угловой клетке. Затем они по очереди совершают своими конями шахматные ходы (конь может перемещаться на клетки, находящиеся от него на расстоянии одной клетки по горизонтали и двух клеток по вертикали, или двух клеток по горизонтали и одной клетки по вертикали, как показано на рисунке), при этом начинает Маша. Юра выиграет, если кони обоих игроков окажутся одновременно на одной клетке (в результате хода любого из игроков). Может ли Юра гарантировать себе победу независимо от игры Маши?



70-я Олимпиада Эстонии по математике

1 февраля 2023 г. Региональный тур **10 класс**

Время, отводимое для решения: 5 часов.
Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи даёт 7 баллов.
Вспомогательные письменные материалы или электронные приборы не разрешены.

1. Спортсмен плывёт по реке от одного моста до другого по течению 10 минут, а обратно 50 минут. В обоих случаях он плывёт относительно воды с одинаковой скоростью. На сколько процентов скорость спортсмена относительно воды больше скорости течения реки?

2. У Пауля на 48 монет больше, чем у Лизы. Если Лиза отдаст Паулю определенное количество своих монет, то количество монет у них будет отличаться в 3 раза. Если бы в свою очередь Пауль отдал Лизе такое же количество своих монет, то количество монет у них отличалось бы в 2 раза. Найти все возможности, сколько монет может быть у Лизы.

3. Значениями переменных x и y являются такие натуральные числа, что значение выражения $20x + 23y$ равно 2023. Найти наибольшее и наименьшее возможное значение суммы $x + y$.

4. На доске записаны 11 различных положительных целых чисел. Сумма шести наибольших чисел в 3 раза больше суммы четырёх наименьших чисел. Найти наименьшую возможную сумму всех чисел, записанных на доске.

5. На стороне BC вписанного четырёхугольника $ABCD$ отмечена точка E. Пусть точка F такая, что $ACFE$ — параллелограмм. Пусть L — точка пересечения прямых AD и EF. Доказать, что точки B, D, E и L лежат на одной окружности.

6. В ряду стоят 2023 человека разного роста. Мы назовём человека *интересным*, если он среди стоящих в ряду людей либо самый низкий, либо самый высокий, или если в ряду равное количество более низких и более высоких людей, чем он сам. Можно ли утверждать, что человек, стоящий по центру ряда, интересен, если

а) для никаких 1013 стоящих подряд людей не является самый низкий из них одним из крайних?

б) для любых 1013 стоящих подряд людей является самый низкий из них одним из крайних?

в) для любых 1013 стоящих подряд людей является как самый низкий из них, так и самый высокий одним из крайних?

70-я Олимпиада Эстонии по математике

1 февраля 2023 г. Региональный тур **11 класс**

Время, отводимое для решения: 5 часов.
Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи даёт 7 баллов.
Вспомогательные письменные материалы или электронные приборы не разрешены.

1. Прямоугольный параллелепипед размерами $6 \times 8 \times 10$ составлен из 480 единичных кубов. Сколькими различными способами можно в нём выбрать два единичных куба с общей гранью?

2. Я задумал одно положительное действительное число. Когда я возвёл его в куб, я получил такой же результат, как и тогда, когда я прибавил к трём четвертям задуманного числа его квадрат. Найти все возможности того, какое число я мог задумать.

3. Пол-яблока весит на 50 г больше, чем треть груши. Полгруши весит на 120 г больше, чем треть сливы. Яблоко, груша и некоторое положительное целое число слив весят вместе ровно 1 кг. Сколько весит слива, если известно, что масса каждой сливы составляет одно и то же целое число грамм?

4. Доказать, что для любых действительных чисел x и y выполняется

$$x^2 + 4 > (x - y)(y + 2).$$

5. Для вписанного шестиугольника $ABCDEF$ известно, что $|FA| = |AB|$ и $|CD| = |DE|$, а также $|BC| < |EF|$. Диагонали BF и CE пересекают диагональ AD соответственно в точках K и L, а продолжения диагоналей BF и CE пересекаются в точке M. Доказать, что треугольник KLM равнобедренный.

6. Вначале у Артура и Карла на двоих всего 240 монет. Из трёх мальчиков только у Пети нет монет. На одном ходу оба мальчика, у каждого из которых больше монет, чем у третьего, отдают последнему ровно половину своих монет. После четвёртого хода у Карла оказывается столько же монет, сколько и вначале. Сколько монет вначале у Артура?

70-я Олимпиада Эстонии по математике

1 февраля 2023 г. Региональный тур **12 класс**

Время, отводимое для решения: 5 часов.
Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи даёт 7 баллов.
Вспомогательные письменные материалы или электронные приборы не разрешены.

1. Если начальную цену товара уменьшить на $4a$ процента, то цена товара уменьшится на 20 евро. Если новую цену товара увеличить на $5a$ процентов, то она вырастет на 23 евро. Найти первоначальную цену товара.

2. Найдутся ли такие два действительных числа, разность которых равна 40, а разность их арифметического и геометрического средних равна 8?

3. Положительные целые числа n и m таковы, что число $\sqrt{n}+\sqrt{m}$ рационально. Доказать, что n и m являются квадратами целых чисел.

4. В семье — 7 детей. На Новый Год каждый ребёнок получил коробку конфет. Когда дети пересчитали свои конфеты, то оказалось, что каждый получил различное число конфет, причём у них всех вместе оказалось ровно 100 конфет. Доказать, что найдутся 3 ребёнка, которые все вместе получили не меньше 50 конфет.

5. Взяв каждую сторону равностороннего треугольника как диаметр, рисуются три окружности. Найти площадь области внутри всех этих окружностей, если длина стороны треугольника равна a.

6. Дано положительное целое число n. Вася и Маша играют в следующую игру на числовой оси. У каждого из игроков есть фишка, стоящая вначале в точке отсчёта. На своём ходу игрок по своему выбору совершает одно из следующих двух действий:

1) передвигает свою фишку на один в положительном или отрицательном направлении;
2) переставляет фишку противника через свою фишку в другую сторону на такое же расстояние (если фишка игрока стоит в точке a, а фишка противника до хода стоит в точке b, то после хода она будет стоять в точке $2a-b$).

Игроки делают по-очереди n ходов каждый, причём начинает Вася. Выигрывает тот игрок, чья фишка в конце игры окажется дальше от точки отсчёта. Кто из игроков может выиграть при любой игре противника, если в случае равного расстояния от точки отсчёта выигрывает:

а) Маша;
б) Вася?

Eesti 70. matemaatikaolümpiaad

1. veebruar 2023 Piirkonnavoor **7. klass**

I osa vastused

1. 312.

2. 398.

3. -5.

4. 30.

5. 10000.

6. 75°.

7. 3.

8. 12.

9. 31,5 cm.

10. 2.

Lahendused

1. Kuna $12 : 48 = \frac{1}{4}$, siis $1248 \cdot 12 : 48 = \frac{1248}{4} = 312$.

2. *Lahendus 1.* Arv jagub arvuga 5 parajasti siis, kui tema viimane number on kas 0 või 5. Seega lõpeb arv a kas numbriga 3 või numbriga 8. Lõpunumbri 3 korral on ülejäänud numbrite summa 17 ning vähim selline arvudest on 893. Lõpunumbri 8 korral on ülejäänud numbrite summa 12 ja vähim selline arv oleks 398. Kuna see on varem leitud arvust väiksem, siis 398 ongi otsitav.

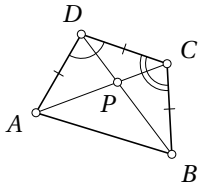
Lahendus 2. Naturaalarvudest, mis on väiksemad kui 300, on arvul 299 numbrite summa suurim ja see on 20. Kuid arv $299 + 7$ ei jagu arvuga 5. Arvudest 300 kuni 399 on numbrite summa 20 arvudel 389 ja 398, kuid arv $389 + 7$ ei jagu arvuga 5. Arv $398 + 7$ aga jagub arvuga 5, mistõttu otsitav arv on 398.

3. Tingimuste põhjal $b = a + 2$ ja $c = a + 3$. Seega

$$a + 2b - 3c = a + 2(a + 2) - 3(a + 3) = a + 2a + 4 - 3a - 9 = 4 - 9 = -5.$$

4. Olgu kahes äärmises korvis kokku x õuna. Siis $40 + 30 + x = 2 \cdot 50 = 100$ (iga korvi õunu on arvestatud topelt). Seega $x = 30$.

5. Sada on 10^2, miljon on 10^6. Otsitava arvu ruut on seega $10^2 \cdot 10^6$ ehk 10^8. Arv ise on 10^4 ehk 10000.



Joonis 1

6. Kuna $|AD| = |DC|$, siis $\angle DAC = \angle DCA = \dfrac{180^\circ - \angle ADC}{2} = 40^\circ$. Kuna $|DC| = |CB|$, siis $\angle CDB = \angle CBD = \dfrac{180^\circ - \angle DCB}{2} = 35^\circ$.

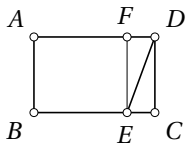
Olgu nelinurga $ABCD$ diagonaalide lõikepunkt P (joonis 1). Eelneva põhjal $\angle DCP = 40^\circ$ ja $\angle CDP = 35^\circ$, mistõttu $\angle DPA = 40^\circ + 35^\circ = 75^\circ$. Kuna $75^\circ < 90^\circ$, siis DPA ongi nelinurga $ABCD$ diagonaalide vaheline teravnurk.

7. Olgu F selline punkt küljel AD, et $EF \parallel CD$ (joonis 2). Siis $EFDC$ on samuti ristkülik. Seega $|EC| = |FD|$ ja $|EF| = |CD|$, mistõttu kolmnurgad EFD ja ECD on võrdse pindalaga. Paneme tähele, et kolmnurkade EFD ja ECD pindalade summa võrdub ristküliku $EFDC$ pindalaga.

Tähistame kujundi K pindala S_K. Eelduse põhjal $S_{ABED} = 7 \cdot S_{ECD}$, millest tulenevalt

$$\begin{aligned} S_{ABEF} &= S_{ABED} - S_{EFD} = 7 \cdot S_{ECD} - S_{ECD} = 6 \cdot S_{ECD} = 3 \cdot 2 \cdot S_{ECD} = \\ &= 3 \cdot (S_{ECD} + S_{EFD}) = 3 \cdot S_{EFDC}. \end{aligned}$$

Kuna $ABEF$ ja $EFDC$ on ristkülikud, mille kõrgused on võrdsed, siis nende pindalad suhtuvad nagu aluste pikkused ehk BE ja EC. Seega eelneva põhjal $|BE| = 3 \cdot |EC|$.



Joonis 2

8. Arv jagub 3-ga parajasti siis, kui tema ristsumma jagub 3-ga. Arvu 2023 ristsumma on 7. Muutes arvu ühte numbrit, muutub ristsumma samavõrra samas suunas. Et saada 7 asemele 3-ga jaguv arv, tuleb teda kas vähendada 1, 4 või 7 võrra või suurendada 2 või 5 või 8 või jne võrra. Arvestades olemasolevaid numbreid, on võimalused järgmised:

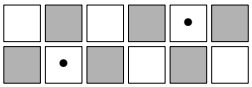
- tuhandeliste numbrit vähendada 1 võrra või suurendada 2 või 5 võrra;
- sajaliste numbrit suurendada 2, 5 või 8 võrra;
- kümneliste numbrit vähendada 1 võrra või suurendada 2 või 5 võrra;
- üheliste numbrit vähendada 1 võrra või suurendada 2 või 5 võrra.

Kokku on võimalusi 12.

9. Ülemisest ja alumisest küljest näeme, et pika tiku pikkus võrdub 4 lühikese tiku pikkusega. Seega rööpküliku ümbermõõt võrdub $6 \cdot 1 + 3 \cdot 4$ ehk 18 lühikese tiku pikkusega. Kuna pika tiku pikkus on 7 cm, on lühikese tiku pikkus $\frac{7}{4}$ cm. Kokkuvõttes on rööpküliku ümbermõõt $18 \cdot \frac{7}{4}$ cm ehk $\frac{63}{2}$ cm ehk 31,5 cm.

10. Nurgapealsed mustad kuubikud saab kohe eemaldada. Kui seejärel ära võtta pildil alumise rea vasakpoolseim ja ülemise rea parempoolseim valge kuubik (joonisel 3 märgitud mummuga), siis saab eemaldada ka kõik ülejäänud mustad kuubikud. Seega piisab eemaldada 2 valget kuubikut.

Näitame, et ühe valge kuubiku eemaldamisest ei piisa. Nurgapealse valge kuubiku eemaldamine vabastaks ainult ühe musta kuubiku neljast, mida algseisus eemaldada ei saa, ning vasakult või paremalt teises veerus asuva valge kuubiku eemaldamine vabastaks kaks sellist musta kuubikut. Igal juhul jääks vähemalt kaks musta kuubikut eemaldamata.



Joonis 3

Eesti 70. matemaatikaolümpiaad

1. veebruar 2023 Piirkonnavoor **8. klass**

I osa vastused

1. $\frac{2}{11}$.

2. 16.

3. -8.

4. 16.

5. 6.

6. 10°.

7. $5\ \text{cm}^2$.

8. 9.

9. 8 cm.

10. 5.

Lahendused

1. $\frac{7\cdot 88+8\cdot 77}{77\cdot 88}=\frac{7\cdot 8\cdot 11+8\cdot 7\cdot 11}{7\cdot 11\cdot 8\cdot 11}=\frac{7\cdot 8\cdot 11\cdot 2}{7\cdot 8\cdot 11\cdot 11}=\frac{2}{11}$.

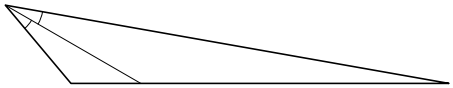
2. Antud arvude lahutused algtegureiks on $80=2^4\cdot 5$ ja $120=2^3\cdot 3\cdot 5$. Et arvu 80 tegur ei oleks arvu 120 tegur, peab ta sisaldama tegurit 2^4. Arvu 80 sellised tegurid on 2^4 ja $2^4\cdot 5$, kuid $2^4\cdot 5=80$. Seega ainus ülesande tingimusi rahuldav arv on 2^4 ehk 16.

3. Antud võrdus on samaväärne võrdusega $(a-b)(8+x)=0$. Kuna $a\neq b$, siis $a-b\neq 0$. Järelikult $8+x=0$, kust $x=-8$.

4. Olgu Anni ja Benno kommide arvud vastavalt a ja b. Ülesande tingimuste kohaselt $a=3b$ ja $a-b=8$. Seega $3b-b=8$ ehk $2b=8$, kust $b=4$ ja $a=12$. Järelikult $a+b=16$ ehk Annil ja Bennol on kokku 16 kommi.

5. Kuna kolmest järjestikusest arvust keskmine annab 9-ga jagamisel jäägi 2, siis esimene arv annab jäägi 1 ja kolmas jäägi 3. Seega nende kolme arvu korrutis annab 9-ga jagamisel sama jäägi nagu arv $1\cdot 2\cdot 3$ ehk 6.

6. Kuna poolitatakse teravnurka, siis algse kolmnurga nürinurk leidub ka ühes kahest tekkivast kolmnurgast (joonis 4). Teises tekkivas kolmnurgas on nürinurk suurem, sest tema kõrvunurk on üks teravnurkadest esimeses tekkivas kolmnurgas. Seega esimeses tekkivas kolmnurgas on nürinurk suurusega 130°, üks teravnurk suurusega $180^\circ-150^\circ$ ehk 30° ja teine teravnurk suurusega $180^\circ-130^\circ-30^\circ$ ehk 20°. Kuna viimane on pool algse kolmnurga teravnurgast, siis algse kolmnurga üks teravnurk on suurusega $2\cdot 20^\circ$ ehk 40° ja teine teravnurk suurusega $180^\circ-130^\circ-40^\circ$ ehk 10°. Viimane ongi väikseim algse kolmnurga nurk.

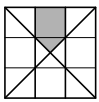


Joonis 4

7. *Lahendus 1.* Kuna ruut küljepikkusega 6 cm jaotatakse 3 võrdseks ristkülikuks, on iga ristküliku lühema külje pikkus 2 cm. Ruudu diagonaal on külgedega 45° nurga all, mistõttu eraldab äärmistest ristkülikutest võrdhaarse täisnurkse kolmnurga.

Halliks värvitud osa saame, kui kahe diagonaali poolt eraldatud ülemisest veerandruudust eemaldame kummagi äärmise ristküliku otsast äralõigatud kolmnurga. Veerandruudu pindala on $\frac{1}{4} \cdot 6^2$ cm^2 ehk 9 cm^2, kummagi kolmnurga pindala on aga $\frac{1}{2} \cdot 2^2$ cm^2 ehk 2 cm^2. Seega värvitud osa pindala on 5 cm^2.

Lahendus 2. Jaotame ruudu ka horisontaaljoontega kolmeks võrdseks ristkülikuks (joonis 5). Nii jaotub ruut 9 võrdseks ruuduks küljepikkusega 2 cm. Iga sellise ruudu pindala on 4 cm^2. Halliks värvitud osa sisaldab ühe sellise ruudu tervenisti ja teisest ruudust veerandi. Seega halliks värvitud osa pindala on 5 cm^2.



Joonis 5

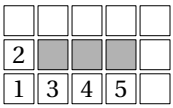
8. Number 0 saab olla kolmel erineval kohal (tuhandeliste kohal ei saa). Olles valinud numbrile 0 koha, saab number 3 paikneda 3 erineval kohal (kõigil kohtadel peale selle, kus on 0). Nende valikutega on ka numbrite 2 kohad määratud. Seega kokku saab numbritest 2, 0, 2, 3 moodustada $3 \cdot 3$ ehk 9 arvu.

9. Keskmine vertikaaljoon on niisama pikk kui ristküliku vertikaalne külg ning keskmine horisontaaljoon on niisama pikk kui ristküliku horisontaalne külg. Seega ristküliku vertikaalsete külgede pikkuste summa moodustab $\frac{2}{3}$ kõigi vertikaalsete traadijuppide pikkuste summast ning horisontaalsete külgede pikkuste summa moodustab $\frac{2}{3}$ kõigi horisontaalsete traadijuppide pikkuste summast. Kokkuvõttes moodustab ristküliku kõigi nelja külge pikkuste

summa $\frac{2}{3}$ kõigi traadijuppide pikkuste summast 12 cm. Järelikult ristküliku ümbermõõt on 8 cm.

10. Kui eemaldada üks nurgakuubik, tema kõrvalt lühema otsa keskmine kuubik ja pikemalt poolt kolm järjestikust kuubikut (joonisel 6 on märgitud eemaldatavad kuubikud järjekorranumbritega), saab eemaldada kõik hallid kuubikud. Seega piisab eemaldada 5 valget kuubikut.

Näitame, et väiksema arvu valgete kuubikute eemaldamisest ei piisa. Selleks, et hallidest kuubikutest esimesena eemaldada keskmine, peaks enne tema mõlemalt poolt eemaldama valge kuubiku, aga neist kummagi eemaldamiseks on vaja eemaldada veel kaks valget kuubikut. See teeb kokku 6 valget kuubikut. Seega optimaalse tegevuse korral eemaldataks hallidest kuubikutest esimesena otsmine. Sellise kuubiku eemaldamiseks on vaja enne eemaldada valge kuubik kahest küljest, mis omakorda eeldab ühe nurgapealse kuubiku eemaldamist. Seega esimese halli kuubiku eemaldamiseks on vaja eemaldada vähemalt 3 valget kuubikut. Kummagi ülejäänud halli kuubiku eemaldamiseks on vaja eemaldada veel üks valge kuubik. Seega on vaja kokku eemaldada 5 valget kuubikut.



Joonis 6

Eesti 70. matemaatikaolümpiaad

1. veebruar 2023 Piirkonnavoor **9. klass**

I osa vastused

1. -618.

2. 6.

3. 4.

4. 55 eurot.

5. 1.

6. 8.

7. 40°.

8. $6\ \mathrm{cm}^2$.

9. $\frac{1}{6}$.

10. 4.

Lahendused

1. Kuna $12 + 36 = 48 = 2 \cdot 24$ ja $12 - 36 = -24$, siis

$$1236 : (12 + 36) \cdot (12 - 36) = 1236 : (-2) = -618.$$

2. Et arv jaguks 10-ga, peab ta lõppema numbriga 0. Seega arvu $97n$ lõpus peab olema number 2. Et see juhtuks, peab arvu n lõpus olema number 6. Vähim niisugune naturaalarv on 6.

3. Kuna $a = 2b$, siis $a + b = 2b + b = 3b$. Nüüd kuna $3b = 4c$, siis

$$\frac{a+b}{c} = \frac{4c}{c} = 4.$$

4. Olgu mängude A, B ja C hinnad vastavalt a, b ja c eurot. Ülesande tingimustest saame $b+c-a = 50$ ja $a+b-c = 60$. Liites nende kahe võrduse vastavad pooled, saame $2b = 110$. Seega $b = 55$ ehk mäng B maksab 55 eurot.

5. Korrutis abc annab 9-ga jagamisel sama jäägi nagu vastavate jääkide korrutis ehk $4 \cdot 4 \cdot 4$ ehk arv 64. Et $64 = 7 \cdot 9 + 1$, siis otsitav jääk on 1.

6. Kuna nelja numbri summa on 7 ja sealhulgas kahe number 2 summa on 4, peab ülejäänud kahe numbri summa olema 3. Ilma number 2 kasutamata on see võimalik vaid juhul, kui üks number on 0 ja teine 3. Number 0 saab asuda kõigil kohtadel peale tuhandeliste. Olles ära paigutanud numbri 0, saab numbrit 3 paigutada 3 erinevale kohale. Sellega on kogu arv määratud. Seega on neist numbritest arvu koostamiseks $3 \cdot 3$ ehk 9 võimalust, kuid saadud arvudest vähim, 2023, ei sobi, sest küsitud on arvust 2023 suuremaid arve. Seega on otsitavaid arve 8.

7. Kuna $|CB| = |AB|$, siis $\angle BCA = \angle CAB = \beta$. Seega $2\beta + \gamma = 180^\circ$. Sirgete a ja b paralleelsuse tõttu aga $\alpha = \gamma$, seega ülesande tingimuse põhjal $\beta + 2\gamma = 150^\circ$. Korrutades võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} 2\beta + \gamma = 180^\circ, \\ \beta + 2\gamma = 150^\circ \end{cases}$$

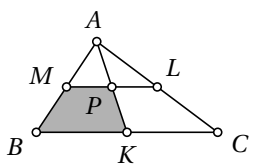
teise võrrandi pooled 2-ga ja lahutades esimese võrrandi vastavad pooled, saame $3\gamma = 120^\circ$, kust $\gamma = 40^\circ$. Seega ka $\alpha = 40^\circ$.

8. Kuna mediaan poolitab kolmnurga külje, kuid vastavale küljesihile tõmmatud kõrgus algses ja jaotamise teel saadud kolmnurgas on sama, siis mediaan poolitab ka kolmnurga pindala. Seega kolmnurga ABK pindala on $\frac{1}{2} \cdot 16\ \text{cm}^2$ ehk $8\ \text{cm}^2$. Kiirteteoreemi põhjal poolitab kesklõik ML ka mediaani AK; olgu sirgete ML ja AK lõikepunkt P (joonis 7). Siis kolmnurk AMP on sarnane kolmnurgaga ABK teguriga $\frac{1}{2}$. Seega kolmnurga AMP pindala on $\frac{1}{4}$ kolmnurga ABK pindalast ehk $\frac{1}{4} \cdot 8\ \text{cm}^2$ ehk $2\ \text{cm}^2$. Nelinurga $MBKP$ pindala on järelikult $6\ \text{cm}^2$.

9. Ringist välja lõigatud sektor on niisama suur kui halliks värvitud sektor COA. Seega alles jäänud osa on 5 korda suurem kui väljalõigatud osa, millest tulenevalt on väljalõigatud osa $\frac{1}{6}$ kogu ringist. Järelikult ka sektor COA moodustab $\frac{1}{6}$ esialgsest ringist.

10. Võttes algul ära kaks nurkmist halli kuubikut, saab järgnevalt ära võtta eemaldatud kuubikute 4 valget naaberkuubikut. Pärast seda saab ära võtta kõik ülejäänud hallid kuubikud. Seega piisab eemaldada 4 valget kuubikut. Näitame, et väiksema arvu valgete kuubikute eemaldamisest ei piisa. Vaatleme kahte juhtu.

- Oletame, et eemaldatakse kaks keskmist valget kuubikut. Neist esimese eemaldamiseks tuleb eemaldada kaks halli naaberkuubikut, mis aga eeldab veel vähemalt ühe valge kuubiku eemaldamist. Ainult ühe valge lisakuubiku eemaldamine oleks võimalik ainult juhul, kui see oleks nurgakuubik. Siis aga pole võimalik teise keskmise valge kuubiku eemaldamine ilma veel üht valget kuubikut eemaldamata.



Joonis 7

- Oletame, et vähemalt üks kahest keskmisest valgest kuubikust jääb paigale. Üldisust kitsendamata olgu see keskpunkti suhtes kagusuunaline kuubik. Kahest keskmisest hallist kuubikust kummagi ülejäänud kolmest valgest naaberkuubikust tuleb kaks eemaldada. Selleks, et piirduda vähem kui 4 valge kuubiku eemaldamisega, peab üks neist keskmiste hallide kuubikute valgetest naaberkuubikutest olema sama. Ainus selline kuubik on loodepoolne keskmine valge kuubik. Seega see kuubik tuleb eemaldada, lisaks üks vasaku alumise veerandi kahest valgest kuubikust ja üks parema ülemise veerandi kahest valgest kuubikust. Et oleks võimalik eemaldada parema alumise veerandi halle kuubikuid, tuleb aga eemaldada üks alumise rea valgetest kuubikutest ja üks parempoolse veeru valgetest kuubikutest. Kõik see kokku on võimalik saavutada 3 valge kuubiku eemaldamisega ainult juhul, kui eemaldatakse vasakult teise veeru ja ülevalt teise rea valged kuubikud. Kuid loodepoolse keskmise valge kuubiku eemaldamiseks on vaja eemaldada vähemalt üks ülemise rea või vasakpoolse veeru kuubik. Seega vähem kui 4 valge kuubiku eemaldamisega pole võimalik kõiki halle kuubikuid ära võtta.

Märkus. Erinevaid lahendusi 4 valge kuubiku eemaldamisega on rohkem. Näiteks võib eemaldada nurkmised valged kuubikud, siis nende kõrval asuvad hallid kuubikud ning seejärel saab kummaltki poolt eemaldada ühe keskmistest valgetest kuubikutest. Pärast seda on eemaldatavad kõik ülejäänud hallid kuubikud.

II osa lahendused

1. *(Maksim Ivanov)*

Leia nii vähim kui ka suurim neljakohaline naturaalarv, mis jagub iga oma numbriga ja milles numbrid ei kordu.

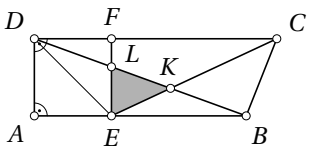
Vastus: vähim 1236, suurim 9864.

Lahendus. Otsitav arv ei sisalda nulli, sest nulliga ükski arv ei jagu. Vähim neljakohaline arv, milles null ei esine ja numbrid ei kordu, on 1234. See arv ei jagu 3-ga ega 4-ga. Järgmine arv 1235 ei jagu 2-ga ega 3-ga. Kuid ülejärgmine arv 1236 jagub kõigi oma numbritega.

Suurim neljakohaline arv, milles numbrid ei kordu, on 9876. Suurim arv, mis pole suurem kui 9876 ja mis jagub 9-ga, on 9873. Kuid see arv ei jagu 8-ga. Suuruselt järgmine 9-ga jaguv arv on 9864. See arv jagub iga oma numbriga.

Seega otsitavad arvud on 1236 ja 9864.

2. *(Elts Abel)*



Nelinurgas $ABCD$ on külg AD risti külgedega AB ja CD. Külgedel AB ja CD valitakse vastavalt sellised punktid E ja F, mille korral $|EA| = |AD| = |DF|$. Nelinurga $ABCD$ diagonaal BD lõikab sirget CE punktis K ja sirget EF punktis L. On teada, et nurga BDC suurus moodustab $\frac{4}{9}$ nurga EDF suurusest ja nurga DCE suurus on 25% võrra suurem nurga BDF suurusest. Leia kolmnurga EKL nurkade suurused.

Vastus: 45°, 65°, 70°.

Lahendus. Kuna AD on risti külgedega AB ja CD, on AB ja CD paralleelsed. Kuna $|EA| = |DF|$ ning EA ja DF on paralleelsed, on $EADF$ rööpkülik ning kuna AD on külgedega EA ja DF risti ja ühepikkune, on $EADF$ ruut. Seega lõik DE kui ruudu diagonaal poolitab oma otspunktide juures olevad nurgad, kust saame $\angle EDF = 45^\circ$. Järelikult $\angle BDC = \frac{4}{9} \cdot 45^\circ = 20^\circ$ ja $\angle DCE = 1{,}25 \cdot 20^\circ = 25^\circ$. Nüüd saame arvutada kolmnurga EKL nurkade suurused:

$$\angle EKL = 20^\circ + 25^\circ = 45^\circ;$$
$$\angle LEK = \angle FEC = 90^\circ - 25^\circ = 65^\circ;$$
$$\angle KLE = 180^\circ - 45^\circ - 65^\circ = 70^\circ.$$

3. *(Elts Abel, Maksim Ivanov)*

Poes on müügil 20 erinevat palli. Kõige odavam pall maksab 1 euro ja kõige kallim pall 20 eurot, kusjuures kõik pallid on erineva hinnaga ja maksavad täisarvu eurosid. Leia kõik võimalused jaotada need pallid 6 rühma nii, et igas rühmas olevate pallide kogumaksumus on sama, kusjuures ühes rühmas maksab kõige kallim pall 8 eurot, mingis teises rühmas aga 15 eurot.

Vastus: ainus võimalus on $\{20, 14, 1\}$, $\{19, 16\}$, $\{18, 17\}$, $\{15, 11, 9\}$, $\{13, 12, 10\}$, $\{8, 7, 6, 5, 4, 3, 2\}$.

Lahendus. Arvutades leiame, et kõik pallid maksavad kokku 210 eurot. Seega iga rühma pallid maksavad kokku $\frac{210}{6}$ ehk 35 eurot.

Samas $8+7+6+5+4+3+2+1 = 36$, seega ainus võimalus koostada rühma, mille kõige kallim pall maksab 8 eurot, on jätta odavamatest pallidest ainult 1-eurone välja.

Rühmas, kuhu kuulub 20-eurone pall, maksavad ülejäänud pallid kokku 15 eurot. Sinna rühma ei saa kuuluda 15-eurone pall, sest 15-eurone pall on ülesande tingimuse järgi mingis rühmas kõige kallim. Ainus teine võimalus saada mingite jaotamata pallide koguhinnaks 15 eurot on valida 14-eurone ja 1-eurone pall.

Koostamaks rühma, mille kõige kallim pall maksab 15 eurot, peame lisama odavamaid palle, mis maksavad kokku 20 eurot. Ainus võimalus saada mingite jaotamata pallide koguhinnaks 20 eurot on valida pallid hinnaga 11 ja 9 eurot.

Nüüd on jaotamata veel pallid hinnaga 19, 18, 17, 16, 13, 12 ja 10 eurot. Rühma, kuhu kuulub 19-eurone pall, peab kuuluma 16-eurone pall, sest muid võimalusi pole jaotamata pallide valikuks koguhinnaga 16 eurot. Rühma, kuhu kuulub 18-eurone pall, peab sarnasel põhjusel kuuluma 17-eurone pall. Lõpuks moodustavad ühe rühma pallid hinnaga 13, 12 ja 10 eurot.

II osa lahendused

1. *(Maksim Ivanov)*

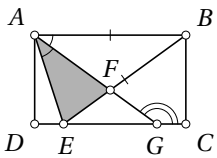
Pakis on 600 kaarti. Iga kaart on punane või sinine. Kaarte hakatakse teise pakki ümber laduma järjekorras punane, punane, sinine, punane, punane, sinine, punane, punane, sinine jne. Kui ümber on tõstetud 385 kaarti, siis ei saa enam sama värvide järgnevust jätkata. Mitme kaardi ümbertõstmise järel katkeks värvide järgnevus juhul, kui järjekord oleks olnud punane, sinine, sinine, punane, sinine, sinine, punane, sinine, sinine jne?

Vastus: 515.

Lahendus. Kuna $385 = 128 \cdot 3 + 1$, siis värvide järgnevus katkeb pärast 128 täistsüklit ja 1 lisakaardi ümbertõstmist. Täistsüklites on kokku $2 \cdot 128$ ehk 256 punast kaarti ja 128 sinist kaarti, lisakaart on punane. Et ka järgmine kaart peaks olema punane, aga värvide seaduspära katkeb, siis pakis on kokku 257 punast kaarti. Siniste kaartide arv on järelikult $600 - 257$ ehk 343. Kui tsüklis oleks värvid järjekorras punane, sinine, sinine, siis siniste kaartide poolest saaks tsükleid olla $\frac{342}{2}$ ehk 171 ning 1 sinine kaart jääks üle. Punaseid kaarte jääks samuti üle, sest $257 > 171$. Seega mainitud värvide järgnevus katkeks pärast 171 tsüklit ja 2 lisakaardi ümbertõstmist, mis teeb kokku $3 \cdot 171 + 2$ ehk 515 kaarti.

2. *(Maksim Ivanov)*

Ristküliku $ABCD$ pikemal küljel CD valitakse punkt E nii, et $|BE| = |AB|$. Nurga BAE poolitaja lõikab sirgeid BE ja CD vastavalt punktides F ja G. Nurga AGC suurus on 144°.



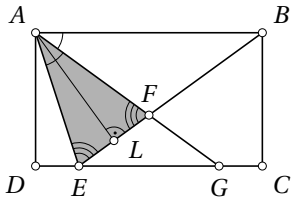
a) Leia kolmnurga AEF nurkade suurused.

b) Leia kolmnurga AEF ümbermõõt, kui lõigu DG pikkus on 8 cm.

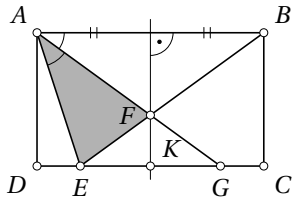
Vastus: a) $36^\circ, 72^\circ, 72^\circ$; b) 16 cm.

Lahendus 1.

a) Kuna $\angle AGC = 144^\circ$, siis $\angle AGD = 180^\circ - 144^\circ = 36^\circ$, mistõttu põiknurkadest saame $\angle BAG = 36^\circ$. Kuna AG poolitab nurga BAE, siis $\angle BAE = 2 \cdot 36^\circ = 72^\circ$ ja $\angle GAE = 36^\circ$. Kuna $|BE| = |AB|$, siis ka $\angle BEA = 72^\circ$. Lõpuks saame $\angle EFA = 180^\circ - 36^\circ - 72^\circ = 72^\circ$. Seega kolmnurga AEF nurkade suurused on 36°, 72°, 72°.



Joonis 8



Joonis 9

b) Lahenduse osas a) tehtu põhjal $\angle EFA = \angle FEA$ ja $\angle EGA = \angle EAG$, mistõttu $|AF| = |AE| = |EG|$. Olgu L kolmnurga AEF tipust A tõmmatud kõrguse aluspunkt (joonis 8); siis AL on kolmnurga AEF kõrgus, mis aga selle kolmnurga võrdhaarsuse tõttu on ühtlasi mediaan ja nurgapoolitaja ehk $|EL| = |LF|$ ja $\angle EAL = \frac{1}{2} \cdot 36^\circ = 18^\circ$. Samas ka $EDA = 90^\circ$ ja $\angle EAD = 90^\circ - 72^\circ = 18^\circ$. Seega kolmnurgad ELA ja EDA on võrdsed tunnuse NKN järgi, millest tulenevalt $|EL| = |ED|$. Järelikult

$$|AE| + |EF| + |FA| = 2|AE| + 2|EL| = 2|EG| + 2|ED| = 2|DE|.$$

Kokkuvõttes saame, et kolmnurga AEF ümbermõõt on $2 \cdot 8$ cm ehk 16 cm.

Lahendus 2.

a) Nagu lahenduses 1.

b) Lahenduse osas a) tehtu põhjal $\angle EFA = \angle FEA$ ja $\angle EGA = \angle EAG$, mistõttu $|AF| = |AE| = |EG|$. Veel $\angle ABE = 180^\circ - 72^\circ - 72^\circ = 36^\circ = \angle BAG$ ja $\angle GEB = \angle ABE = 36^\circ = \angle AGE$, mistõttu $|AF| = |BF|$ ja $|EF| = |GF|$. Järelikult

$$\begin{aligned} |AE| + |EF| + |FA| &= |EG| + |EF| + |FB| = |EG| + |EB| = \\ &= |EG| + |AB| = |EG| + |DC| = \\ &= |EG| + |DE| + |EG| + |GC|. \end{aligned}$$

Olgu K külje CD keskpunkt; läbi selle punkti tõmmatud külgedega BC ja AD paralleelne sirge on külgede AB ja CD keskristsirge, mis kolmnurga ABF võrdhaarsuse tõttu läbib tema tippu F (joonis 9). Kolmnurga EGF võrdhaarsuse tõttu poolitab sama sirge lõigu EG. Seega $|EK| = |KG|$, millest tulenevalt ka $|DE| = |GC|$. Järelikult

$$|EG| + |DE| + |EG| + |GC| = 2|EG| + 2|DE| = 2|DG|.$$

Kokkuvõttes saame, et kolmnurga AEF ümbermõõt on $2 \cdot 8$ cm ehk 16 cm.

3. *(Maksim Ivanov)*

Arvutimängus saab igal osalejal olla igal hetkel mingi naturaalarv punkte. Marko ja Tõnu said mängu sisenedes mingi arvu punkte boonuseks. Kui Marko saanuks boonuseks 2 korda vähem punkte kui ta tegelikult sai, siis Tõnul olnuks 25 boonuspunkti rohkem kui Markol. Kui aga Marko saanuks boonuseks 2 korda rohkem punkte kui ta tegelikult sai, siis Tõnul olnuks ikkagi 1 boonuspunkt rohkem. Mängu lõpus on ühel neist mängijatest punktide arv alguses saadud boonuspunktidest n korda suurem ja teisel n korda väiksem, kus n on mingi naturaalarv (mõlema mängija puhul sama). Leia kõik võimalused, mitu punkti saab mängu lõpuks olla Markol ja Tõnul kokku, kui on teada, et otsitav arv on suurem kui 100 ja väiksem kui 200.

Vastus: 136 ja 179.

Lahendus. Olgu Marko ja Tõnu boonuspunktide arvud vastavalt x ja y. Ülesande tingimustest saame võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} \frac{1}{2}x + 25 = y, \\ 2x + 1 = y. \end{cases}$$

Siit $\frac{1}{2}x+25 = 2x+1$, mis annab $\frac{3}{2}x = 24$ ehk $x = 16$ ja $y = 33$. Seega Markol oli alguses 16 punkti ja Tõnul 33 punkti.

Kui oleks $n = 1$, siis Marko ja Tõnu punktide summa mängu lõpus oleks $16 + 33$ ehk 49, mis pole 100 ja 200 vahel. Seega $n > 1$ ehk üks mängijatest kaotab punkte ja teine võidab punkte. Vaatame kahte juhtu vastavalt sellele, kumb mängijatest punkte kaotab.

- Kui punkte kaotab Marko, siis võimalused on $n = 2$, $n = 4$, $n = 8$ ja $n = 16$. Vastavalt oleks Marko punktide arv mängu lõpus 8, 4, 2 või 1 ja Tõnu punktide arv 66, 132, 264 või 528. Kaks viimast varianti pole võimalikud, sest punktide summa oleks üle 200. Kahel esimesel juhul oleks punktide summa vastavalt 74 ja 136, millest ainult teine on 100 ja 200 vahel.
- Kui punkte kaotab Tõnu, siis võimalused on $n = 3$, $n = 11$ ja $n = 33$. Vastavalt oleks Tõnu punktide arv mängu lõpus 11, 3 või 1 ja Marko punktide arv 48, 176 või 528. Viimane variant pole võimalik, sest punktide summa oleks üle 200. Kahel esimesel juhul oleks punktide summa vastavalt 59 ja 179, millest ainult teine on 100 ja 200 vahel.

Kokkuvõttes saame, et Marko ja Tõnu punktide summa mängu lõpus on kas 136 või 179.

II osa lahendused

1. *(Härmel Nestra)*

Tõesta, et iga mittenegatiivset täisarvu on võimalik esitada kujul $2a+b$, kus a ja b on mittenegatiivsed täisarvud, millest kumbki annab arvuga 4 jagades jäägi 0 või 1.

Lahendus 1. Arvud 0, 1, 2, 3 esituvad kõik nõutud kujul alljärgnevalt:

$$0 = 2\cdot 0 + 0; \quad 1 = 2\cdot 0 + 1; \quad 2 = 2\cdot 1 + 0; \quad 3 = 2\cdot 1 + 1. \tag{1}$$

Alati, kui mingi mittenegatiivne täisarv n esitub nõutud kujul $n = 2a+b$, siis $n+4 = 2a+(b+4)$ on arvu $n+4$ esitus nõutud kujul, sest arv $b+4$ annab 4-ga jagamisel sama jäägi nagu arv b. Seega alustades arvude 0, 1, 2, 3 esitustest (1), saame järgnevalt leida arvude 4, 5, 6, 7 esitused, neist omakorda arvude 8, 9, 10, 11 esitused jne lõpmatuseni. Järelikult esitus nõutud kujul leidub tõepoolest iga mittenegatiivse täisarvu jaoks.

Lahendus 2. Olgu n suvaline mittenegatiivne täisarv. Jagades arvu n arvuga 4, olgu jagatis ja jääk vastavalt q ja r; see tähendab, et $n = 4q+r$, kus q on mittenegatiivne täisarv ja r on kas 0, 1, 2 või 3. Sellise arvu r saab esitada kujul (1), st $r = 2a+b$, kus a ja b on kumbki kas 0 või 1. Kuna $n = 4q+r$ ja $r = 2a+b$, siis kokkuvõttes $n = 4q+2a+b$ ehk

$$n = 2a + (4q+b).$$

Arvud a ja $4q+b$ annavad arvuga 4 jagades vastavalt jäägid a ja b, mis eelneva põhjal on kumbki kas 0 või 1. Seega on nõutud esitus leitud.

Lahendus 3. Olgu n suvaline mittenegatiivne täisarv. Olgu b arv, mille saame arvust n, muutes tema kahendesituses lõpust teise, neljanda, kuuenda jne numbri nullideks, ning olgu a arv, mille saame arvust n, muutes tema kahendesituse ülejäänud numbrid nullideks ja kustutades viimase numbri. Siis $n = 2a+b$, kusjuures nii a kui ka b annavad 4-ga jagades jäägi 0 või 1, sest nende mõlema kahendesituse eelviimane number on 0.

Märkus. Lahendus 3 näitab, et kehtib ülesande väitest tugevam väide: iga naturaalarvu on võimalik esitada kujul $2a+b$, kus a ja b on naturaalarvud, mis esituvad erinevate 4 astmete summana.

Lahendus 4. Olgu n suvaline mittenegatiivne täisarv. Vaatame 4 juhtu sõltuvalt jäägist arvu n jagamisel 4-ga.

- Kui $n = 4k$, siis võime võtta $a = 0$, $b = 4k$. Tõepoolest, $4k = 2 \cdot 0 + 4k$.
- Kui $n = 4k + 1$, siis võime võtta $a = 0$, $b = 4k + 1$. Tõepoolest, $4k + 1 = 2 \cdot 0 + (4k + 1)$.
- Kui $n = 4k + 2$, siis võime võtta $a = 1$, $b = 4k$. Tõesti, $4k + 2 = 2 \cdot 1 + 4k$.
- Kui $n = 4k + 3$, siis võime võtta $a = 1$, $b = 4k + 1$. Tõepoolest, $4k + 3 = 2 \cdot 1 + (4k + 1)$.

Kuna kõigil juhtudel leidsime sobiva esituse, siis ülesande väide on tõestatud.

2. *(Härmel Nestra)*

Tahvlil on täisarvud $-9, -8, -7, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$. Ühel sammul võib kustutada suvalised kaks tahvlil olevat arvu x ja y ja kirjutada asemele ühe arvu $xy + 2(x + y + 1)$. Nii toimitakse, kuni tahvlile jääb vaid üks arv. Leia kõik võimalused, milline arv võib jääda lõpuks tahvlile.

Vastus: -2.

Lahendus 1. Märkame, et kui üks asendatavatest arvudest on -2 ja teine on x, siis asemele tekib arv $-2x + 2(-2 + x + 1)$ ehk $-2x + 2(x - 1)$ ehk -2. Seega jääb arv -2 käigu järel tahvlile sõltumata sellest, millised arvud asendamiseks valitakse. Järelikult saab lõpuks tahvlile jääda vaid arv -2.

Lahendus 2. Tähistame $x * y = xy + 2(x + y + 1)$. Paneme tähele, et $x * y = (x + 2)(y + 2) - 2$ ehk $(x * y) + 2 = (x + 2) \cdot (y + 2)$. See tähendab, et tahvlil olevatest arvudest 2 võrra suuremate arvude korrutis jääb igal sammul samaks. Kuna alguses on tahvlil olevatest arvudest 2 võrra suuremate arvude korrutis $(-7) \cdot (-6) \cdot \ldots \cdot 10 \cdot 11$, mis võrdub nulliga, siis võrdub ka lõpuks tahvlile jäävast arvust 2 võrra suurem arv nulliga. Järelikult tahvlile jääb arv -2.

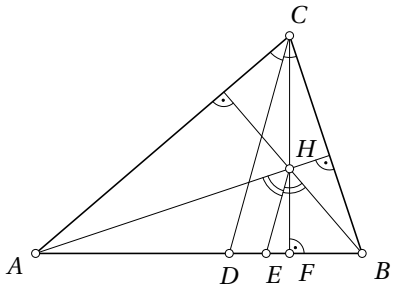
3. *(Sandra Schumann)*

Olgu ABC erikülgne teravnurkne kolmnurk, mille kõrgused lõikuvad punktis H. Tõesta, et nurkade ACB ja AHB poolitajad on paralleelsed.

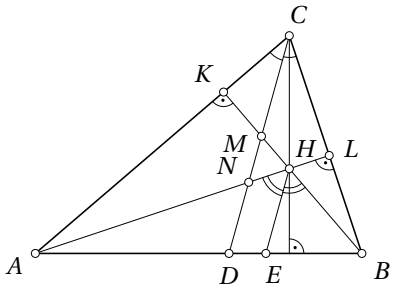
Lahendus 1. Olgu nurkade ACB ja AHB poolitajate lõikepunktid küljega AB vastavalt D ja E ning olgu sirgete CH ja AB lõikepunkt F (joonis 10). Olgu $\angle CAB = \alpha$, $\angle ABC = \beta$ ja $\angle BCA = \gamma$. Siis

$$\angle ABH = 180^\circ - 90^\circ - \angle BAC = 90^\circ - \alpha.$$

Sarnasel viisil saame $\angle BAH = 90^\circ - \beta$ ja $\angle ACF = 90^\circ - \alpha$.



Joonis 10



Joonis 11

Sellest, et CD on nurgapoolitaja kolmnurgas ABC, saame $\angle ACD = \frac{1}{2}\gamma$. Järelikult

$$\begin{aligned}\angle DCF &= \angle ACF - \angle ACD = \\ &= 90^\circ - \alpha - \frac{1}{2}\gamma = \\ &= 90^\circ - \alpha - \frac{1}{2}\left(180^\circ - \alpha - \beta\right) = \\ &= 90^\circ - \alpha - 90^\circ + \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\beta = \\ &= \frac{1}{2}\beta - \frac{1}{2}\alpha.\end{aligned}$$

Tänu sellele, et HE on nurgapoolitaja kolmnurgas ABH, saame võrdusi $\angle BAH = 90^\circ - \beta$ ja $\angle ABH = 90^\circ - \alpha$ kasutades sarnasel viisil

$$\angle EHF = \frac{1}{2}(90^\circ - \alpha) - \frac{1}{2}(90^\circ - \beta) = \frac{1}{2}\beta - \frac{1}{2}\alpha.$$

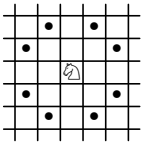
Kokkuvõttes $\angle DCF = \angle EHF$. Seega kaasnurkadest tulenevalt $CD \parallel HE$.

Lahendus 2. Nagu lahenduses 1 defineerime punktid D ja E. Olgu veel K sirgete BH ja AC lõikepunkt, L sirgete AH ja BC lõikepunkt ning M ja N tipust C tõmmatud nurgapoolitaja lõikepunktid vastavalt sirgetega BH ja AH (joonis 11).

Tähistame $\angle ACD = \angle DCB = \xi$. Täisnurksest kolmnurgast CKM saame $\angle KMC = 90^\circ - \xi$. Tippnurkadest saame nüüd $\angle DMH = \angle KMC = 90^\circ - \xi$. Täisnurksest kolmnurgast CLN saame aga $\angle CNL = 90^\circ - \xi$. Kolmnurgast HMN saame seega $\angle MHN = 180^\circ - 2\left(90^\circ - \xi\right) = 2\xi$. Kõrvunurkadest tulenevalt $\angle BHA = 180^\circ - 2\xi$, kust $\angle AHE = 90^\circ - \xi$.

Järelikult $\angle AHE = \angle CNL$. Kuna tegu on põiknurkadega, siis sirged CD ja HE on paralleelsed.

4. *(Birgit Veldi)*

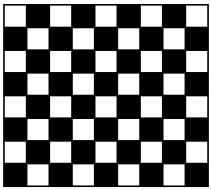


Mari ja Jüri mängivad malelaual mõõtmetega 8 × 9 järgmist mängu. Mängu alguses on Mari ratsu malelaua vasakul alumisel nurgaruudul ning Jüri ratsu paremal ülemisel nurgaruudul. Edasi hakkavad nad kordamööda tegema oma ratsudega malekäike (ratsu saab käia parajasti nendele ruutudele, mis asuvad temast horisontaalis ühe ja vertikaalis kahe ruudu või horisontaalis kahe ja vertikaalis ühe ruudu kaugusel nagu joonisel näidatud), seejuures Mari alustab. Jüri võidab, kui mõlema mängija ratsud satuvad korraga ühele ja samale ruudule (ükskõik kumma mängija käigu tulemusel). Kas Jüril on võimalik tagada võit sõltumata Mari vastumängust?

Vastus: ei.

Lahendus. Oletame väitevastaselt, et Jüril on võimalik tagada võit sõltumata Mari vastumängust. Sel juhul on kaks võimalust: mõlemad ratsud satuvad ühele ja samale ruudule pärast Mari käiku või pärast Jüri käiku. Jüril ei ole võimalik sundida Marit oma ratsuga käima Jüri ratsuga samale ruudule, sest ükskõik millisel ruudul asudes on ratsul võimalik käia vähemalt kahele erinevale ruudule ning ainult ühel neist saab asuda Jüri ratsu. Välistame järgnevalt ka võimaluse, et Jüri ja Mari ratsud on ühel ja samal ruudul pärast Jüri käiku. Värvime ruudud mustaks ja valgeks nagu tavalisel malelaual ja märkame, et malelaual mõõtmetega 8 × 9 on diagonaalselt teineteise vastas olevad nurgaruudud eri värvi (joonis 12). Seega alustavad mängijad erinevat värvi ruutudelt, ratsu aga saab käia vaid valgelt ruudult mustale või vastupidi. Kuna peale Jüri käiku on mõlemad mängijad teinud ühepalju käike, on nad endiselt eri värvi ruutudel. Seetõttu ei saa ratsud pärast Jüri käiku olla ühel ja samal ruudul.

Kuna Mari targa mängu korral ei saa Mari ja Jüri ratsud sattuda ühele ja samale ruudule pärast ühe ega teise mängija käiku, siis ei ole Jüril võimalik võitu tagada.



Joonis 12

Eesti 70. matemaatikaolümpiaad

1. veebruar 2023 Piirkonnavoor **10. klass**

Lahendused

1. *(Urve Kangro)*

Sportlane ujub piki jõge ühest sillast teiseni pärivoolu 10 minutit, tagasi aga 50 minutit. Mõlemal korral ujub ta vee suhtes sama kiirusega. Mitu protsenti on sportlase kiirus vee suhtes suurem kui jõe voolu kiirus?

Vastus: 50.

Lahendus. Olgu sportlase kiirus vee suhtes u meetrit minutis ja jõe voolu kiirus v meetrit minutis. Olgu vahemaa ühest sillast teiseni s meetrit. Ülesande tingimustest $\frac{s}{10} = u+v$ ja $\frac{s}{50} = u-v$. Avaldades kummastki võrrandist s, saame vastavalt $s = 10(u+v)$ ja $s = 50(u-v)$. Seega $10(u+v) = 50(u-v)$ ehk $u+v = 5(u-v)$. Avades sulud ja koondades sarnased liikmed, saame $4u = 6v$ ehk $u = \frac{3}{2}v$. Seega sportlase kiirus vee suhtes on 50% võrra suurem kui vee voolu kiirus.

2. *(Maksim Ivanov)*

Paulil on 48 münti rohkem kui Liisal. Kui Liisa annaks Paulile teatud arvu oma münte, siis nende käes olevate müntide arvud erineksid 3 korda. Kui aga hoopis Paul annaks Liisale sama arvu oma münte, siis nende käes olevate müntide arvud erineksid 2 korda. Leia kõik võimalused, mitu münti saab olla Liisal.

Vastus: 264.

Lahendus. Olgu Liisal alguses x münti, siis ülesande esimese tingimuse põhjal on Paulil $x+48$ münti.

Kui Liisa annaks Paulile y münti vastavalt ülesande teisele tingimusele, siis jääks Liisale $x-y$ münti ja Paulile $x+48+y$ münti. Kuna $x-y < x+48+y$, siis $3(x-y) = x+48+y$, kust $2x-4y = 48$ ehk $x-2y = 24$.

Kui Paul annaks Liisale y münti vastavalt ülesande kolmandale tingimusele, siis jääks Paulile $x+48-y$ münti ja Liisale $x+y$ münti. Kui oleks $2(x+y) = x+48-y$, siis saaksime $x+3y = 48$. Korrutades süsteemi

$$\begin{cases} x-2y = 24, \\ x+3y = 48 \end{cases}$$

esimese võrrandi pooled 3-ga ja teise võrrandi pooled 2-ga, saame saadud võrrandite liitmisel $5x = 168$. See ei ole võimalik, sest x peab olema täisarv. Jääb üle variant $x+y = 2(x+48-y)$, kust $x-3y = -96$. Korrutades süsteemi

$$\begin{cases} x - 2y = 24, \\ x - 3y = -96 \end{cases}$$

esimese võrrandi pooled 3-ga ja teise võrrandi pooled 2-ga, saame esimesest tekkinud võrrandist teise lahutamisel $x = 264$.

Seega ainsa võimalusena saab Liisal olla 264 münti.

3. *(Maksim Ivanov)*

Muutujate x ja y väärtused on sellised naturaalarvud, et avaldise $20x + 23y$ väärtus on 2023. Leia summa $x + y$ suurim ja vähim võimalik väärtus.

Vastus: suurim 101, vähim 89.

Lahendus. Võrdus $20x + 23y = 2023$ on samaväärne võrdusega

$$20(x + y) = 2023 - 3y. \tag{2}$$

Muutuja y väärtuse suurenedes parema poole väärtus väheneb, seega väheneb ka vasaku poole väärtus ja ühtlasi summa $x + y$ väärtus. Seetõttu piisab arvutada summa $x + y$ väärtus muutuja y vähima ja suurima võimaliku väärtuse korral.

Võrdusest (2) näeme, et vähendaja $3y$ väärtuse üheliste number on 3, millest tulenevalt muutuja y väärtuse üheliste number on 1. Seega muutuja y väärtus pole väiksem kui 1 ega suurem kui 81, sest $23 \cdot 91 > 2023$. Kui $y = 1$, siis $x + y = \dfrac{2023 - 3 \cdot 1}{20} = 101$, ja kui $y = 81$, siis $x + y = \dfrac{2023 - 3 \cdot 81}{20} = 89$. Mõlemal juhul on muutuja x väärtus naturaalarv. Seega summa $x + y$ suurim ja vähim väärtus on vastavalt 101 ja 89.

4. *(Maksim Ivanov)*

Tahvlile kirjutatakse 11 erinevat positiivset täisarvu. Neist kuue suurema arvu summa on 3 korda suurem nelja väiksema arvu summast. Leia vähim võimalik kõigi tahvlile kirjutatud arvude summa.

Vastus: 109.

Lahendus. Olgu nelja vähima arvu summa x, suuruselt järgmine arv y ja kuue suurima arvu summa z. Ilmselt

$$\begin{aligned} x &\leqslant (y-1) + (y-2) + (y-3) + (y-4) = 4y - 10, \\ z &\geqslant (y+1) + (y+2) + (y+3) + (y+4) + (y+5) + (y+6) = 6y + 21. \end{aligned}$$

Ülesande tingimuste põhjal aga $z = 3x$. Seega $3x \geqslant 6y + 21$, kust $x \geqslant 2y + 7$. Kokkuvõttes

$$2y + 7 \leqslant x \leqslant 4y - 10.$$

Seega $2y+7 \leqslant 4y-10$, kust $2y \geqslant 17$. Täisarvulisust arvestades saame $y \geqslant 9$. Järelikult $z \geqslant 6 \cdot 9 + 21 = 75$ ja $x \geqslant 2 \cdot 9 + 7 = 25$. Kõigi tahvlile kirjutatud arvude summa peab järelikult olema vähemalt $25 + 9 + 75$ ehk 109. See on ka võimalik, kui arvud on $4, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15$.

5. *(Sandra Schumann)*

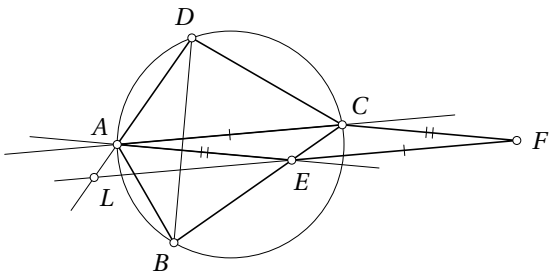
Kõõlnelinurga $ABCD$ küljel BC valitakse punkt E. Olgu F selline punkt, et $ACFE$ on rööpkülik. Olgu L sirgete AD ja EF lõikepunkt. Tõesta, et punktid B, D, E ja L asuvad ühel ringjoonel.

Lahendus 1. Ainus võimalus on, et punktid C, D ja F asuvad samal pool sirget AE, punktid B, E ja F asuvad samal pool sirget AC ning punkt D asub teisel pool sirget AC (joonis 13). Seega paralleelsete sirgete lõikumisel sama sirgega tekkivatest kaasnurkadest $\angle DLE = \angle DAC$. Nelinurga $ABCD$ ümberringjoone samale kaarele toetuvatest piirdenurkadest aga $\angle DAC = \angle DBC = \angle DBE$. Kokkuvõttes $\angle DLE = \angle DBE$, millest aga tulenebki, et punktid B, D, E ja L asuvad ühel ringjoonel.

Lahendus 2. Sarnaselt lahenduse 1 algusega veendume, et sirge AE lõikab nurga DLF haarasid. Kasutades nüüd nelinurga $ABCD$ ümberringjoone samale kaarele toetuvaid piirdenurki ja paralleelsete sirgetega lõikumisel sama sirgega tekkivaid kaasnurki, saame

$$\angle BDL = \angle BDA = \angle BCA = \angle BEL.$$

Võrdusest $\angle BDL = \angle BEL$ aga tuleneb, et punktid B, D, E ja L asuvad ühel ringjoonel.



Joonis 13

6. *(Erik Paemurru)*

Rivis seisab 2023 erineva pikkusega inimest. Nimetame inimest *huvitavaks*, kui ta on kas rivis seisvate inimeste seas lühim või pikim või on rivis temast lühemaid ja pikemaid inimesi ühepalju. Kas võib kindlalt väita, et rivi keskel paiknev inimene on huvitav, kui

a) ühegi 1013 järjestikuse inimese seas pole lühim üks äärmistest?

b) iga 1013 järjestikuse inimese seas on lühim üks äärmistest?

c) iga 1013 järjestikuse inimese seas on nii lühim kui ka pikim üks äärmistest?

Vastus: a) jah; b) ei; c) jah.

Lahendus.

a) Olgu rivi lühima inimese järjekorranumber n. Kui oleks $n \leqslant 1011$, siis saaksime valida järjestikused 1013 inimest, kellest kõige esimene on rivis n-s inimene. Kui oleks $n \geqslant 1013$, siis saaksime valida järjestikused 1013 inimest, kellest kõige viimane on rivis n-s inimeme. Järelikult $n = 1012$ ehk rivi lühim inimene peab asuma rivi keskel.

b) Kui rivi alguses seisavad 1011 lühimat inimest pikkuse kasvamise järjestuses ning nende järel pikemad 1012 inimest suvalises järjestuses nii, et pikema 1012 inimese seas pikim ega lühim ei paikne esimesel (kogu rivis keskmisel) kohal, siis on iga 1013 järjestikuse inimese seas lühim kõige esimene. Kogu rivi keskel paiknev inimene aga pole ei rivis lühim ega pikim ega ka mitte pikkuselt keskmine (viimasel juhul peaks ta olema 1012 pikema inimese seas lühim).

c) Olgu rivis pikkuselt keskmise inimese järjekorranumber n. Kui oleks $n \leqslant 1011$, siis saaksime valida järjestikused 1013 inimest, kellest kõige esimene on rivis n-s inimene. Kuid kogu rivi pikkuselt keskmisest inimesest on täpselt 1011 inimest pikemad ja 1011 inimest lühemad, mistõttu see inimene ei saa olla 1013 inimese seas lühim ega pikim. Analoogselt saame vastuolu oletusest, et $n \geqslant 1013$. Järelikult $n = 1012$ ehk rivis pikkuselt keskmine inimene peab asuma rivi keskel.

Märkus. Ülesande osa c) saab lahendada ka järgnevalt. Märkame, et meil on 1011 võimalust valida 1013 järjestikust inimest, kusjuures rivi keskel paiknev inimene on alati nende järjestikuste inimeste hulgas ja pole kunagi äärmine. Iga võimaluse jaoks teame, et äärmistest inimestest on üks 1013 inimese hulgast pikim ja üks lühim, mistõttu üks äärmistest inimestest on rivi keskel paiknevast inimesest pikem ja teine lühem. Seega saame kõik ülejäänud 2022 inimest nende järjekorranumbri alusel jagada paaridesse: $(1, 1013), (2, 1014), \ldots, (1011, 2023)$, kusjuures igas paaris on üks inimene rivi keskel paiknevast inimesest pikem ja teine lühem. Järelikult on rivi keskel paiknevast inimesest 1011 temast pikemad ja 1011 temast lühemad, seega ta on rivis pikkuselt keskmine.

Eesti 70. matemaatikaolümpiaad

1. veebruar 2023 Piirkonnavoor **11. klass**

Lahendused

1. *(Härmel Nestra)*

Risttahukas mõõtmetega $6\times 8\times 10$ pannakse kokku 480 ühikkuubist. Mitmel erineval viisil on võimalik selles valida kaks ühise tahuga ühikkuupi?

Vastus: 1252.

Lahendus 1. Kaht ühikkuupi, millest üks asub vahetult teise peal (vertikaalmõõtmes), saab horisontaalmõõtmetes paigutada $6\cdot 8$ erinevasse asendisse ja vertikaalmõõtmes $10-1$ ehk 9 erinevasse asendisse. Seega kokku on võimalik niimoodi asetatud kaht ühikkuupi valida $6\cdot 8\cdot 9$ viisil. Analoogselt leiame, et kaht ühikkuupi, millest üks asub vahetult teise taga või kõrval, on võimalik valida vastavalt $6\cdot 7\cdot 10$ ja $5\cdot 8\cdot 10$ viisil. Kokku on valikuvõimalusi $6\cdot 8\cdot 9+6\cdot 7\cdot 10+5\cdot 8\cdot 10$ ehk 1252.

Lahendus 2. Esimese ühikkuubi saab valida kas risttahuka nurgas, servas, tahul või sisemuses. Loendame valikuvõimalused neil juhtudel eraldi.

- Esimese ühikkuubi valimiseks nurgas on 8 võimalust. Sellise ühikkuubiga ühist tahku omava teise ühikkuubi valikuks on 3 võimalust.
- Esimese ühikkuubi valimiseks risttahuka servas, kuid mitte nurgas, on $4\cdot((6-2)+(8-2)+(10-2))$ ehk 72 võimalust. Sellise ühikkuubiga ühist tahku omava teise ühikkuubi valikuks on 4 võimalust.
- Esimese ühikkuubi valimiseks risttahuka tahul, kuid mitte servas, on $2\cdot((6-2)(8-2)+(8-2)(10-2)+(10-2)(6-2))$ ehk 208 võimalust. Sellisega ühist tahku omava teise ühikkuubi valikuks on 5 võimalust.
- Esimese ühikkuubi valikuks risttahuka sisemuses on $(6-2)(8-2)(10-2)$ ehk 192 võimalust. Sellisega ühist tahku omava teise ühikkuubi valikuks on 6 võimalust.

Kokkuvõttes on esimese ja teise ühikkuubi järjestikuseks valikuks seega $8\cdot 3+72\cdot 4+208\cdot 5+192\cdot 6$ ehk 2504 võimalust. Kuna niimoodi loendatakse iga kahe ühise tahuga ühikkuubi valik topelt (emb-kumb ühikkuup saab olla esimene), siis otsitavaid valikuvõimalusi on $\dfrac{2504}{2}$ ehk 1252.

2. *(Härmel Nestra)*

Ma mõtlesin ühe positiivse reaalarvu. Kui ma tõstsin selle arvu kuupi, siis ma sain sama tulemuse nagu siis, kui ma kolmveerandile mõeldud arvust liitsin mõeldud arvu ruudu. Leia kõik võimalused, millise arvu ma võisin mõelda.

Vastus: $\frac{3}{2}$.

Lahendus. Olgu mõeldud arv x. Ülesande tingimustest saame võrrandi

$$x^3 = \frac{3}{4}x + x^2.$$

Eelduse põhjal $x \neq 0$, mistõttu võime võrrandi pooled jagada arvuga x. See annab võrrandi $x^2 = \frac{3}{4} + x$. Viimane on samaväärne ruutvõrrandiga $x^2 - x - \frac{3}{4} = 0$, mille lahendid on $x = -\frac{1}{2}$ ja $x = \frac{3}{2}$. Ainult $\frac{3}{2}$ rahuldab positiivsena ülesande tingimust.

3. *(Maksim Ivanov)*

Pool õuna kaalub 50 g võrra rohkem kui kolmandik pirni. Pool pirni kaalub 120 g võrra rohkem kui kolmandik ploomi. Õun, pirn ja mingi positiivne täisarv ploome kaaluvad kokku täpselt 1 kg. Kui palju kaalub ploom, kui on teada, et iga ploomi mass on üks ja sama täisarv gramme?

Vastus: 45 g.

Lahendus. Kaalugu ploom x grammi. Siis pool pirni kaalub $\frac{1}{3}x + 120$ grammi, mistõttu pirn kaalub $\frac{2}{3}x + 240$ grammi. Pool õuna kaalub järelikult $\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}x + 240\right) + 50$ ehk $\frac{2}{9}x + 130$ grammi, mistõttu õun kaalub $\frac{4}{9}x + 260$ grammi. Seega õun ja pirn kaaluvad kokku $\frac{2}{3}x + 240 + \frac{4}{9}x + 260$ ehk $\frac{10}{9}x + 500$ grammi.

Olgu ploomide arv k. Saame seose $\frac{10}{9}x + 500 + kx = 1000$, kust

$$\frac{10x}{9} + kx = 500. \tag{3}$$

Seega $\frac{10x}{9}$ peab olema täisarv. Kuna arvul 10 pole tegureid, mis taanduksid 9-ga välja, siis peab x jaguma 9-ga. Seega kirjutades seose (3) ümber kujul

$$(10 + 9k) \cdot \frac{x}{9} = 500, \tag{4}$$

on võrduse vasakul pool kahe täisarvu korrutis. Arv $10 + 9k$ annab 9-ga jagades jäägi 1, sest 10 annab 9-ga jagades jäägi 1 ja $9k$ jagub 9-ga. Arvu 500 positiivsed tegurid on $1, 2, 4, 5, 10, 20, 25, 50, 100, 125, 250, 500$, millest ainult 1, 10 ja 100 annavad 9-ga jagades jäägi 1. Et aga $10 + 9k > 10$, siis ainus võimalus on $10 + 9k = 100$. Võrrandist (4) saame nüüd $\frac{x}{9} = 5$, kust $x = 45$. Seega ploom kaalub 45 grammi.

4. *(Sandra Schumann)*

Tõesta, et mistahes reaalarvude x ja y korral

$$x^2 + 4 > (x - y)(y + 2).$$

Lahendus 1. Avades paremal pool sulud, viies kõik liikmed vasakule ja korrutades mõlemad pooled kahega, saame samaväärse võrratuse

$$2x^2 + 8 - 2xy - 4x + 2y^2 + 4y > 0. \tag{5}$$

Paneme tähele, et

$$\begin{aligned} 2x^2+8-2xy-4x+2y^2+4y &= \left(x^2-2xy+y^2\right) + \left(x^2-4x+4\right) + \left(y^2+4y+4\right) = \\ &= (x-y)^2 + (x-2)^2 + (y+2)^2. \end{aligned}$$

Seega võrratus (5) kehtib, kuna vasak pool võrdub reaalarvude ruutude summaga ja reaalarvude ruudud on mittenegatiivsed (võrratuse (5) vasak pool ei saa olla null, sest see tähendaks, et $x-y$, $x-2$ ja $y+2$ oleksid korraga nullid, mis pole võimalik).

Lahendus 2. Avades paremal pool sulud, viies võrratuse kõik liikmed vasakule ja järjestades astmete järgi, saame samaväärse võrratuse

$$x^2 - (y + 2)x + \left(y^2 + 2y + 4\right) > 0. \tag{6}$$

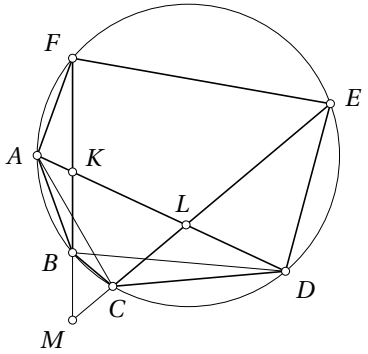
Vaatame võrratuse (6) vasakut poolt ruutkolmliikmena x suhtes. Vastava ruutvõrrandi diskriminant on $(y + 2)^2 - 4\left(y^2 + 2y + 4\right)$ ehk $-3y^2 - 4y - 12$. Vaatame saadud avaldist omakorda ruutkolmliikmena y suhtes; et vastava ruutvõrrandi diskriminant $4^2 - 4 \cdot 3 \cdot 12$ on negatiivne ja pealiikme kordaja on negatiivne, omandab avaldis $-3y^2 - 4y - 12$ ainult negatiivseid väärtusi. Seega on võrratusele (6) vastava ruutvõrrandi diskriminant negatiivne sõltumata y väärtusest. Kuna selle võrrandi pealiikme kordaja on positiivne, siis on võrrandi (6) vasak pool alati positiivne. Ülesande väide järeldub.

5. *(Oleg Košik, Birgit Veldi)*

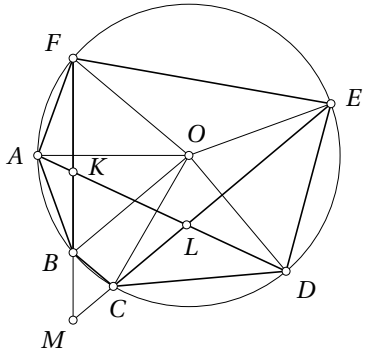
Kõõlkuusnurgas $ABCDEF$ kehtivad võrdused $|FA| = |AB|$ ja $|CD| = |DE|$ ning võrratus $|BC| < |EF|$. Diagonaalid BF ja CE lõikavad diagonaali AD vastavalt punktides K ja L, diagonaalide BF ja CE pikendused aga lõikuvad punktis M. Tõesta, et kolmnurk KLM on võrdhaarne.

Lahendus 1. Kuna $|BC| < |EF|$ (joonis 14), siis $\angle MKL = \angle BKD$ ning $\angle MLK = \angle CLA$. Seega piisab näidata, et $\angle BKD = \angle CLA$. Tähistame $\angle FAB = \alpha$, $\angle CDE = \delta$ ja $\angle BAC = \angle BDC = \xi$. Kuusnurga $ABCDEF$ ümberringjoone võrdsetele kaartele toetuvatest piirdenurkadest saame

$$\angle ADB = \angle AFB = \angle ABF = \frac{180^\circ - \alpha}{2},$$
$$\angle DAC = \angle DEC = \angle DCE = \frac{180^\circ - \delta}{2}.$$



Joonis 14



Joonis 15

Kuna BKD on kolmnurga KAB välisnurk, siis eelneva põhjal

$$\angle BKD = \angle BAK + \angle ABK = \angle BAD + \angle ABF = \xi + \frac{180^\circ - \delta}{2} + \frac{180^\circ - \alpha}{2};$$

analoogselt kuna CLA on kolmnurga CDL välisnurk, siis

$$\angle CLA = \angle CDL + \angle DCL = \angle CDA + \angle DCE = \xi + \frac{180^\circ - \alpha}{2} + \frac{180^\circ - \delta}{2}.$$

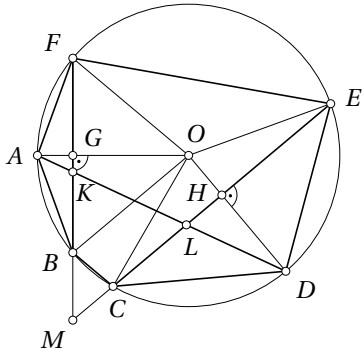
Järelikult $\angle BKD = \angle CLA$, mida oligi tarvis näidata.

Lahendus 2. Nagu lahenduses 1, taandame kõigepealt ülesande võrduse $\angle BKD = \angle CLA$ näitamisele. Olgu O kuusnurga $ABCDEF$ ümberringjoone keskpunkt (joonis 15). Kõõlude vahelise nurga suuruse valemi põhjal

$$\begin{aligned} \angle BKD &= \frac{1}{2}(\angle BOC + \angle COD + \angle FOA), \\ \angle CLA &= \frac{1}{2}(\angle DOE + \angle AOB + \angle BOC). \end{aligned}$$

Seega piisab näidata, et $\angle BOC + \angle COD + \angle FOA = \angle DOE + \angle AOB + \angle BOC$, mille jaoks omakorda piisab näidata, et $\angle COD + \angle FOA = \angle DOE + \angle AOB$. Viimane aga järeldub võrdustest $\angle COD = \angle DOE$ ja $\angle FOA = \angle AOB$, mis tulenevad vastavalt tingimustest $|CD| = |DE|$ ja $|FA| = |AB|$.

Lahendus 3. Olgu O kuusnurga $ABCDEF$ ümberringjoone keskpunkt. Vaatleme raadiuseid OA ja OD. Kuna raadiust sisaldav sirge on ringjoone suhtes sümmeetriatelg ning $|AB| = |AF|$, siis punktid B ja F on OA suhtes sümmeetrilised, millest tulenevalt OA ja BF on risti. Analoogselt leiame, et OD ja CE on risti. Olgu G sirgete OA ja BF lõikepunkt ning H sirgete OD ja CE llõikepunkt (joonis 16).



Joonis 16

Vaatleme kolmnurka OAD. Kuna $|OA| = |OD|$, siis $\angle OAD = \angle ODA$. Täisnurksetes kolmnurkades AGK ja DHL on ühed tervnurgad võrdsed, järelikult on võrdsed ka teised tervnurgad ehk $\angle AKG = \angle DLH$. Kuna $\angle AKG = \angle MKL$ ja $\angle DLH = MLK$ (tippnurgad), siis ka $\angle MKL = \angle MLK$. Seega kolmnurk KLM on võrdhaarne.

Märkus. Väide kehtib ka juhul, kui $|BC| > |EF|$, tõestus on analoogne.

6. *(Maksim Ivanov)*

Arturil ja Karlil on algul kahe peale kokku 240 münti. Peetril ainsana kolmest poisist münte ei ole. Ühe käiguga annab kumbki kahest poisist, kellel on kummalgi rohkem münte kui kolmandal, viimasele täpselt poole oma müntidest. Pärast neljandat käiku on Karlil niisama palju münte kui alguses. Mitu münti on alguses Arturil?

Vastus: 208.

Lahendus 1. Olgu Arturil alguses a münti, siis Karlil on alguses $240-a$ münti ja Peetril 0. Pärast esimest käiku on Arturil $\frac{1}{2}a$, Karlil $120-\frac{1}{2}a$ ja Peetril 120 münti. Edasi vaatame kahte juhtu.

- Kui $\frac{1}{2}a > 120-\frac{1}{2}a$, siis teisel käigul annavad Artur ja Peeter pooled oma mündid Karlile. Pärast seda on Arturil $\frac{1}{4}a$, Peetril 60 ja Karlil $180-\frac{1}{4}a$ münti. Kuna $240-a > 0$, siis $a < 240$, millest tulenevalt $\frac{1}{4}a < 60$ ja $180-\frac{1}{4}a > 120$. Seega kolmandal käigul annavad Karl ja Peeter pooled oma mündid Arturile. Pärast seda on Karlil $90-\frac{1}{8}a$, Peetril 30 ja Arturil $120+\frac{1}{8}a$ münti. Kuna $\frac{1}{8}a < 30$, siis $90-\frac{1}{8}a > 30$. Seega neljandal käigul

annavad taas Artur ja Karl pooled oma mündid Peetrile. Pärast seda on Karlil $45 - \frac{1}{16}a$ münti. Ülesande tingimuse kohaselt $240 - a = 45 - \frac{1}{16}a$, kust $a = 208$.

- Kui $\frac{1}{2}a < 120 - \frac{1}{2}a$, siis teisel käigul annavad Karl ja Peeter pooled oma mündid Arturile. Pärast seda on Karlil $60 - \frac{1}{4}a$, Peetril 60 ja Arturil $120 + \frac{1}{4}a$ münti. Kolmandal käigul annavad Artur ja Peeter pooled oma mündid Karlile. Pärast seda on Arturil $60 + \frac{1}{8}a$, Peetril 30 ja Karlil $150 - \frac{1}{8}a$ münti. Kuna $150 - \frac{1}{8}a > 30 + 120 - \frac{1}{2}a > 30 + \frac{1}{2}(240 - a) > 30$, siis neljandal käigul annavad Artur ja Karl pooled oma mündid Peetrile. Pärast seda on Karlil $75 - \frac{1}{16}a$ münti. Kuid $75 - \frac{1}{16}a < 120 < 240 - a$, sest eeldusest $\frac{1}{2}a < 120 - \frac{1}{2}a$ tulenevalt $a < 120$. Seega sel juhul ei saa Karlil olla pärast neljandat käiku samapalju münte kui alguses.

Lahendus 2. Igal käigul iga poiss kas kaotab pooled oma mündid või saab pooled ülejäänud müntidest juurde. Seega kui tal on enne mingit käiku x münti, siis on tal pärast seda käiku kas $\frac{1}{2}x$ münti või $x + \frac{1}{2}(240 - x)$ ehk $120 + \frac{1}{2}x$ münti. Seejuures on teisel juhul pooled kõigist müntidest tema käes, mistõttu tal on rohkem münte kui kummalgi ülejäänud poistest. See tähendab, et järgmisel käigul ta kaotab pooled mündid ja kuna ka pärast järgmist käiku on tal rohkem münte kui sellel poisil, kes järgmisel käigul samuti münte ära annab, siis kaotab ta pooled mündid ka ülejärgmisel käigul. Sama poiss ei kaota kunagi münte kolmel järjestikusel käigul, sest siis peaks keegi ülejäänud poistest kolme käigu jooksul kaks korda münte juurde saama, mis pole võimalik, kuna igale käigule, mil münte juurde saadakse, järgneb kaks käiku, mil münte ära antakse.

Olgu Arturil alguses a münti, siis Karlil on alguses $240 - a$ münti. Et Peetril münte pole, siis esimesel käigul annab Karl münte ära, mistõttu pärast seda jääb talle $120 - \frac{1}{2}a$ münti. Edasi vaatleme juhtusid vastavalt sellele, millal Karl münte juurde saab; eelneva põhjal toimub see kas teisel või kolmandal käigul (ja mitte mõlemal).

- Kui Karl saab münte juurde teisel käigul, siis on tal pärast teist käiku $120 + \frac{1}{2}\left(120 - \frac{1}{2}a\right)$ ehk $180 - \frac{1}{4}a$ münti, pärast kolmandat käiku $90 - \frac{1}{8}a$ münti ja pärast neljandat käiku $45 - \frac{1}{16}a$ münti. Ülesande tingimuse kohaselt $240 - a = 45 - \frac{1}{16}a$, kust $a = 208$.

- Kui Karl saaks esmakordselt münte juurde kolmandal käigul, siis oleks tal pärast teist käiku $60 - \frac{1}{4}a$, pärast kolmandat käiku $120 + \frac{1}{2}\left(60 - \frac{1}{4}a\right)$ ehk $150 - \frac{1}{8}a$ ning pärast neljandat käiku $75 - \frac{1}{16}a$ münti. Ülesande tingimuse kohaselt $240 - a = 75 - \frac{1}{16}a$, kust $a = 176$. See aga on vastuolus eeldusega, sest siis oleks pärast esimest käiku Arturil 88, Karlil 32 ja Peetril 120 münti, mistõttu peaks Karl juba teisel käigul münte juurde saama. Seega pole see juht võimalik.

Kokkuvõttes on ainus võimalus, et Arturil on alguses 208 münti.

Lahendused

1. *(Maksim Ivanov)*

Kui kauba algset hinda vähendada $4a$ protsendi võrra, siis kauba hind väheneb 20 euro võrra. Kui uut hinda suurendada $5a$ protsendi võrra, siis see tõuseb 23 euro võrra. Leia kauba esialgne hind.

Vastus: 250 eurot.

Lahendus. Olgu kauba algne hind x eurot. Ülesande tingimuste põhjal kehtivad võrdused $\frac{4a}{100} \cdot x = 20$ ja $\frac{5a}{100} \cdot (x - 20) = 23$. Esimesest saame $ax = 500$, teisest $\frac{ax}{20} - a = 23$. Asendades ax esimesest võrdusest teise, saame $\frac{500}{20} - a = 23$, kust $a = 25 - 23 = 2$. Järelikult $x = \frac{500}{2} = 250$ ehk kauba algne hind oli 250 eurot.

2. *(Urve Kangro)*

Kas leiduvad sellised kaks reaalarvu, mille vahe on 40 ning aritmeetilise ja geomeetrilise keskmise vahe on 8?

Vastus: jah.

Lahendus 1. Olgu need arvud x ja y. Siis $x - y = 40$ ja $\frac{x+y}{2} - \sqrt{xy} = 8$. Esimesest võrrandist saame $x = y + 40$. Siit teise võrrandisse asendades saame

$$\frac{2y+40}{2} - \sqrt{y(y+40)} = 8.$$

Viies juurega liikme ainsana paremale ning lihtsustades vasakul, saame

$$y + 12 = \sqrt{y(y+40)}.$$

Tõstes mõlemad pooled ruutu ja avades sulud, saame

$$y^2 + 24y + 144 = y^2 + 40y.$$

Koondades sarnased liikmed ja lahendades saadud lineaarvõrrandi, saame $y = 9$. Et $x - y = 40$, siis $x = 49$. Kontroll näitab, et arvud 9 ja 49 tõepoolest rahuldavad ülesande tingimust.

Lahendus 2. Olgu need arvud x ja y. Siis $x - y = 40$ ja $\frac{x+y}{2} - \sqrt{xy} = 8$; viimase võrduse samaväärne kuju on $\frac{x+y}{2} - 8 = \sqrt{xy}$. Tõstes selle võrduse pooled ruutu ja viies kõik liikmed vasakule, saame

$$\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 - 8(x+y) + 64 - xy = 0. \tag{7}$$

Paneme tähele, et

$$\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 - xy = \frac{x^2+2xy+y^2}{4} - xy = \frac{x^2-2xy+y^2}{4} = \left(\frac{x-y}{2}\right)^2 = 400.$$

Seega võrrand (7) taandub kujule $464-8(x+y) = 0$, kust $x+y = 58$. Süsteemi

$$\begin{cases} x - y = 40, \\ x + y = 58 \end{cases}$$

lahendamisel saame $x = 49$, $y = 9$. Kontroll näitab, et arvud 9 ja 49 tõepoolest rahuldavad ülesande tingimust.

3. *(Härmel Nestra)*

Positiivsed täisarvud n ja m on sellised, et $\sqrt{n}+\sqrt{m}$ on ratsionaalarv. Tõesta, et n ja m on täisarvude ruudud.

Lahendus 1. Olgu $\sqrt{n}+\sqrt{m} = r$, kus r on ratsionaalarv. Positiivsete arvude summana on r nullist erinev. Siis $\sqrt{m} = r - \sqrt{n}$. Ruutu tõstes saame $m = r^2 + n - 2r\sqrt{n}$, kust $\sqrt{n} = \frac{r^2+n-m}{2r}$. Seega $\sqrt{n}$ on ratsionaalarv, millest tulenevalt n on ratsionaalarvu ruut ja n täisarvulisuse tõttu ka täisarvu ruut. Sümmeetria tõttu saame analoogselt, et täisarvu ruut on ka arv m.

Lahendus 2. Olgu $\sqrt{n}+\sqrt{m} = r$, kus r on ratsionaalarv. Positiivsete arvude summana on r nullist erinev. Ruutu tõstes saame $n + 2\sqrt{nm} + m = r^2$, kust $\sqrt{nm} = \frac{r^2-n-m}{2}$. Seega $\sqrt{nm}$ on ratsionaalarv, millest tulenevalt nm on ratsionaalarvu ruut ja täisarvulisuse tõttu ka täisarvu ruut. Tähistades $nm = a^2$, kus $a > 0$, saame algse võrrandi poolte korrutamisel suurusega $\sqrt{m}$ võrrandi $a + m = r\sqrt{m}$. Seega $\sqrt{m} = \frac{a+m}{r}$, mistõttu $\sqrt{m}$ on ratsionaalarv. Järelikult m on ratsionaalarvu ruut ja täisarvulisuse tõttu ka täisarvu ruut. Sümmeetria põhjal ka n on täisarvu ruut.

Lahendus 3. Olgu $\sqrt{n}+\sqrt{m} = r$, kus r on ratsionaalarv. Ruutu tõstes saame $n + 2\sqrt{nm} + m = r^2$, kust $\sqrt{nm} = \frac{r^2-n-m}{2}$. Seega $\sqrt{nm}$ on ratsionaalarv, millest tulenevalt nm on ratsionaalarvu ruut ja täisarvulisuse tõttu ka täisarvu ruut.

Olgu $d = \text{SÜT}(n, m)$ ning $n = dn'$, $m = dm'$. Siis $nm = d^2 n'm'$. Kuna nm ja d^2 on täisarvude ruudud, siis ka $n'm'$ on täisarvu ruut. Et n' ja m' on ühistegurita, siis on see võimalik vaid juhul, kui n' ja m' on mõlemad täisarvude ruudud. Seega $r = \sqrt{dn'} + \sqrt{dm'} = \sqrt{d}\left(\sqrt{n'} + \sqrt{m'}\right)$, kust $\sqrt{d} = \dfrac{r}{\sqrt{n'} + \sqrt{m'}}$. Viimase võrduse parem pool on ratsionaalarv, sest see on ratsionaalarvu ja täisarvu jagatis, seega ka vasak pool $\sqrt{d}$ on ratsionaalarv ning d on ratsionaalarvu ruut. Et aga d on täisarv, siis d peab olema täisarvu ruut. Siis ka korrutised dn' ja dm' ehk n ja m on täisarvude ruudud.

Lahendus 4. Olgu $\sqrt{n} + \sqrt{m} = r$, kus r on ratsionaalarv. Positiivsete arvude summana on r nullist erinev. Siis $\sqrt{n} - \sqrt{m} = \dfrac{n-m}{\sqrt{n} + \sqrt{m}} = \dfrac{n-m}{r}$. Seega ka $\sqrt{n} - \sqrt{m}$ on täisarvu ja ratsionaalarvu jagatisena ratsionaalarv; olgu see s. Liites ja lahutades võrdused $\sqrt{n} + \sqrt{m} = r$ ja $\sqrt{n} - \sqrt{m} = s$, saame $\sqrt{n} = \dfrac{r+s}{2}$ ja $\sqrt{m} = \dfrac{r-s}{2}$, mis mõlemad on ratsionaalarvud. Järelikult n ja m on ratsionaalarvude ruudud ning täisarvulisuse tõttu ka täisarvude ruudud.

4. *(Urve Kangro)*

Peres on 7 last. Iga laps sai jõuludeks kommipaki. Kui lapsed oma kommid üle lugesid, selgus, et igaüks oli saanud erineva arvu komme, kõigil kokku oli aga täpselt 100 kommi. Tõesta, et leidub 3 last, kes said kokku vähemalt 50 kommi.

Lahendus 1. Olgu kommide arvud $x_1, x_2, \ldots, x_7$, kusjuures üldisust kitsendamata $x_1 < x_2 < \ldots < x_7$. Kui $x_5 + x_6 + x_7 \geqslant 50$, siis nõutud 3 last leiduvad. Oletame nüüd, et $x_5 + x_6 + x_7 \leqslant 49$; siis $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \geqslant 51$. Kuna $x_4 \leqslant x_7 - 3$, $x_3 \leqslant x_6 - 3$ ja $x_2 \leqslant x_5 - 3$, siis $x_2 + x_3 + x_4 \leqslant x_5 + x_6 + x_7 - 9 \leqslant 40$. Seega $x_1 \geqslant 51 - 40 = 11$. Nüüd $x_2 \geqslant 12$, $x_3 \geqslant 13$ ja $x_4 \geqslant 14$, aga kuna võrduste korral $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 50 < 51$, siis peab olema $x_4 \geqslant 15$, $x_5 \geqslant 16$, $x_6 \geqslant 17$ ja $x_7 \geqslant 18$. Järelikult $x_5 + x_6 + x_7 \geqslant 16 + 17 + 18 = 51$ – jällegi nõutud 3 last leiduvad.

Lahendus 2. Olgu kommide arvud $x_1, x_2, \ldots, x_7$, kusjuures üldisust kitsendamata $x_1 < x_2 < \ldots < x_7$. Oletame väitevastaselt, et $x_5 + x_6 + x_7 \leqslant 49$. Siis $x_5 \leqslant 15$, muidu oleks $x_5 + x_6 + x_7 \geqslant 16 + 17 + 18 = 51$. Aga sel juhul $x_4 \leqslant 14$, $x_3 \leqslant 13$, $x_2 \leqslant 12$ ja $x_1 \leqslant 11$ ehk $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leqslant 11 + 12 + 13 + 14 = 50$. Seega kokku saab olla maksimaalselt 99 kommi, vastuolu.

Lahendus 3. Olgu kommide arvud $x_1, x_2, \ldots, x_7$, kusjuures üldisust kitsendamata $x_1 < x_2 < \ldots < x_7$. Vaatleme kahte juhtu.

- Kui $x_4 \leqslant 14$, siis $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leqslant 11 + 12 + 13 + 14 = 50$, seega $x_5 + x_6 + x_7 \geqslant 50$.

- Kui $x_4 \geqslant 15$, siis $x_5 + x_6 + x_7 \geqslant 16 + 17 + 18 = 51$.

Lahendus 4. Olgu kommide arvud $x_1, x_2, \ldots, x_7$, kusjuures üldisust kitsendamata $x_1 < x_2 < \ldots < x_7$. Siis $x_5 \geqslant x_4 + 1$, $x_6 \geqslant x_4 + 2$ ja $x_7 \geqslant x_4 + 3$, seega $x_5 + x_6 + x_7 \geqslant 3x_4 + 6$. Teiselt poolt $x_3 \leqslant x_4 - 1$, $x_2 \leqslant x_4 - 2$ ja $x_1 \leqslant x_4 - 3$, seega $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leqslant 4x_4 - 6$. Kui oletame, et iga 3 last said kokku vähem kui 50 kommi, siis muuhulgas $3x_4 + 6 \leqslant 49$, seega $x_4 \leqslant \frac{43}{3}$ ehk $x_4 \leqslant 14$. Samas peaks siis kehtima ka $4x_4 - 6 \geqslant 51$, seega $x_4 \geqslant \frac{57}{4}$ ehk $x_4 \geqslant 15$, vastuolu.

Lahendus 5. Olgu kommide arvud $x_1, x_2, \ldots, x_7$, kusjuures üldisust kitsendamata $x_1 < x_2 < \ldots < x_7$. Paneme tähele, et $x_1 \leqslant 11$, sest muidu oleks võimalik vähim kommide arv $12 + 13 + 14 + 15 + 16 + 17 + 18$ ehk 105. Kui $x_1 = 11$, siis on vähim võimalik kommide arv $11 + 12 + 13 + 14 + 15 + 16 + 17$ ehk 98, aga suurendada saaks ainult kas suurimat pakki 2 võrra või kahte suurimat 1 võrra, mõlemal juhul oleks 3 suurimas kommipakis kokku 50 kommi.

Kui $x_1 \leqslant 10$, siis kuna $x_4 \leqslant x_7 - 3$, $x_3 \leqslant x_6 - 3$ ja $x_2 \leqslant x_5 - 3$, siis $x_2 + x_3 + x_4 \leqslant x_5 + x_6 + x_7 - 9$. Teiselt poolt, $x_2 + x_3 + x_4 = 100 - x_1 - x_5 - x_6 - x_7$. Asendades selle eelmisse võrratusse, saame

$$100 - x_1 - x_5 - x_6 - x_7 \leqslant x_5 + x_6 + x_7 - 9$$

ehk $2(x_5 + x_6 + x_7) \geqslant 109 - x_1$. Kasutades nüüd eeldust, et $x_1 \leqslant 10$, saame $x_5 + x_6 + x_7 \geqslant \frac{99}{2}$. Täisarvulisuse tõttu $x_5 + x_6 + x_7 \geqslant 50$.

Märkus 1. Lahendusega 3 sarnase lahenduse võib saada ka, vaadeldes juhte $x_5 \leqslant 15$ ja $x_5 \geqslant 16$.

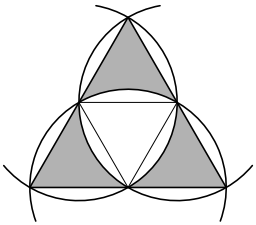
Märkus 2. On täpselt kaks võimalust, kus leidub 3 last, kes said kokku täpselt 50 kommi: selleks peavad kommide arvud olema kas 11, 12, 13, 14, 15, 17 ja 18 või 11, 12, 13, 14, 15, 16 ja 19.

5. *(Härmel Nestra)*

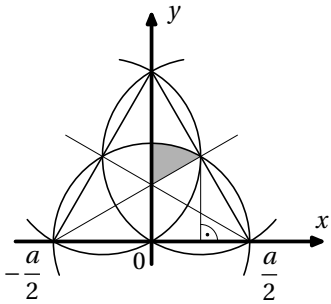
Võrdkülgse kolmnurga igale küljele kui diameetrile joonestatakse ringjoon. Leia kõigi ringjoonte sisse jääva ala pindala, kui kolmnurga küljepikkus on a.

Vastus: $\frac{1}{8}\left(\pi - \sqrt{3}\right)a^2$.

Lahendus 1. Võrdkülgse kolmnurga kõrguse aluspunkt on vastaskülje keskpunktis. Seega Thalese teoreemi põhjal läbib igale küljele kui diameetrile joonestatud ringjoon ülejäänud kahe külje keskpunkte. Algse kolmnurga pindala on $\frac{1}{4}\sqrt{3}a^2$. Kõigi kolme külje keskpunktide ühendamisel jaotame kolmnurga neljaks võrdseks osaks pindalaga $\frac{1}{16}\sqrt{3}a^2$. Ühe külje keskpunktist teiste külgede keskpunkti tõmmatud lõigud jaotavad sellele küljele



Joonis 17



Joonis 18

kui diameetrile joonistatud poolringi kolmeks võrdseks sektoriks. Ühe sektori nurk on 60° ja pindala $\frac{1}{6}\pi\left(\frac{a}{2}\right)^2$ ehk $\frac{1}{24}\pi a^2$. Lahutades kahest väiksest kolmnurgast moodustuva rombi pindalast sektori pindala, saame selle ala pindala, mille kolme ringjoone ühisosa eraldab algsest võrdkülgsest kolmnurgast; selliseid on 3 tükki (joonisel 17 värvitud halliks). Kolmnurga ülejäänud osa on parajasti kõigi kolme ringjoone sisse jääv ala. Seega otsitav pindala on $\frac{1}{4}\sqrt{3}a^2 - 3\cdot\left(2\cdot\frac{1}{16}\sqrt{3}a^2 - \frac{1}{24}\pi a^2\right)$, mis lihtsustamisel annab $\frac{1}{8}\left(\pi - \sqrt{3}\right)a^2$.

Lahendus 2. Toome sisse koordinaatteljed nii, et koordinaatide alguspunkt asub kolmnurga ühe külje keskel, x-telje siht langeb kokku selle külje sihiga ja kolmnurga punktide y-koordinaat on mittenegatiivne (joonis 18). Paneme tähele, et kolmnurga nurgapoolitajad jagavad vaadeldava ala kuueks võrdseks osaks. Ülemine parempoolne kuuendik (joonisel 18 halliks värvitud) on piiratud ülevalt ringjoonega, mille võrrand on $x^2 + y^2 = r^2$, kus $r = \frac{a}{2}$, alt sirgega, mille võrrand on $y = \frac{\sqrt{3}}{3}(x + r)$ (sest see sirge läbib punkti $(-r; 0)$ ja tema tõus on $\frac{\sqrt{3}}{3}$), ning vasakult y-teljega. Sirge ja ringjoone lõikepunkti x-koordinaadi leiame seosest $x^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{3}(x + r)\right)^2 = r^2$, mis annab ainsa positiivse lahendina $x = \frac{r}{2}$.

Järelikult otsitav pindala avaldub integraalide kaudu kujul

$$S = 6\cdot\left(\int_0^{\frac{r}{2}} \sqrt{r^2 - x^2}\,\mathrm{d}x - \int_0^{\frac{r}{2}} \frac{\sqrt{3}}{3}(x + r)\,\mathrm{d}x\right).$$

Teise osa saame ära integreerida:

$$\int_0^{\frac{r}{2}} \frac{\sqrt{3}}{3}(x+r)\,\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{3}}{6}(x+r)^2\Big|_0^{\frac{r}{2}} = \frac{3\sqrt{3}}{8}r^2 - \frac{\sqrt{3}}{6}r^2 = \frac{5\sqrt{3}}{24}r^2.$$

Esimese integraali osas teeme muutujavahetuse $x = r\sin t$, et saada ruutjuure alla täisruut. Siis $\mathrm{d}x = r\cos t\,\mathrm{d}t$ ning rajad muutuja t jaoks on 0 ja $\frac{\pi}{6}$. Saame

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{r}{2}} \sqrt{r^2-x^2}\,\mathrm{d}x &= \int_0^{\frac{r}{2}} r\cos t\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{6}} r\cos t\cdot r\cos t\,\mathrm{d}t = \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{6}} r^2\cos^2 t\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{6}} r^2\cdot\frac{1+\cos 2t}{2}\,\mathrm{d}t = \\ &= \left(\frac{t}{2}+\frac{\sin 2t}{4}\right)r^2\Big|_0^{\frac{\pi}{6}} = \left(\frac{\pi}{12}+\frac{\sqrt{3}}{8}\right)r^2.\end{aligned}$$

Seega

$$S = 6\cdot\left(\frac{\pi}{12}+\frac{\sqrt{3}}{8}-\frac{5\sqrt{3}}{24}\right)r^2 = \frac{1}{2}\left(\pi-\sqrt{3}\right)r^2 = \frac{1}{8}\left(\pi-\sqrt{3}\right)a^2.$$

6. *(Marko Tsengov)*
Olgu n positiivne täisarv. Jüri ja Mari mängivad arvteljel järgmist mängu. Kummalgi mängijal on nupp, mis on algul nullpunktis. Oma käigul sooritab mängija vabal valikul ühe järgnevast kahest tegevusest:

1) liigutab enda nupu ühe ühiku võrra positiivses või negatiivses suunas;
2) tõstab vastase nupu üle enda nupu teisele poole niisama kaugele (kui mängija nupp on punktis a ning vastase nupp on enne käiku punktis b, siis pärast käiku on vastase nupp punktis $2a-b$).

Mängijad sooritavad vaheldumisi kumbki n käiku, alustab Jüri. Võidab see mängija, kelle nupp on mängu lõpuks nullpunktist kaugemal. Kumb mängija saab võita vastase iga vastumängu korral, kui võrdse kauguse puhul nullpunktist võidab:

a) Mari;
b) Jüri?

Vastus: a) alati Mari; b) Jüri, kui $n = 1$, Mari ülejäänud juhtudel.
Lahendus.

a) Tehku Mari alati sama käik, mis Jüri on viimati teinud. Kui enne Jüri mingit käiku on mõlema mängija nupud ühes ja samas punktis, siis esimese käiguvariandi puhul satuvad nupud enne Jüri järgmist käiku taas ühte ja samma punkti, teise käiguvariandi puhul ei muutu kummagi nupu asukoht ja jällegi on nupud enne Jüri järgmist käiku ühes ja samas punktis. Kuna mängu algul on nupud ühes ja samas punktis, siis on nupud peale Mari iga käiku samuti ühes ja samas punktis, mistõttu sellise strateegiaga võidab alati Mari.

b) Kui $n = 1$, siis sooritagu Jüri esimest liiki käik. Mari ei saa esimest liiki käiguga liigutada oma nuppu nullpunktist kaugemale kui on Jüri nupp, samuti ei saa Mari teist liiki käiguga muuta Jüri nupu kaugust nullpunktist. Järelikult võidab sel juhul Jüri.

Kui $n \geqslant 2$, siis saab Mari võita, korrates Jüri viimatist käiku sarnaselt osa a) lahendusega kuni Jüri eelviimase käiguni ja tegutsedes edasi vastavalt järgmisele strateegiale sõltuvalt Jüri eelviimasest käigust.

- Kui Jüri eelviimane käik ei vii Jüri nuppu nullpunkti, kordab Mari ka selle käigu. Kui seejärel teeb Jüri esimest liiki käigu nullpunkti suunas või teist liiki käigu (viimane seisu ei muuda), teeb Mari esimest liiki käigu nullpunktist eemale, misläbi on tema nupp lõpus nullpunktist kaugemal. Kui aga Jüri teeb esimest liiki käigu nullpunktist eemale, vastab Mari teist liiki käiguga, misläbi Jüri nupp satub nullpunktile lähemale kui Mari nupp.
- Kui Jüri eelviimane käik viib Jüri nupu nullpunkti, teeb Mari kaks esimest liiki käiku nullpunktist eemale. Jüri vahepealne käik ei saa Mari nupu kaugust nullpunktist muuta, mistõttu Mari nupp lõpetab kahe ühiku kaugusel nullpunktist, Jüri nupp aga jääb kõige enam ühe ühiku kaugusele nullpunktist.

Seega jääb Mari nupp alati nullpunktist kaugemale kui Jüri nupp, mistõttu Mari võidab.

Lp hindaja!

Käesolevas esitame kõigepealt hindamise üldised põhimõtted ning seejärel järjekorras konkreetsed hindamisjuhised iga ülesande kohta eraldi.

1. Õpilase lahenduseks tuleb esmajoones lugeda see, mida õpilane on ülesande kohta vormistanud puhtandina (sh mustandipaberile selgesti arusaadavalt kirja pandud mõttekäigud, kui need on ametlikult puhtandipaberilt viidatud). Töö mustandi arvestamine või mittearvestamine ülesande lahenduse hulka on hindaja otsustada (või piirkonna hindamiskomisjoni ühine otsus kõigi ülesannete suhtes), kuid see peab toimuma kõigis töödes ühtmoodi.

2. Alljärgnevas on 7.–9. klassi olümpiaadi I osa (testi) ning kõikide ülejäänud ülesannete hindamisjuhised esitatud erinevalt.

   Testi iga küsimuse jaoks on eraldi loetletud või kirjeldatud vastused, mille eest tuleks anda vastavalt kaks punkti või üks punkt (st vastavaid punkte ühe küsimuse piires *ei tule* liita). Testiülesannete lahendusi õpilased ei pea esitama, vaid kirjutavad ülesannete lehel vastavale punktiirile või ülesande tekstis viidatud kohta ainult vastuse.

   Seevastu kõigi teiste ülesannete kohta tuleb esitada täielikud lahendused, ainult vastustest ei piisa. Nende ülesannete lahendused on hindamisjuhistes jaotatud võimalust mööda osadeks (etappideks) ning on näidatud iga osa eest antav punktide arv (st ühe ülesande eest antava punktisumma saamiseks *tuleb* lahenduse erinevate osade eest antud punktid liita).

   Mõnes skeemis on mõne etapi kirjelduse all („*Sealhulgas:*“ järel) alapunktidena välja toodud konkreetse etapi väiksemate osade eest antavad punktid – need lähevad käiku juhul, kui lahenduse see etapp on ebatäielik või vigane ja selle osa täispunkte seetõttu ei saa anda. Alamosade punktid tuleb omavahel samuti liita.

3. Žürii lahendustes ja käesolevates hindamisjuhistes on ülesannete vastused esitatud enamasti ainult ühel, lihtsaimal või kõige tõenäolisemalt esineval kujul. Hindamisel (sh testid!) tuleb võrdselt õigeks lugeda ka sama vastuse teised mõistlikud esitusviisid – sh taandatud hariliku murruna, segaarvuna, kümnendmurruna, sõnadega välja kirjutatuna –, seejuures ka osana pikemalt (nt täislausega, koos sobiva liigisõnaga või koos selgitustega) antud

vastusest. Juhud, kus ülesande sisu tingib erandeid sellest üldreeglist, on eraldi mainitud vastava ülesande hindamisjuhises.

Ühik arvu järel on vastuses vajalik juhul, kui ülesandes on küsitud suurust, mis teatud ühikutes avaldub. Näiteks küsimusele „Kui suur pindala ...?“ saab õige vastus olla „120 cm^2“, kuid mitte „120“ (kui ülesande tekstis pole kasutatud ühikuta pikkusi/pindalasid). Teistes ühikutes väljendatud sama suurus tuleb lugeda õigeks, näiteks vastused „120 cm^2“ ja „1,2 dm^2“ on samaväärsed. Ühik vastuses ei ole nõutav, kui ülesandes on küsitud kindlate ühikute arvu. Näiteks küsimusele „Mitu ruutsentimeetrit ...?“ antud vastused „120“ ja „120 cm^2“ tuleb võrdväärseks lugeda samal alusel nagu küsimusele „Mitu karu ...?“ antud vastused „3“ ja „3 karu“ (vastus koos liigisõnaga). Teistes ühikutes antud vastus tuleb aga lugeda valeks, vastused „120 cm^2“ ja „1,2 dm^2“ ei ole siin samaväärsed.

4. Mõnede ülesannete kohta, mida saab lahendada mitmel oluliselt erineval viisil, anname eraldi hindamisskeemid erinevate lahendusviiside jaoks. Rõhutame, et iga konkreetset mittetäielikku lahendust tuleb hinnata ainult *ühe* sellise skeemi järgi (selle järgi, mille kohaselt ta saaks kõige rohkem punkte).

5. Enamiku ülesannete korral (v.a testid ja tõestusülesanded) on hindamisjuhiste lõpus eraldi näidatud, mitu punkti anda ainult õige vastuse eest. See hinne on mõeldud juhuks, kui töös on ülesande kohta toodud ainult õige vastus või õige vastus koos mõttekäiguga, mis ei annaks skeemi järgi rohkem punkte kui on ette nähtud õige vastuse eest.

6. Kahtlemata esineb õpilaste töödes ka mõttekäike, mis ei mahu meie poolt pakutud skeemidesse. Selliste lahenduste hindamisel tuleb lähtuda sellest, *kui suur osa* antud ülesandest on õpilasel lahendatud, kasutades lahenduse üksikute osade kaalu määramisel võimaluse korral võrdluseks punktide jaotust meie pakutud hindamisskeemides.

7. *Mistahes* täieliku ja matemaatiliselt korrektse lahenduse eest tuleb igal juhul anda maksimumpunktid, sõltumata selle lahenduse pikkusest või otstarbekusest võrreldes teiste lahendusviisidega.

Eesti 70. matemaatikaolümpiaad

1. veebruar 2023 Piirkonnavoor **7. klass**

I osa hindamisjuhised

1. ∘ Antud õige vastus 312: 2 p

2. ∘ Antud õige vastus 398: 2 p

3. ∘ Antud õige vastus -5: 2 p

4. ∘ Antud õige vastus 30: 2 p

5. ∘ Antud õige vastus 10000 (või 10^4): 2 p

6. ∘ Antud õige vastus 75°: 2 p
∘ Antud vastuseks 75 ilma kraadimärgita: 1 p

7. ∘ Antud õige vastus 3: 2 p
∘ Antud vastuseks 3 koos ühikuga: 1 p

8. ∘ Antud õige vastus 12: 2 p

9. ∘ Antud õige vastus 31,5 cm (või $\frac{63}{2}$ cm): 2 p
∘ Antud vastuseks 31,5 või sama arv teisel kujul ilma ühikuta või vale ühikuga: 1 p
∘ Antud vastuseks õige väärtusega taandamata murd (nt $\frac{126}{4}$) ühikuga või ilma: 1 p

10. ∘ Antud õige vastus 2: 2 p

Eesti 70. matemaatikaolümpiaad

1. veebruar 2023 Piirkonnavoor **8. klass**

I osa hindamisjuhised

1.
- Antud õige vastus $\frac{2}{11}$: 2 p
- Antud vastuseks sama arv taandamata murru, kümnendmurru vms kujul: 0 p

2.
- Antud õige vastus 16: 2 p

3.
- Antud õige vastus -8: 2 p

4.
- Antud õige vastus 16: 2 p

5.
- Antud õige vastus 6: 2 p

6.
- Antud õige vastus 10°: 2 p
- Antud vastuseks 10 ilma kraadimärgita: 1 p

7.
- Antud õige vastus 5 cm^2: 2 p
- Antud vastuseks 5 ilma ühikuta või vale ühikuga: 1 p

8.
- Antud õige vastus 9: 2 p

9.
- Antud õige vastus 8 cm: 2 p
- Antud vastuseks 8 ilma ühikuta või vale ühikuga: 1 p

10.
- Antud õige vastus 5: 2 p

Eesti 70. matemaatikaolümpiaad

1. veebruar 2023 Piirkonnavoor **9. klass**

I osa hindamisjuhised

1. ∘ Antud õige vastus -618: 2 p

2. ∘ Antud õige vastus 6: 2 p

3. ∘ Antud õige vastus 4: 2 p

4. ∘ Antud õige vastus 55 eurot: 2 p
∘ Antud vastuseks 55 ilma ühikuta: 1 p

5. ∘ Antud õige vastus 1: 2 p

6. ∘ Antud õige vastus 8: 2 p

7. ∘ Antud õige vastus 40°: 2 p
∘ Antud vastuseks 40 ilma kraadimärgita: 1 p

8. ∘ Antud õige vastus 6 cm^2: 2 p
∘ Antud vastuseks 6 ilma ühikuta või vale ühikuga: 1 p

9. ∘ Antud õige vastus $\frac{1}{6}$: 2 p

10. ∘ Antud õige vastus 4: 2 p

II osa hindamisjuhised

1.
- Pakutud vähimaks sobivaks arvuks 1236: 1 p
- Ammendavalt põhjendatud, et väiksemad arvud ei sobi: 2 p
- Pakutud suurimaks sobivaks arvuks 9864: 1 p
- Ammendavalt põhjendatud, et suuremad arvud ei sobi: 3 p

Ainult täieliku õige vastuse (1236 ja 9864) eest ilma selgitusteta anda 2 punkti. Ainult ühe õige arvu (teine puudu või vale) eest, kui tööst on selge, kas mõeldud on vähimat või suurimat, anda 1 punkt.

2.
- Tähele pandud, et $EADF$ on ruut: 1 p
- Tähele pandud, et ruudu diagonaal ED poolitab täisnurga: 1 p
- Põhjendatud $\angle BDC = 20^\circ$: 1 p
- Põhjendatud $\angle DCE = 25^\circ$: 1 p
- Põhjendatud $\angle EKL = 45^\circ$: 1 p
- Põhjendatud $\angle EFC = 65^\circ$: 1 p
- Põhjendatud $\angle KLE = 70^\circ$: 1 p

Ainult täieliku õige vastuse (kõik kolm nurka) eest ilma selgitusteta anda 2 punkti. Ainult ühe või kahe õige nurga eest (teised puudu või valed) anda 1 punkt.

3.
- Leitud pallide kogumaksumus 210 eurot: 1 p
- Leitud ühes rühmas olevate pallide kogumaksumus: 1 p
- Leitud pallid, mis kuuluvad 8-eurose palliga ühte rühma, koos põhjendusega: 1 p
- Õigesti koostatud kaks rühma, millesse kuuluvad pallid vastavalt hinnaga 15 ja 20 eurot, ning välistatud teised võimalused: 3 p

  Sealhulgas:
  - Õigesti koostatud üks neist kahest rühmast koos teiste võimaluste välistamisega: *2 p*

  Leitud ülejäänud pallide jaotumine rühmadesse: 1 p

Ainult täieliku õige vastuse (ainus õige jaotus rühmadesse) eest ilma selgitusteta anda 3 punkti. Kui lisaks õigele jaotusele on vastuseks pakutud teisi jaotusi, siis anda 1 punkt. Vastuse eest, mis sisaldab ainult osaliselt õigeid ja valesid jaotusi, anda 0 punkti.

II osa hindamisjuhised

1.
- Leitud, et värvide järgnevus katkeb pärast 128 täistsüklit ja 1 lisakaarti: 1 p
- Leitud, et järgnevuse katkemisel on ümber tõstetud 257 punast ja 128 sinist kaarti: 1 p
- Mainitud, et järgmine kaart peaks olema punane: 1 p
- Järeldatud, et pakis on 257 punast kaarti: 1 p
- Järeldatud, et pakis on 343 sinist kaarti: 1 p
- Leitud, et muudetud värvide järgnevus katkeks pärast 171 täistsüklit ja 2 lisakaarti: 1 p
- Leitud, et muudetud värvide järgnevus katkeks pärast 515 kaardi ümbertõstmist: 1 p

Ainult õige vastuse (515) eest ilma selgitusteta anda 2 punkti.

2.
- Osa a) lahendus: 3 p

  Sealhulgas:
  - Põhjendatud, et $\angle BAG = 36°$: *1 p*
  - Põhjendatud, et $\angle BEA = 72°$: *1 p*
- Osa b) lahendus: 4 p

  Sealhulgas žürii lahendusega 1 sarnaste mõttekäikude puhul:
  - Põhjendatud, et $|AF| = |AE| = |EG|$: *1 p*
  - Põhjendatud, et $|EF| = 2|AD|$: *2 p*

  Sealhulgas žürii lahendusega 2 sarnaste mõttekäikude puhul:
  - Põhjendatud, et $|AF| = |AE| = |EG|$: *1 p*
  - Põhjendatud, et $|AE| + |EF| + |FA| = |EG| + |DC|$: *1 p*
  - Põhjendatud, et $|DE| = |GC|$: *1 p*

Ainult täieliku õige vastuse (kolm õiget nurka ja ümbermõõt 16 cm) eest ilma selgitusteta anda 2 punkti. Ainult ühe osa õige vastuse (kolm õiget nurka või ümbermõõt 16 cm, muu puudu või vale) eest anda 1 punkt.

3.
- Koostatud õige võrrandisüsteem Marko ja Tõnu boonuspunktide leidmiseks: 1 p
- Võrrandisüsteemist leitud õiged boonuspunktide arvud: 1 p
- Aru saadud, et punktide summa on kas $\frac{16}{n} + 33$ või $16 + \frac{33}{n}$, kus mõlemad liidetavad peavad olema naturaalarvud: 1 p

- Leitud kõik võimalused juhul, kui punkte kaotab Marko, ja välistatud kõik peale õige: 2 p
- Leitud kõik võimalused juhul, kui punkte kaotab Tõnu, ja välistatud kõik peale õige: 2 p

Ainult täieliku õige vastuse (136 ja 179) ilma selgitusteta anda 2 punkti. Ainult ühe õige arvu korral anda 1 punkt, kui rohkem variante pole pakutud või on lisaks pakutud 1 vale variant. Muudel juhtudel anda 0 punkti.

II osa hindamisjuhised

1. Anname kolm eraldi skeemi erinevate lähenemiste hindamiseks.

Skeem žürii lahendusega 1 sarnaste mõtteküikude jaoks.

- Leitud ülesande tingimusi rahuldavad esitused arvudele 0, 1, 2, 3 (või ükskõik millisele neljale järjestikusele naturaalarvule): 1 p
- Lähtudes ülesande tingimusi rahuldavast esitusest suvalise naturaalarvu n jaoks, pandud kirja ülesande tingimusi rahuldav esitus $n+4$ jaoks: 3 p
- Põhjendatud, et see esitus rahuldab ülesande tingimusi: 1 p
- Märgitud, et nii jätkates saab esitada kõik naturaalarvud: 2 p

Skeem žürii lahendusega 2 sarnaste mõtteküikude jaoks.

- Esitatud $n = 4q + r$, kus q on täisarv ja $r = 0, 1, 2, 3$: 2 p
- Leitud ülesande tingimusi rahuldavad esitused arvudele 0, 1, 2, 3: 1 p
- Leitud ülesande tingimusi rahuldav esitus suvalisele naturaalarvule n: 2 p
- Põhjendatud, et see esitus rahuldab ülesande tingimusi: 2 p

Skeem žürii lahendusega 3 sarnaste mõtteküikude jaoks.

- Mainitud või kasutatud ideed vaadelda arvu kahendesitust: 3 p
- Antud suvalise naturaalarvu n jaoks õige konstruktsioon kahendesituse kaudu: 2 p
- Põhjendatud, et see esitus rahuldab ülesande tingimusi: 2 p

2. Anname kaks eraldi skeemi erinevate lahenduste hindamiseks.

Skeem žürii lahendusega 1 sarnaste mõtteküikude jaoks.

- Näidatud, et kui üks asendatavatest arvudest on -2, siis asemele tekib arv -2: 4 p
- Järeldatud, et -2 jääb tahvlile, millised ka poleks asendatavad arvud: 2 p
- Tehtud õige lõppjäreldus: 1 p

Skeem žürii lahendusega 2 sarnaste mõtteküikude jaoks.

- Esitatud uus arv kujul $(x+2)(y+2)-2$, kus x ja y on asendatavad arvud (või leitud, et uuest arvust 2 võrra suurem arv on asendatavatest arvudest 2 võrra suuremate arvude korrutis): 3 p

- Järeldatud, et tahvlil olevatest arvudest 2 võrra suuremate arvude korrutis ei muutu: 2 p
- Märgitud, et algsetest arvudest 2 võrra suuremate arvude korrutis on 0: 1 p
- Tehtud õige lõppjäreldus: 1 p

Ainult õige vastuse (-2) eest ilma selgitusteta anda 1 punkt.

3.
- Leitud seosed $\angle CAB$, $\angle CBA$, $\angle HAB$, $\angle HBA$ vahel: 1 p
- Nurkade arvutusega avaldatud kas $\angle DCF$ või $\angle CDA$ või $\angle CDB$ samade nurkade kaudu (siin D, E, F tähistavad samu punkte mis žürii lahenduses): 2 p
- Sarnaselt avaldatud vastavalt kas $\angle EHF$ või $\angle HEA$ või $\angle HEB$ samade nurkade kaudu: 2 p
- Näidatud, et arvutatud nurgad on võrdsed: 1 p
- Järeldatud CD ja HE paralleelsus: 1 p

4.
- Põhjendatud, et Jüril pole võimalik sundida Marit käima oma ratsut Jüri ratsuga samale ruudule: 2 p
- Märgitud, et mängu algul on ratsud eri värvi ruutudel: 1 p
- Märgitud, et ratsu käib alati mustalt ruudult valgele või vastupidi: 1 p
- Järeldatud, et pärast Jüri käiku on mõlema mängija ratsud alati eri värvi ruutudel: 2 p
- Otsad õigesti kokku seotud: 1 p

Ainult õige vastuse (ei) eest ilma selgitusteta anda 0 punkti.

Kasutatud hindamisskeemid ja kontrollijate kommentaarid

1. *(Ülle Hüva)*

Lahenduse allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Tingimuste põhjal koostatud võrrand kujul $10(u+v) = 50(u-v)$, kus u ja v on vastavalt ujuja kiirus vee suhtes ja jõe voolukiirus: 3 p

  Sealhulgas:
  - Võetud kasutusele muutujad tähistamaks sportlase kiirust vee suhtes ja jõe voolukiirust: *1 p*
  - Kasutades sissetoodud muutujaid, saadud sportlase kiiruseks pärivoolu ujudes $u + v$ ja vastuvoolu ujudes $u - v$: *1 p*
- Saadud selle võrrandi lihtsustamisel seos $u = \frac{3}{2}v$: 3 p
- Tehtud õige lõppjäreldus: 1 p

Ainult õige vastuse (50) eest ilma selgitusteta anti 1 punkt.

2. *(Helli Juurma)*

Lahenduse allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Võetud kasutusele muutujad ühe isiku müntide arvu ja teisele üleantavate müntide arvu märkimiseks (žürii lahenduses x ja y): 1 p
- Koostatud võrrand, mis väljendab olukorda, kus Liisa on andnud Paulile münte: 1 p
- Koostatud võrrand, mis väljendab olukorda, kus Paul on andnud Liisale münte ja Paulile jääb münte rohkem: 1 p
- Koostatud võrrand, mis väljendab olukorda, kus Paul on andnud Liisale münte ja Liisale jääb münte rohkem: 1 p
- Esimesele juhule vastavat võrrandisüsteemi korrektselt analüüsides saadud vastuolu ülesande tingimustega: 1 p
- Lahendatud teisele juhule vastav võrrandisüsteem: 1 p
- Lahendi põhjal leitud õige vastus: 1 p

Ainult õige vastuse (264) eest ilma selgitusteta anti 1 punkt. Kui oli lisaks pakutud valesid variante, siis anti 0 punkti.

3. *(Aleksandr Šved)*

Lahenduse allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Antud vastuseks õige suurim väärtus 101: 1 p
- Vastus põhjendatud selle kaudu, et otsiti suurim x: 1 p
- Põhjendatud, miks summa on suurim suurima x korral: 1 p
- Antud vastuseks õige vähim väärtus 89: 1 p
- Vastus põhjendatud selle kaudu, et otsiti suurim y: 1 p
- Tõestatud, et y suurem olla ei saa: 1 p
- Põhjendatud, miks summa on vähim suurima y korral: 1 p

4. *(Raul Kangro)*

Lahenduse järgnevalt märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Toodud ülesande tingimustele vastav arvukomplekt: 1 p
- Näidatud, et järjestikuste arvude korral peab viies arv olema vähemalt 9, selleks et eelneva nelja kolmekordne summa saaks olla suurem kui järgneva kuue summa: 2 p
- Leitud vähima summaga sobiv arvukomplekt: 1 p
- Leitud korrektne vähim võimalik summa (109): 1 p
- Tõestatud, et *kõikide* tingimustele vastavate arvukomplektide korral on viies arv vähemalt 9: 1 p
- Tõestatud, et summa ei saa olla väiksem kui 109: 1 p

Valdav osa lahendajatest tegi ühe kahest eeldusest: a) et summa oleks vähim, peavad väikseimad arvud olema järjestikku; b) et summa oleks vähim, peavad suurimad kuus arvu olema järjestikku. Esimene neist eeldustest on vale ja nii jõuti mitteoptimaalse arvukomplektini. Kuigi teine eeldus osutus korrektseks, ei ole tegemist ilmselge faktiga, mida ei peaks tõestama. Ilma vastava tõestuseta lahendati ülesanne lisatingimustel ja see andis maksimaalselt 5 punkti.

5. *(Sandra Schumann)*

Erinevate lahenduste hindamiseks kasutati kaht skeemi.

Žürii lahendusega 1 sarnaste mõttekäikude järgnevalt märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Näidatud, et $\angle DLE = \angle DAC$: 3 p
- Näidatud, et $\angle DAC = \angle DBE$: 4 p

Žürii lahendusega 2 sarnaste mõttekäikude järgnevalt märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Näidatud, et $\angle BEL = \angle BCA$: 3 p
- Näidatud, et $\angle BCA = \angle BDL$: 4 p

Kui lahendus ei saanud punkte mujalt, siis võis saada 1 punkti, kui oli välja toodud kasulik tähelepanek, et $AC \parallel LE$ või $AC \parallel LF$. Selle punkti saamiseks oli oluline, et sirge sisaldaks punkti L, st märkimise eest, et $AC \parallel EF$, punkti ei saanud.

Väikese puudujäägiga täislahendused said 6 punkti.

Ülesanne osutus ootuspäraselt raskeks. Sageli ei suudetud joonestada joonist, mis ülesande tekstile vastaks. Mitmed osalejad ei teadnud kõõlnelinurga mõistet. Sageli ei saadud aru, et etteantud rööpkülikus on tipud antud kindlas järjekorras, st päripäeva või vastupäeva (aga mitte läbisegi). Oli aga ka nii mõnigi tubli lahendaja, kes lahendas ülesande täielikult või osaliselt.

6. *(Richard Luhtaru)*

Lahenduse allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Osa a) lahendus: 2 p

  Sealhulgas:
  - Väidetud (ilma tõestuseta), et rivi keskel paiknev inimene on lühim: *1 p*
- Osa b) lahendus: 3 p

  Sealhulgas:
  - Väidetud mitteformaalselt, et keskmise ja pikima kasvuga inimesed võivad paikneda suvalistel kohtadel: *1 p*
- Osa c) lahendus: 2 p

  Sealhulgas:
  - Väidetud (ilma tõestuseta), et rivi keskel paiknev inimene on rivis keskmise pikkusega: *1 p*

Ainult õigete vastuste (jah, ei, jah) eest ilma põhjenduseta sai 0 punkti.

Valdavalt oli osa a) lahendatud hästi, osadega b) ja c) jäädi rohkem hätta. Üheks komistuskiviks osas a) oli väide, et rivi keskel paiknev inimene ei ole kunagi 1013 järjestikuse inimese seas äärmine ja seega ta peab olema lühim. Vajalik on ka tähelepanek, et ta on *ainuke*, kes ei ole kunagi 1013 järjestikuse inimese seas äärmine. Kui seda olulist detaili polnud mainitud, siis sai osa a) eest 1 punkti.

Paljud õpilased tõid osa b) (ja ka muude osade) põhjenduseks väited nagu „ei saa kindlalt öelda“ ja „pole piisavalt infot“. Sellised väited ei ole aga ammendav põhjendus ning selliste põhjenduste eest sai osas b) 0 punkti. Kõige lihtsam viis tõestada, et mõni matemaatiline väide pole alati tõene, on leida konkreetne juht, mille korral see väide on väär (tuntud ka kui vastunäide). Seega tõestamaks, et osa b) vastus on eitav, piisab lihtsalt ühest näitest, kus rivi keskel paiknev inimene ei ole huvitav. Seejuures ei ole oluline tõestada muid fakte, näiteks et rivi keskel olev inimene ei saa olla lühim (kuigi see võib olla abiks vastunäite leidmisel).

Samuti olid levinud väited kujul „Kuna (ülesande tingimused), siis (ülesande vastus)“. Matemaatikaolümpiaadil ei piisa lihtsalt väitest, et mõni fakt on tõene (näiteks keskmine inimene on kõige lühem). Lisaks on vaja kirja panna konkreetne ja täpselt sõnastatud loogiline jada, kuidas ülesande tingimustest järeldub väide. Just loogiline jada on see, mis eristab vettpidavat tõestust ja intuitsiooni.

Levinud oli ka osas c) põhjendamata väide, et õpilased peavad olema pikkuse järjekorras (kasvavalt või kahanevalt). See on küll tõsi, kuid selle väite formaalne tõestamine nõuab omajagu tööd. Seetõttu said sellised lahendused osas c) 1 punkti.

Kasutatud hindamisskeemid ja kontrollijate kommentaarid

1. *(Julia Polikarpus)*

Erinevate mõttekäikude hindamiseks kasutati kaht eri skeemi.

Sihtide kaupa loendamisel põhineva lahenduse (žürii lahendus 1) allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Leitud ühes sihis asetatud kahest ühikkuubist koosnevate plokkide arv: 2 p
- Leitud teises sihis asetatud kahest ühikkuubist koosnevate plokkide arv: 2 p
- Leitud kolmandas sihis asetatud kahest ühikkuubist koosnevate plokkide arv: 2 p
- Saadud tulemuste põhjal õigesti arvutatud kõigi kahest ühikkuubist koosnevate plokkide arv: 1 p

Ühikkuupide ühekaupa valimisel põhineva lahenduse (žürii lahendus 2) allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Leitud risttahuka nurkades paiknevate ühikkuupide arv 8: 1 p
- Leitud risttahuka servas, kuid mitte nurgas paiknevate ühikkuupide arv 72: 1 p
- Leitud risttahuka tahul, kuid mitte servas paiknevate ühikkuupide arv 208: 1 p
- Leitud risttahuka sisemuses paiknevate ühikkuupide arv 192: 1 p
- Aru saadud, mitu valitud ühikkuubiga ühise tahuga ühikkuupi leidub kõigil vaadeldud juhtudel: 1 p
- Saadud andmete põhjal õigesti arvutatud kõigi võimaluste arv valida üks ja seejärel temaga ühist tahku omav ühikkuup: 1 p
- Kahega jagamise teel saadud õige vastus: 1 p

Ainult õige vastuse (1252) eest ilma selgitusteta anti 1 punkt.

2. *(Ehtel Timak)*

Lahenduse allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Tingimuste põhjal koostatud võrrand $x^3 = \frac{3}{4}x + x^2$ või midagi ilmselgelt samaväärset: 2 p
- Saadud seos õigesti teisendatud ruutvõrrandiks: 2 p

- Leitud selle ruutvõrrandi mõlemad lahendid või leitud positiivne lahend ja põhjendatud, et teine lahend on negatiivne: 2 p
- Antud õige vastus: 1 p

Ainult õige vastuse ($\frac{3}{2}$) eest ilma selgitusteta anti 1 punkt. Kui oli lisaks pakutud valesid arve, siis anti 0 punkti.

Lihtne ülesanne osutus üsna keeruliseks. Arv 0 on paljude jaoks müstiline, 40 õpilast pidasid arvu 0 positiivseks arvuks vastuse esitamisel. Ühes töös oli toredasti öeldud, et „see, et kas 0 on positiivne arv, on juba filosoofiline küsimus“. Nendele veel lisaks oli suur hulk õpilasi, kes lihtsalt võrrandi pooli tundmatuga läbi jagasid, selgitamata selle tegevuse lubatavust. Kui lahenduses ei olnud ühtegi märget selle kohta, et seda teha võib (et tundmatu on nullist erinev või positiivne arv), siis kaotas lahendus 1 punkti.

3. *(Taavet Kalda)*

Lahenduse allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Koostatud võrrand $\frac{10}{9}x + kx = 500$: 3 p

  Sealhulgas:
  - Pirni mass avaldatud ploomi massi kaudu: *1 p*
  - Õuna mass avaldatud ploomi massi kaudu: *1 p*
- Leitud lahend: 4 p

  Sealhulgas:
  - Järeldatud, et x jagub 9-ga: *1 p*
  - Tõestatud lahendi unikaalsus: *2 p*

Ainult õige vastuse eest ilma selgitusteta anti 1 punkt.

Mõned õpilased üritasid ülesannet lahendada, leides seose mitte ploomi massi ja k vahel, vaid hoopis kas pirni massi ja k vahel või õuna massi ja k vahel. See teeb lahenduse natuke algebraliselt keerulisemaks, aga üldine argumentatsioon jääb samaks. Seega hinnati neid lähenemisi ekvivalentsete hindamisskeemidega, kus võtmeseose leidmise eest anti 3 punkti, ja lahendi leidmise ja unikaalsuse tõestamise eest anti 4 punkti.

Kõige tüüpilisemaks veaks osutus lahendi unikaalsuse põhjendamata jätmine. Lisaks eeldasid õpilased mõnikord, et ploome on kas üks, või neid ei olegi (nõnda, et õuna ja pirni masside summa on 1000 grammi!).

4. *(Martin Rahe)*

Erinevate lahenduste hindamiseks kasutati kahte skeemi.

Žürii lahendusega 1 sarnase lähenemise puhul allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Viidud võrratus kujule, kus ühel pool märki on ruutude summa ja teisel pool 0: 5 p

  Sealhulgas tüüpiliste mõttekäikude korral:
  - Korrektselt sulud avatud: *1 p*
  - Viidud kõik liikmed ühele poole: *1 p*
  - Algne võrratus korrutatud 2-ga: *1 p*
- Mainitud, et reaalarvu ruut on mittenegatiivne: 1 p
- Põhjendatud, miks kehtib range võrratus: 1 p

Žürii lahendusega 2 sarnase lähenemise puhul allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Viidud võrratus ühe muutuja suhtes ruutkolmliikme kujule: 4 p

  Sealhulgas tüüpiliste mõttekäikude korral:
  - Korrektselt sulud avatud: *1 p*
  - Viidud kõik liikmed ühele poole: *1 p*
- Leitud saadud ruutkolmliikme diskriminant: 1 p
- Põhjendatud, miks leitud diskriminant on alati negatiivne: 1 p
- Põhjendatud, miks algne võrratus kehtib: 1 p

Algebraliste vigade eest, mis ei mõjutanud lahenduskäiku, kaotas 1 punkti.

Ülesanne osutus üsna halvasti lahendatuks. Paljudele õpilastele valmistas raskust oma ideede ammendavalt põhjendamine. Lahendustes, mis tuginesid juhtude läbivaatusele, osutus peamiseks probleemiks veendumine, et kõik juhud on käsitletud ning põhjendused on korrektsed. Leidus ka mitmeid võistlejaid, kes ei olnud aru saanud, et väide peab kehtima iga reaalarvupaari jaoks ning üksikute näidete toomine ei sobi lahenduseks.

5. *(Oleg Košik)*

Erinevate lahenduste hindamiseks kasutati kaht skeemi.

Piirdenurki kasutava lahenduse (žürii lahendus 1) allpool märgitud osade eest antud punktid liideti.

- Märgitud, et $\angle ABF = \angle AFB$, $\angle DCE = \angle DEC$ ning et vaja näidata, et $\angle MLK = \angle MKL$: 1 p
- Nurgad MKL ja MLK avaldatud kolmnurkade ABK ja CDL välisnurga valemi abil või kolmnurkade AKF ja DLE sisenurkade kaudu: 1 p
- Kõõlkuusnurgas leitud nurkade MKL ja MLK avaldamiseks vajalikud piirdenurkade seosed: 3 p
- Eelmise kolme punkti abil tuletatud seos $\angle MLK = \angle MKL$: 2 p

Raadiusi kasutava lahenduse (žürii lahendus 3) allpool märgitud osade eest antud punktid liideti.

- Tõmmatud raadiused OA ja OD ning leitud, et $OA \perp BF$ ning $OD \perp CE$: 3 p

- Sellest tuletatud võrdus $\angle MLK = \angle MKL$: 4 p

Paljud lahendajaid kahjuks ei teadnud, et kõõlkuusnurk tähendab seda, et kuusnurgal leidub ümberringjoon. Kõõlnelinurk on küll olümpiaadigeomeetria üks baasmõisteid, kuid see esineb riilikus õppekavas üksnes ühes gümnaasiumi valikkursuses, mida võetakse vaid mõnedes koolides ja sedagi mitte tingimata olümpiaadi toimumise ajaks. Kuna ülesanne sisaldas paljude jaoks võõrat mõistet, siis mitmed õpilased seda ülesannet ei proovinudki.

6. *(Toomas Tennisberg)*

Lahenduse allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Leitud võrrandid müntide arvu jaoks pärast neljandat käiku: 4 p
  Sealhulgas:
  - Märgitud valemid järgmise käigu müntide arvu leidmiseks: *2 p*
  - Märgitud, et pärast müntide saamist annab iga osaleja kaks korda järjest münte, või tehtud muu samaväärne tähelepanek: *1 p*
- Tõestatud, et ei leidu lahendit, kus Karlil on alguses rohkem münte: 2 p
  Sealhulgas:
  - Märgitud, et seda juhtu on vaja kontrollida: *1 p*
- Leitud õige vastus: 1 p

Õige vastuse eest ilma täiendava seletuseta anti 1 punkt.

Ülesanne osutus võrdlemisi keerukaks. Pikk vahe algsete tingimuste ning neljanda käigu vahel tekitas probleeme võrrandite püstitamisel. Paljud osalesid mõistsid ülesande teksti valesti ning eeldasid, et vaid üks ülejäänud poistest annab kolmandale, mitte mõlemad.

Kasutatud hindamisskeemid ja kontrollijate kommentaarid

1. *(Ave Külter)*

Lahenduse allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Koostatud võrrand, mis väljendab ülesandes kirjeldatud olukorda pärast hinna langetamist: 2 p
- Koostatud võrrand, mis väljendab ülesandes kirjeldatud olukorda pärast hinna tõstmist: 2 p
- Õigesti lahendatud saadud võrrandisüsteem: 2 p
- Antud õige vastus: 1 p

Ainult õige vastuse (250 eurot) eest ilma selgitusteta anti 1 punkt. Kui ühik puudus, siis anti 0 punkti.

2. *(Andres Talts)*

Lahenduse allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Koostatud õige võrrandisüsteem ülesandes kirjeldatud kahe arvu leidmiseks: 2 p

  Sealhulgas:
  - Koostatud üks õige võrrand: *1 p*
- Saadud võrrandisüsteem õigesti lahendatud: 4 p

  Sealhulgas žürii lahendusega 1 sarnastes töödes:
  - Saadud süsteemist õigesti tuletatud juurvõrrand ühe muutuja suhtes: *1 p*
  - Õigesti ruutjuurega liige avaldatud ja ruutjuurest vabanetud: *1 p*
  - Võrrand õigesti lahendatud: *1 p*
  - Leitud ka teise muutuja väärtus: *1 p*

  Sealhulgas žürii lahendusega 2 sarnastes töödes:
  - Tuletatud võrrand (7) või sellega samaväärne võrrand, kus xy ja $\left(\frac{x+y}{2}\right)^2$ (või sellest sulgude avamisel saadud liikmed) on võrrandi ühel pool: *1 p*
- Lahend kontrollitud (piisas väitmisest, et leitud arvud rahuldavad ülesande tingimusi): 1 p

Ainult õige vastuse (jah) eest ilma selgitusteta anti 0 punkti. Kui oli ilma selgitusteta väidetud, et ülesande tingimusi rahuldavad arvud 9 ja 49, siis anti 1 punkt, tingimusel, et vastuseks polnud pakutud rohkem variante.

3. *(Härmel Nestra)*

Erinevate lahenduste hindamiseks kasutati nelja skeemi.

Žürii lahendusega 1 sarnaste mõttekäikude allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Võetud kasutusele tähis ratsionaalarvu $\sqrt{n} + \sqrt{m}$ märkimiseks (žürii lahenduses r): 1 p
- Avaldatud $\sqrt{m}$ (või $\sqrt{n}$) selle ratsionaalarvu kaudu: 1 p
- Tõstetud võrrandi pooled ruutu: 1 p
- Põhjendatud, et $\sqrt{n}$ (või $\sqrt{m}$) on ratsionaalarv: 2 p

  Sealhulgas:
  - Avaldatud ruututõstmisel saadud võrrandist $\sqrt{n}$ (või $\sqrt{m}$): *1 p*
- Järeldatud, et n (või m) on täisarvu ruut: 1 p
- Järeldatud sümmeetria põhjal, et ka teine antud täisarv on täisarvu ruut: 1 p

Žürii lahendusega 2 sarnaste mõttekäikude allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Võetud kasutusele tähis ratsionaalarvu $\sqrt{n} + \sqrt{m}$ märkimiseks (žürii lahenduses r): 1 p
- Tõstetud võrrandi pooled ruutu ja selgesti liigutud $\sqrt{nm}$ avaldamise või ratsionaalarvulisuse tuvastamise suunas: 1 p
- Põhjendatud, et nm on täisarvu ruut: 1 p
- Saadud algsest seosest võrrand $a + m = r\sqrt{m}$, kus $a = \sqrt{nm}$: 1 p
- Järeldatud, et $\sqrt{m}$ on ratsionaalarv: 1 p
- Järeldatud, et m on täisarvu ruut: 1 p
- Järeldatud sümmeetria põhjal, et ka teine antud täisarv on täisarvu ruut: 1 p

Žürii lahendusega 3 sarnaste mõttekäikude allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Võetud kasutusele tähis ratsionaalarvu $\sqrt{n} + \sqrt{m}$ märkimiseks (žürii lahenduses r): 1 p
- Tõstetud võrrandi pooled ruutu ja selgesti liigutud $\sqrt{nm}$ avaldamise või ratsionaalarvulisuse tuvastamise suunas: 1 p
- Põhjendatud, et nm on täisarvu ruut: 1 p
- Järeldatud, et $n = n'd$, $m = m'd$, kus n' ja m' on täisarvude ruudud ja d täisarv: 1 p
- Põhjendatud, et $\sqrt{d}$ on ratsionaalarv: 1 p

- Järeldatud, et d on täisarvu ruut: 1 p
- Järeldatud, et n ja m on täisarvude ruudud: 1 p

Žürii lahendusega 4 sarnaste mõttekäikude allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Võetud kasutusele tähis ratsionaalarvu $\sqrt{n}+\sqrt{m}$ märkimiseks (žürii lahenduses r): 1 p
- Põhjendatud, et $\sqrt{n}-\sqrt{m}$ on ratsionaalarv: 2 p

  Sealhulgas:
  - Kasutatud võrdust $n-m=\left(\sqrt{n}+\sqrt{m}\right)\left(\sqrt{n}-\sqrt{m}\right)$: *1 p*
- Põhjendatud, et $\sqrt{n}$ ja $\sqrt{m}$ on ratsionaalarvud: 3 p

  Sealhulgas:
  - Avaldatud $\sqrt{n}$ ja $\sqrt{m}$ suuruste $\sqrt{n}+\sqrt{m}$ ja $\sqrt{n}-\sqrt{m}$ kaudu: *2 p*
- Järeldatud, et n ja m on täisarvude ruudud: 1 p

Õigetes lahendustes piisas esimese ja teise skeemi viimase rea järgi punkti saamiseks väitest, et teise arvu jaoks on mõttekäik sarnane vms. Valede lahenduste puhul anti see punkt ainult siis, kui oli selgesti viidatud algse seose sümmeetriale n ja m suhtes.

Mitu tüüpviga kordus väga paljudes töödes, mis viitab sellele, et ratsionaalarvud ja irratsionaalarvud on enamiku õpilaste jaoks üks paras müstika. Näiteks püüti toetuda väidetele, et irratsionaalarvu ja irratsionaalarvu summa on alati irratsionaalarv või et irratsionaalarvu liitmisel mistahes arvule saame irratsionaalarvu. Selliste väidete ekslikkusest oleks võinud kiiresti aru saada lihtsate kontranäidete abil: näiteks $\sqrt{2}$ on irratsionaalarv, 2 on ratsionaalarv, $2-\sqrt{2}$ on irratsionaalarv, seega irratsionaalarvude $\sqrt{2}$ ja $2-\sqrt{2}$ summa on vägagi ratsionaalarv (isegi täisarv). Teine tüüpviga oli nõutud teoreemi asemel pöördteoreemi tõestamine, et kui n ja m on täisarvude ruudud, siis $\sqrt{n}+\sqrt{m}$ on ratsionaalarv. Kuna viimane on triviaalne, siis sellised lahendused said 0 punkti (kui töös polnud muud punktiväärilist).

Oli palju töid, mille mustandis oli tehtud täiesti mõistlikke lahendussamme, ja mõnedes neist jõutud lahendusega isegi päris kaugele, kuid puhtandisse seda millegipärast polnud ümber kirjutatud, vaid aeti seal selle asemel ümmargust juttu. Üldsõnaliste väidete eest nagu „ruutjuur täisarvust on kas täisarv või irratsionaalarv“ punkte ei antud, kui neid väiteid polnud lahenduse kontekstis edasiviivalt rakendatud. Kuna selles ülesandes arvestati hindamisel ka mustandeid, siis said mustandis mõistlikke lahendussamme teinud õpilased nende eest siiski punktid kätte, isegi kui puhtand oli väärt 0 punkti.

4. *(Urve Kangro)*

Erinevate lahenduste hindamiseks kasutati nelja skeemi.

Žürii lahendusega 1 sarnase lähenemise puhul allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Tehtud väitevastane oletus $x_5 + x_6 + x_7 \leqslant 49$: 1 p
- Hinnatud $x_2 + x_3 + x_4$ suuruse $x_5 + x_6 + x_7$ kaudu: 2 p
- Järeldatud, et $x_1 \geqslant 11$, $x_2 \geqslant 12$, $x_3 \geqslant 13$, $x_4 \geqslant 14$: 2 p
- Järeldatud, et $x_4 \geqslant 15$: 1 p
- Saadud vastuolu: 1 p

Žürii lahendusega 2 sarnase lähenemise puhul allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Tehtud väitevastane oletus $x_5 + x_6 + x_7 \leqslant 49$: 1 p
- Järeldatud, et $x_5 \geqslant 15$: 3 p
- Näidatud, et siis $x_1 \leqslant 11$, $x_2 \leqslant 12$, $x_3 \leqslant 13$, $x_4 \leqslant 14$: 2 p
- Saadud vastuolu: 1 p

Žürii lahendusega 3 sarnase lähenemise puhul allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Ammendavalt käsitletud juht $x_4 \leqslant 14$ (või $x_5 \leqslant 15$): 4 p
- Ammendavalt käsitletud juht $x_4 \geqslant 15$ (või $x_5 \geqslant 16$): 3 p

Žürii lahendusega 5 sarnase lähenemise puhul allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Näidatud, et $x_1 \leqslant 11$: 1 p
- Ammendavalt käsitletud juht $x_1 = 11$: 2 p
- Ammendavalt käsitletud juht $x_1 \leqslant 10$: 4 p

Žürii lahendusega 4 sarnane lähenemine oli ainult ühes töös, mis sai selle eest täispunktid.

Kui millegi muu eest punkte ei saanud, siis vähemalt ühe näite eest, kus kolm suurima kommipaki saajat said kokku täpselt 50 kommi, sai 1 punkti. Muude näidete eest punkte ei saanud.

See ülesanne oli ootamatult raske. Enamuses töödes oli alustatud sellest, et kommid tuleks jagada võimalikult võrdselt. Edasi kas jagatigi algul võrdselt ja siis hakati komme ümber tõstma või siis jagati aritmeetilise jadana ja lisati 2 kommi suurima kommide arvuga lastele. Nii saadi küll kätte vähemalt üks näide, kus 3 last said täpselt 50 kommi, aga see on ju põhimõtteliselt ainult ühe või mõnede juhtude vaatlemine. Ülesandes oli aga vaja tõestada, et ükskõik kuidas kommid olid jagunenud, pidid igal juhul mingid kolm last saama kokku 50 kommi. Üldiselt sellised tööd said 1 punkti.

5. *(Artur Avameri)*

Lahenduse allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Kirjeldatud, kuidas soovitud pindala läbi lihtsamate kujundite pindalade leida: 4 p
- Arvutatud välja nõutud pindala: 3 p

  Sealhulgas:

- Leitud õigesti väikese kolmnurga pindala $\frac{\sqrt{3}}{16}a^2$ ning 60-kraadise sektori pindala $\frac{\pi}{24}a^2$: *1 p*
- Leitud õigesti sektori ja ringjoone vahelise segmendi pindala või muu lahenduses kasutatud järgmise sammu pindala: *1 p*
- Leitud õige lõppvastus: *1 p*

Õige vastuse eest ilma selgitusteta anti 1 punkt.

Ülesanne oli üldjoontes hästi lahendatud ning õigeid lahendusi (mõnikord väikeste arvutusvigadega) oli palju. Ülesande raskus peitus peamiselt aru saamises, kuidas otsitud pindala läbi lihtsamate kujundite leida – peale sellest aru saamist on edasine lahendus ainult arvutamise vaev ning arvutusvigade eest karistati minimaalselt. Samuti ei karistatud progresseeruvaid vigu – kui õpilane leidis esimeses sammus mõne pindala valesti ning kasutas seda hilisemates sammudes, saades enda leitud vale pindala jaoks „õige“ vastuse, siis rohkem punkte maha ei võetud.

Huvitaval kombel said üllatavalt paljud õpilased ülesandest valesti aru ning leidsid mitte kõige ringjoonte sisse jääva ala pindala, vaid pindala, mida katab vähemalt üks kolmest ringjoonest. Sellised tööd said tüüpiliselt 0 punkti (kui neis just midagi muud punktiväärilist ei esinenud).

6. *(Marko Tsengov)*

Lahenduse allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Korrektselt lahendatud ülesande osa a): 3 p

  Sealhulgas:
  - Esitatud idee lasta Maril kopeerida Jüri käike: *2 p*

  Korrektselt lahendatud ülesande osa b): 4 p

  Sealhulgas:
  - Märgitud, et eraldi tuleb vaadata juhte, kus eelviimasel käigul liigub Jüri nupp nullpunkti ja kus mitte: *1 p*
  - Üldjuht korrektselt läbi vaadatud: *1 p*
  - Erijuht korrektselt läbi vaadatud: *1 p*
  - Märgitud, et juhul $n = 1$ võidab Jüri: *1 p*

Ainult õige vastuse ega vaid üksikute juhtude läbivaatuse eest kummaski alaülesandes punkte ei antud, välja arvatud osa b) juhu $n = 1$ vastuse eest, kui see oli eraldi välja toodud.

Mõnes lahenduses eeldati, et kui nupud on samas punktis, ei saa teist liiki käiku sooritada, mis võis tuleneda ülesande sõnastusest. Osa a) lahendust vastav eeldus valdavalt ei mõjutanud, osa b) lahenduse hindamisel arvestati vastava juhuga ning vastava eeldusega korrektselt lahenduselt seetõttu punkte maha ei arvatud.

Mitmes lahenduses väideti alusetult, et kui Mari nupp on nullpunktile lähemal kui Jüri nupp, siis peale Mari teist tüüpi käiku on olukord vastupidine, misläbi kaotati korrektseks lahenduseks vajalik erijuht.

Märkus. Kui osa b) oli korrektselt lahendatud, siis loeti ka osa a) korrektselt lahendatuks.

Kokkuvõte

Üleriigilisele žüriile laekus hindamise ühtlustamiseks kokku 7. klassi töid 83, 8. klassi töid 68 ja 9. klassi töid 70. Üleriigilise žürii poolsed põhikooli tööde kontrollijad olid järgmised.

7. klass:	Kadi Siigur
	Hendrik Vija
8. klass:	Jaan Kristjan Kaasik
	Karl Paul Parmakson
9. klass:	Andres Alumets
	Birgit Veldi

Sel aastal vaatas üleriigiline žürii iga klassi igas töös läbi kõik ülesanded.

Järgnevad žürii esimehe ja tööde hindajate kommentaarid on kirjutatud üleriigilise žürii käes olnud tööde põhjal. Iga klassi II osa iga ülesande kohta on eraldi kommentaarid järgnevatel lehekülgedel.

7. klass

Ülesannete valikuga võib tagantjärele rahule jääda, komplekt ei käinud õpilastele üle jõu.

Ka test osutus raskusastme poolest parajaks. Kõik ülesanded pakkusid lahendajatele pinget, samas ei osutunud ükski ülesanne ka üleliia raskeks. Üksikuid tekstide valestimõistmisi esines, kuid üheski ülesandes ei olnud tegemist süsteemse probleemiga.

8. klass

Kuigi II osa ülesanne 2 osutus üsnagi raskeks ja täispunkte said vähesed, võib ülesannete valikuga ka siin rahule jääda, sest punktide langus pingereas on ühtlane.

Testis osutusid ülekaalukalt kõige raskemateks ülesanded 1, 3 ja 10, kõige lihtsamateks 2, 4 ja 7. Esimeses ülesandes pea pooled õpilased andsid vastuseks kas vale või taandatava murru. Kolmas ülesanne jäi paljudel vastamata või anti vas-

tuseks 0, mis ei sobi ühelgi juhul kus a ja b on erinevad. Kümnendas ülesandes pakkusid mitmed vastuseks 4 ja 6.

9. klass

Selles klassis osutus II osa suhteliselt raskeks, mida toodi välja ka paljude õpetajate tagasisides. Võtame omaks, et II osa võinuks lihtsam olla ja võimalusel püüame edaspidi paremini.

Test aga oli üldiselt hästi lahendatud. Enim vigu oli viimases ülesandes. Samuti oli test objektiivselt parandatud. Punkte pidi muutma vaid ühe töö korral.

Kontrollijate kommentaarid

1. Enamik lahendajatest said aru, et lihtsaim viis vastuseni jõuda on alustada vastavalt vähimast või suurimast erinevate numbritega neljakohalisest arvust ning järjest välistada arve kuni õige vastuseni. Kõige levinum viga oli väide „vähim erinevate numbritega neljakohaline arv on 1234“. See pole tõene, selleks on hoopis arv 1023, seega tuleb selgitada, miks me ei alusta juhtude läbivaatust sellest arvust (ehk siis miks me ei tohi nulli kasutada). Selle selgituse puudumise eest võtsime maha 1 punkti. Samuti võtsime maha 1 punkti, kui oli esitatud algoritm, millega saaks õige vastuseni jõuda, kuid oli mõni arv juhtude läbivaatusel vahele jäetud, näiteks suurema arvu otsimisel öeldud, et „otsitav arv võiks alata numbritega 9 ja 8, seega peaks ta jaguma 9-ga“ ja siis jõutud vastuseni 9864 ilma arvu 9873 käsitlemata.

2. Teises ülesandes jäid osad õpilased jänni selgitamisega, miks $\angle EDF = 45^\circ$. Sealt edasi oli ülesanne üldiselt hästi lahendatud.

3. Kolmas ülesanne oli üldiselt hästi lahendatud. Probleeme oli peamiselt põhjendamisega, miks ükski teine variant ei sobiks.

Kontrollijate kommentaarid

1. Ülesanne oli valdavalt hästi lahendatud, õpilased oskasid järeldada punaste ja siniste kaartide arvu laotud pakis. Enamus õpilasi suutsid ka järeldada, et punased kaardid said otsa ümberladumisel, kuid paljud kaotasid punkti ebapiisava või vale põhjenduse eest. Punaste kaartide otsasaamine tulenes sellest, et järgmine laotav kaart oleks pidanud olema punane. Mitmed õpilased väitsid, et punased kaardid said otsa, kuna viimane ümberlaotud kaart oli punane, mis juhtus andma õige värvi. Mõned õpilased tegid apsakaid osalistes tsüklites laotud kaartide arvutamisel.

2. Ülesanne osutus keeruliseks. Seda mitte vastuse leidmise, vaid põhjendamise pärast. Väga palju lahendusi pani midagi tähele joonist vaadates, mille ümber kirjutati terve lahendus. Pilt on selliste ülesannete juures illustratiivne ja tõestus peab lähtuma ainult ülesande sõnastuses antud tingimustest. Ülejäänud tähelepanekud tuleb lähtuvalt algandmetest ära tõestada. Näiteks enamus osa a) punktid läksid kaotsi, sest eeldati ilma põhjenduseta, et kolmnurk EFG on võrdhaarne.

Osa b) tõestus osutus ka sisuliselt raskeks ja korrektne arutelu esines vähestes töödes. Selle puhul andsime andeks mõne väiksema näpuvea. Esines ka näidislahendustest erinevaid lahendusi. Näiteks näidati, et kolmnurka AEF poolitades on mõlemad tekitatud kolmnurgad võrdsed kolmnurgaga ADE, millest järeldus kergelt ka ümbermõõt.

3. Ülesanne oli hästi lahendatud, suurimaks probleemiks osutus arvutusviga vastuse välja arvutamises. Osades lahendustes oli mainitud, et peale lineaarvõrrandisüsteemi lahendamist oli vastus leitud proovimise teel. Kui proovimist ei olnud näha, siis läksid täispunktid sealt kaduma. Lahenduses küsiti ikkagi kõiki võimalikke summasid ja siis ei ole teada, miks rohkem võimalusi ei ole. Veel esines juhtusid, kus algsed arvud 16 ja 33 muutusid mingi näpuvea tõttu. Sellisel juhul läks mõni punkt kaduma, sest ülesande maht oli teises osas lihtsam.

Kontrollijate kommentaarid

1. Põhiline viga, mida õpilased oma lahendustes tegid, oli valetpidi tõestada üritamine. Vaadati arvude a ja b võimalikke jääke 4-ga jagades ning selle põhjal $2a + b$ jääki. Kui saadi kõik võimalikud jäägid kätte, siis öeldigi et ülesanne on lahendatud. Tegelikult see ei põhjenda, miks kõiki arve sellisel kujul esitada saab. Sellised lahendused said üldiselt 0 punkti.

2. Ülesanne oli üsna hästi lahendatud. Paljud olid jõudnud õige vastuseni, kuid mitmes töös tuli punkte vähendada ebapiisavate põhjenduste tõttu. Mõne konkreetse näite läbiproovimine on tihti kasulik seaduspära leidmiseks, kuid siis tuleb see seaduspära ka üldkujul ära tõestada. Seetõttu ei saanud täispunkte tööd, kus mõne näite põhjal väideti, et kui üks arvudest on -2, siis tehte vastuseks on -2. Samuti tuli tihti punkte vähendada töödes, kus oli läbi tehtud paar suvalist võimalust arvude valimiseks.

3. Ülesanne osutus suhteliselt raskeks. Sagedaimaks veaks oli nurgapoolitjate paralleelsuse väitmine joonisel nähtu põhjal. Hea joonis on küll geomeetriaülesande oluline osa, kuid ainult joonise tegemine koos väitega, et jooniselt on midagi näha, punkte ei anna. Seetõttu tuli mitme töö puhul piirkondades antud punkte vähendada.

Levinud veaks oli ka liigsete eelduste tegemine. Mitmes töös väideti, et samale alusele toetuvate nurkade nurgapoolitajad langevad kokku. Teiseks levinud eelduseks oli, et kolmnurga kõrguste lõikepunkt on ka kolmnurga ümberringjoone keskpunkt. Samuti leidus töid, kus eeldati, et nurgapoolitajad on paralleelsed ning siis seda kasutades „tõestati“, et need on paralleelsed. Esines ka töid, kus üritati ülesande väidet ümber lükata.

Lisame veel paar soovitust õpilastele tulevikuks. Esiteks tasub lisada joonisele piisavalt tähiseid ning siis neid ka nurkade ja lõikude kirjeldamisel kasutada. Väga tülikas on lugeda nurkade kirjeldusi stiilis: tipust C tõmmatud nurgapoolitaja ja selle tipu vastaskülje vaheline väiksem nurk on.... Lisaks võib selline sõnaline kirjeldamine põhjustada arusaamatusi. Teiseks on kasulik kirjutada tähiste abil välja leitud seosed nurkade ja lõikude vahel nende leidmise järjekorras. Neid seoseid ainult joonisele märkides ei pruugi hiljem olla võimalik kindlaks teha, mis järjekorras vajalikud sammud tehti, sest samasugused seosed on võimalik joonisele märkida ka siis, kui alustada sellest, et eeldada, et ülesande väide kehtib, mida alati teha ei tohi.

Kõik tööd ei kasutanud sama lähenemist, osa töid sisaldasid elemente alternatiivlahendusest (nüüd žürii lahendus 2). Neid töid hindasime järgmise skeemi alusel, kus märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Näidatud, et tekib võrdhaarne kolmnurk HMN: 3 p
- Avaldatud $\angle BHA$: 1 p
- Avaldatud $\angle AHE$: 1 p
- Märgatud võrdsed põiknurgad AHE ja CNH: 1 p
- Järeldatud, et sirged CD ja HE on paralleelsed: 1 p

Puuduste korral kolmnurga HMN võrdhaarsuse tõestuses võeti 1 punkt maha.

4. Selles ülesandes oli mitmeid lahendusi, mis üritasid põhjendada, et Mari saab Jüri eest ära põgeneda. Kahjuks ei ole see ammendav põhjendus, kui kõiki võimalikke positsioone läbi ei vaata. Samuti öeldi, et Mari kaotab siis, kui astub nurka ja Jüri astub tema nupust diagonaalis 3 ruudu kaugusele. Selline olukord pole võimalik. Lahendused, mis ainult sellele toetusid, said 0 punkti. Mitmel õpilasel oli jäänud tekstist mulje, nagu kumbki mängijatest võiks mingile ruudule ainult korra astuda, mängijad käiksid samaaegselt või võiks Mari liikuda ainult üles-paremale ja Jüri alla-vasakule suunas. Selliseid tingimusi tekstis ei olnud ja lahendused, mis ainult nendele toetusid, said 0 punkti.