XX Astronoomia lahtine võistlus 2024 – noorem rühm

Juhised

Ülesannete lahendamiseks on aega 3 tundi. Kokku on võimalik saada **90 punkti**. Ülesandeid ei pea lahendama järjest ning ei pea lahendama ka kõiki ülesandeid. Hindamisel arvestatakse ainult puhtandit, välja arvatud juhul, kui puhtandile on lisatud märge, et tuleks vaadata mustandit. Sama märge peab olema lisatud ka mustandile. Ülesannete lahendamisel on lubatud kasutada vabalt valitud kalkulaatorit, aga kalkulaatoriks ei või olla internetiühendusega või muude mitte-arvutuslike võimekustega seade. Kahtluse korral küsi järelevaatajalt. Lahendus tuleb kirjutada kas sinise või musta pastakaga. Kõigis lahendustes võib teha mõistlikke lihtsustusi, näiteks modelleerida kanasid ideaalse sfäärina, ignoreerida atmosfääride optilisi iseärasusi jne.

Lahendamiseks vajalike konstantide ja astronoomiliste suuruste tabel on antud allpool.

NB!

- **Igale lehele peab olema kirjutatud õpilase nimi ja kood.**
- **Iga ülesanne peab olema lahendatud eraldi lehele.**

Punktid

Ülesanded annavad järgnevalt punkte:

- 1. ülesanne – 10,
- 2. ülesanne – 10,
- 3. ülesanne – 10,
- 4. ülesanne – 10,
- 5. ülesanne – 20,
- 6. ülesanne – 30.

Konstandid

Fundamentaalkonstandid

Valguse kiirus vaakumis	c	=	$2.998 \times 10^{8}\ \mathrm{m\,s^{-1}}$
Plancki konstant	h	=	$6.626 \times 10^{-34}\ \mathrm{J\,s}$
Boltzmanni konstant	k_B	=	$1.381 \times 10^{-23}\ \mathrm{J\,K^{-1}}$
Stefan-Boltzmanni konstant	σ	=	$5.670 \times 10^{-8}\ \mathrm{W\,m^{-2}\,K^{-4}}$
Elementaarlaeng	e	=	$1.602 \times 10^{-19}\ \mathrm{C}$
Gravitatsioonikonstant	G	=	$6.674 \times 10^{-11}\ \mathrm{N\,m^{2}\,kg^{-2}}$
Vaakumi dielektriline läbitavus	ϵ_0	=	$8.854 \times 10^{-12}\ \mathrm{m^{-3}kg^{-1}s^{4}A^{2}}$
Universaalne gaasi konstant	R	=	$8.315\ \mathrm{J\,mol^{-1}\,K^{-1}}$
Avogadro arv	N_A	=	$6.022 \times 10^{23}\ \mathrm{mol^{-1}}$
Wieni nihkeseadus	$b = \lambda_m T$	=	$2.898 \times 10^{-3}\ \mathrm{m\,K}$
Elektroni mass	m_e	=	$9.109 \times 10^{-31}\ \mathrm{kg}$
Prootoni mass	m_p	=	$1.673 \times 10^{-27}\ \mathrm{kg}$
Neutroni mass	m_n	=	$1.675 \times 10^{-27}\ \mathrm{kg}$
Heeliumi aatomituuma mass	m_He	=	$6.645 \times 10^{-27}\ \mathrm{kg}$
Aatommassiühik (a.m.ü.)		=	$1.661 \times 10^{-27}\ \mathrm{kg}$

Astronoomilised andmed

Hubble'i konstant	H_0	=	$70\ \mathrm{km\,s^{-1}\,Mpc^{-1}}$
Ekliptilise põhjapooluse koordinaadid	(α_E, δ_E)	=	$(18^h00^m00^s, +66°33'39'')$
Galaktilise põhjapooluse koordinaadid	(α_G, δ_G)	=	$(12^h51^m26^s, +27°7'42'')$
1 jansky	1 Jy	=	$10^{-26}\ \mathrm{W\,m^{-2}\,Hz^{-1}}$
1 parsek	1 pc	=	$3.086 \times 10^{16}\ \mathrm{m}$ 206 265 aü 3.262 ly
1 astronoomiline ühik	1 aü	=	$1.496 \times 10^{11}\ \mathrm{m}$
1 sideeriline päev	T_SD	=	23.934 44 h $23^h56^m04^s$
1 troopiline aasta		=	365.2422 päeva
1 sideeriline (tähe-) aasta		=	365.2564 päeva

Lähendused

$(1+x)^n \approx 1 + nx$

$(1+x)(1+y) \approx 1 + x + y$ kui $x \ll 1$ ja $y \ll 1$

Gaussi valemid

Sfääriline koosinusteoreem: $\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A$

Sfääriline siinusteoreem: $\frac{\sin A}{\sin a} = \frac{\sin B}{\sin b} = \frac{\sin C}{\sin c}$

Päike

Päikese heledus	$L_\odot$	$=$	$3.826 \times 10^{26}\,\mathrm{W}$
Päikese näiv nurkläbimõõt	$\theta_\odot$	$=$	$32'$
Päikese efektiivne temperatuur	$T_{\mathrm{eff},\odot}$	$=$	$5778\,\mathrm{K}$
Näiv tähesuurus		$=$	-26.75
Absoluutne tähesuurus		$=$	$+4.82$
Näiv bolomeetriline tähesuurus		$=$	-26.83
Absoluutne bolomeetriline tähesuurus		$=$	$+4.74$
Päikese kaugus Galaktika keskmest		$\approx$	$8\,\mathrm{kpc}$

Maa ja Kuu

Maa telje kaldenurk	ϵ	$=$	$23.5'$
Platooniline aasta (Maa telje pretsessiooni periood)		$=$	25 765 aastat
Täiskuu näiv tähesuurus		$=$	-12.74
Kuu näiv nurkläbimõõt	θ_{L}	$=$	$31'$
Kuu orbiidi kalle ekliptika suhtes		$=$	$05^\circ08'43''$
Kuu ekvaatori kaldenurk Kuu orbiidi tasandi suhtes		$=$	6.687°
Sideeriline kuu	T_{SL}	$=$	27.321661päeva 655.71986 h
Sünoodiline kuu		$=$	29.530589 päeva
Troopiline kuu		$=$	27.321582 päeva
Anomaalne kuu (keskmine aeg kahe Kuu perigee läbimise vahel)		$=$	27.554550 päeva
Drakooniline kuu (Kuu ekliptikaga lõikumise periood)		$=$	27.212221 päeva

Päikesesüsteem

Taeva-keha	**Keskmine raadius** [km]	**Mass** [kg]	**Pikem pooltelg** [aü]	**Ekstsentrilisus**
Päike	695 700	1.988×10^{30}	—	—
Merkuur	2 440	3.301×10^{23}	0.387	0.206
Veenus	6 052	4.867×10^{24}	0.723	0.007
Maa	6 378	5.972×10^{24}	1.000	0.016 710
Kuu	1 737	7.346×10^{22}	3.844×10^{5} km	0.054 900 (vahemik $0.026 - 0.077$)
Marss	3 390	6.417×10^{23}	1.524	0.093
Jupiter	69 911	1.898×10^{27}	5.203	0.048
Saturn	58 232	5.683×10^{26}	9.537	0.054
Uraan	25 362	8.681×10^{25}	19.189	0.047
Neptuun	24 622	1.024×10^{26}	30.070	0.009

1 Must keha

10 punkti

Hinnake ligikaudselt, kui palju energiat te kiirgaksite välja, kui te oleksite idealiseeritud must keha. Pange kirja arvutustes kasutatud suurused (pindalad, temperatuurid jm) ning leidke ka, millises lainepikkuses kiirgaksite te kõige rohkem. Kirjutage selgelt välja JAH/EI kas inimesed saaksid teie kiirgust näha?

Kõige lihtsam on saada teie keha kogu kiirgusenergia kasutades Stefan'i seadust.

$$P(t) = \sigma A T^4,$$

kus σ on Stefan Boltzmanni konstant, A keha pindala, ja T temperatuur. Keskmise inimese keha pindala on $A = 1.9m^2$ ja temperatuuriks võib võtta $T = 36.5$. Asendades suurused valemisse saame:

$$P(T) = 988W$$

Maksimaalse temperatuuri saame wieni nihkeseadusest:

$$\lambda = \frac{b}{T} = 9.6\mu m,$$

mis on infrapunalainealas, seega **EI** ole inimene nähtav.

2 Maa mõõtmine

10 punkti

Maakera suuruse mõõtmine oli pikka aega suur väljakutse. Esimesel sajandil enne meie ajaarvamist tegeles selle probleemiga Kreeka filosoof Posidonius. Ta vaatles selleks tähte nimega Canopus. Rhodosel tõusis Canopus horisondile, aga mitte kunagi üle selle. Aleksandrias tõusis Canopus aga 7.5° kraadi üle Horisondi. Posidonius arvas eksklikult, et nende kahe asukoha vaheline kaugus on umbes 3500 staadionit (1staadion = 180m), mistõttu ei saanud ta kõige täpsemat tulemust. Eeldades (mõlemal juhul), et Rhodos ja Aleksandria paiknevad täpselt samal pikkuskraadil ja nende vaheline kaugus on umbes 800km, leidke Maa raadius ja võrrelge oma tulemust Posidoniuse tulemusega. Leidke vigade protsentuaalsed suurused.

Lahendus: Kasutades pikkuskraadi eeldust, saame mõlemal juhu arvutada Maakera ümbermõõdu leida proportsioonina suurest poolringist.

$$d = \frac{7.5}{360} \cdot 2 \cdot \pi \cdot R_{Maa} \rightarrow R_{Maa} = \frac{360 \cdot d}{7.5 \cdot 2 \cdot \pi},$$

samuti näeme et kuna kõik suurused on lineaarsed, siis piisab kui leiame tegeliku ja Posidniuse arvatud vahekauguste suhte:

$$d_{Posidonius} = 3500 \cdot 180/1000 = 630km,$$

mis tähendab et ta hindas Maa raadiust 630/800 = 0.78 võrra väiksemaks. Lisades ka mujale numbrid saame:

$$R_{Maa} = 6110km \approx 3\%\ viga,$$

ja

$$R_{Posidonius} = 4800km \approx 24\%\ viga$$

3 Arvuta nagu Kopernikus

10 punkti

Ühel päeval olid Jupiter ja Maa vastasseisus (Päike, Maa ja Jupiter olid joondunud ühele joonele). 87.5 päeva hiljem paiknesid Maa ja Jupiter kvadratuuris, st Maa, Päike, Jupiter moodustasid täisnurga. 311.5 päeva hiljem on Jupiter taas vastasseisus. Te teate, et Maa sideeriline periood on 365.2425 päeva. Antud ülesande lahendamise ajal te ei tea Kepleri seaduseid ja planeetide masse. Leidke:

1. Mis on Jupiteri sünoodiline periood (Päike-Maa-Jupiter suhteline asend on sama)?
2. Leidke Jupiteri sideeriline periood.
3. Arvutage Jupiteri kaugus (astronoomilistes ühikutes), kasutades ainult ülesandes antud suuruseid.

Lahendus:

1. Leidmiseks iisab kui leiame kahe vastasseisu vahelise aja.

$$T_{Jup-s\ddot{u}noodiline=87,5+311,5=399p\ddot{a}eva}$$

2. Kasuteme sideerilise ja sünoodilise perioodi seost, teades et jupiter on välisplaneet

$$\frac{1}{T_{Jupsideeriline}} = \frac{1}{T_{\odot sideeriline}} - \frac{1}{T_{Jups\ddot{u}noodiline},}$$

saame

$$T_{Jupsideeriline} = 4317p\ddot{a}eva = 11.8a$$

3. Põhimõtteliselt leiame Kepleri seadused. Selleks parametriseerime Päike-Maa-Jupiteri nurga leidmise sõltuvana ta sünoodilisest perioodist ja ajast mil planeet liigub vastasseisust kvadratuuri:

$$\Theta = \frac{360°t}{T_{s\ddot{u}noodiline} = \frac{360\cdot 87.5}{399} = 78.9}$$

Välisplaneedilt vaadatuna saab Maa-planeet -Päike nurka avaldada seosega:

$$\phi = 180^\circ - \epsilon - \Theta = 180 - 90 - 78.9 = 11.1$$

Kauguse saame leida:

$$d = \frac{\sin\epsilon}{\sin\phi} = 5.2A\ddot{U}$$

/

4 Punanihe

10 punkti

Me näeme kosmilisi objekte tänu aatomite ja molekulidele, mis suurel hulgal kindlatel lainepikkustel meie poole valgust saadavad. Edwin Hubble avastas 1929 aastal, et enamik galaktikaid paistavad punasemana kui nad peaks, eeldades et nad koosneksid peamiselt vesinikust nagu meie galaktika. See viiski Universumi paisumise avastamiseni. Universumi paisumist mõõdetakse Hubble'i konstandiga ja tähistatakse $\mathrm{H_0}$.

Galaktikate punanihet mõõdetakse harilikult suurusega z. Oletame, et te vaatlete galaktikat, mille z = 0.3, teades et vesiniku $H-\alpha$ joone spekter on lainepikkusega 486.1nm ja eeldades, et kehtib Doppleri nihke lähend $z \approx \frac{v}{c}$, siis:

1. Millisel lainepikkusel näeme seda galaktikat?
2. Kui kaugele minevikku me seda galaktikat vaadates näeme?

Lahendus:

1. Millisel lainepikkusel näeme seda galaktikat? Kiiruse saame: Doppleri nihke kaudu leida ka vaadeldava lainepikkuse

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} = \frac{v}{c} = z \rightarrow \lambda_0 + z \cdot \lambda_0 = \lambda,$$

   saame $\lambda = 632nm$

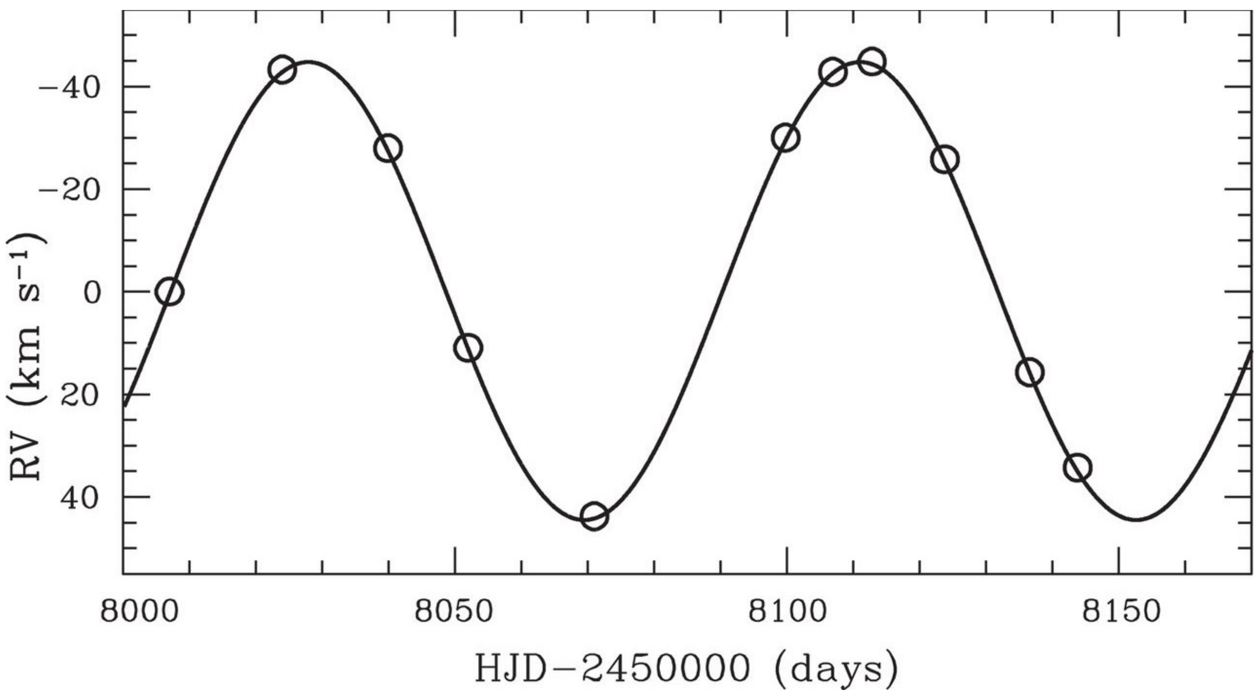
2. Aja leidmiseks teame

$$v = H_0 \cdot D \& D = c \cdot t,$$

   saame

$$t = \frac{v}{H_0 \cdot c} = 2 \cdot 10^{14} a$$

   see on 1000 korda vanem kui Universum, mistõttu peaksime tegeliku vanuse arvutamiseks kasutama täpset valemit.



Joonis 1: Tähe radiaalkiiruse sõltuvus ajast (allikas: https://doi.org/10.3847/2041-8213/acc076)

5 Väike must auk

20 punkti

„Kaksiktähesüsteemis“ 2MASS J05215658+4359220 asub üks hetkel teadaolevaid väiksemaid mustasid aukusid; süsteemi teine komponent paistab olevat hiidtäht. Süsteemi orbiitide ekstsentrilisus on 0.005 ning tähe massiks on hinnatud ligikaudu $3.2M_\odot$. Tähe radiaalkiiruse (vaatesihisuunalise kiiruse) graafik on toodud joonisel 1. Eeldage, et süsteemi orbitaaltasand on ligikaudu paralleelne meie vaatesuunaga. Leidke musta augu mass (Päikese massi ühikutes) ning selle Schwarzschildi raadius.

Lahendus:

Graafikult mõõdame, et süsteemi periood on $P \approx 83$ paeva. Ühtlasi $RV_{max} - RV_{min} \approx 89$ km/s ehk tähe orbitaalkiirus on $v_* \approx 44.5$ km/s. Sellest saame avaldise

$$v_* = \frac{2\pi a_*}{P}$$

kus a_* on tähe orbiidi raadius. Peab kehtima seos $M_* a_* = M_{bh} a_{bh}$, kust saame avaldada süsteemi pikema pooltelje

$$a = \frac{M_* + M_{bh}}{M_{bh}} a_* = \frac{M_* + M_{bh}}{M_{bh}} \cdot \frac{P v_*}{2\pi}.$$

Asendame seose Kepleri III seadusesse:

$$P^2 = \frac{4\pi^2}{G(M_* + M_{bh})} \cdot \left(\frac{M_* + M_{bh}}{M_{bh}} \frac{Pv_*}{2\pi} \right)^3 = \frac{P^3 v_*^3}{2\pi G} \frac{(M_* + M_{bh})^2}{M_{bh}^3}$$

$$\frac{(M_* + M_{bh})^2}{M_{bh}^3} = \frac{2\pi G}{Pv_*^3}$$

Kirjutame $M_{bh} = xM_*$, kus x on musta augu ja tähe masside suhe. Siis võrrandi vasak pool on

$$\frac{M_*^2 + M_{bh}^2 + 2M_* M_{bh}}{M_{bh}^3} = \frac{1}{M_*}\left(\frac{1}{x^3} + \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x} \right) = \frac{1}{M_*} \frac{x^2 + 2x + 1}{x^3}.$$

Defineerime $C \equiv \dfrac{2\pi G M_*}{Pv_*^3} \approx 4.22$. Siis meie võrrand võtab kuju

$$4.22x^3 - x^2 - 2x - 1 = 0.$$

Võrrandi täpne reaalarvuline lahendus on $x \approx 0.973$. Seda võrrandit saab umbkaudselt lahendada graafiliselt, kuid katse-eksituse meetodil lahendades on $x \approx 1$ piisavalt hea vastus.

Musta augu mass on seega $M_{bh} = 0.973 M_* \approx \boxed{3.1 M_\odot}$. Schwarzschildi raadiuse väärtuseks saame

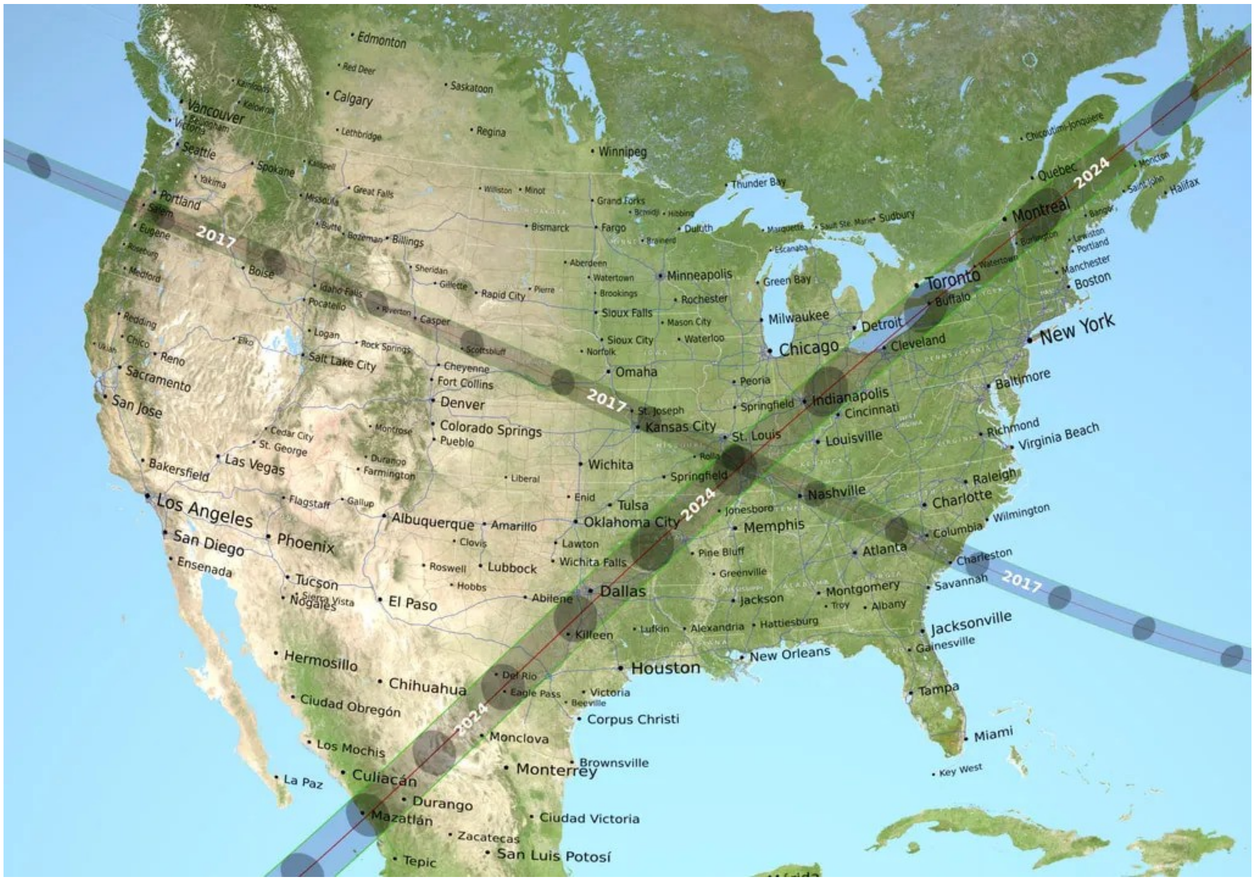
$$R_s = \frac{2GM_{bh}}{c^2} \approx \boxed{9.1\ \text{km}}.$$

6 Varjutus

30 punkti

Homme, 8. aprillil on Põhja-Ameerikas näha täielik päikesevarjutus, mille trajektoor on näidatud kaardil. Hinnake, mis on päikesevarjutuse kogukestus Maal tundides ja minutites (st aeg, mille jooksul eksisteerib Maa mingis punktis Kuu täisvari). Samuti hinnake, kui kiiresti (m/s) liigub täisvari Maa pinnal oleva vaatleja jaoks varjutuse maksimumpunktis.

Võib lihtsustavalt eeldada, et varjutuse maksimumpunktis on Päike seniidis, varjutus toimub mööda Maa ekvaatorit (Maa pöörlemistelje kaldega ei pea arvestama) ning Kuu orbiidi kaldenurk Maa orbiidi suhtes on tühine.



Joonis 2: Täieliku päikesevarjutuse trajektoor 2017. ja 2024. aastal (NASA).

Lahendus: Joonisel on märgitud Maa ja Kuu Päikeselt vaadelduna. Kuna Kuu ja Maa vaheline kaugus on võrreldes Päikese kaugusega palju väiksem, võime teha lihtsustuse, et täisvarju keskpunkt ühtib Päikeselt vaadelduna Kuu keskpunktiga (varju diameeter on küll Kuu diameetrist palju väiksem). Kuna eeldame, et maksimumpunktis on Päike seniidis, siis liigub täisvari mööda Maa diameetrit.

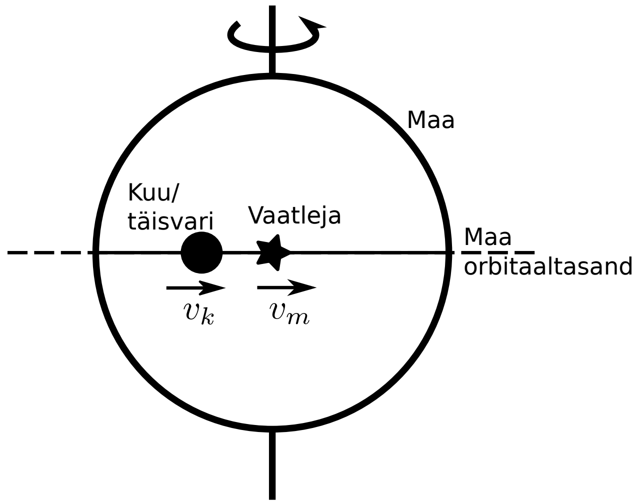
Leiame kõigepealt Kuu orbitaalkiiruse v_k (tehes ringorbiidi eelduse). Ühe perioodi jooksul läbib Kuu vahemaa $2\pi r_k$, kus r_k on Kuu orbitaalraadius, seega $v_k = \frac{2\pi r_k}{T_k}$. Kuna meid huvitab Kuu kiirus Maaga kaasa tiirlevas taustsüsteemis, siis kõige täpsem on T_k väärtuseks võtta sünoodilise kuu pikkus 29,53 päeva (ajavahemik, mille jooksul Kuu asub uuesti Maa ja Päikese vahel). Seega

$$v_k = \frac{2\pi \cdot 3{,}844 \cdot 10^8\,\mathrm{m}}{29{,}53 \cdot 24 \cdot 3600\,\mathrm{s}} \approx 947\,\mathrm{m/s}.$$

Eeldades, et Kuu täisvari on palju väiksem Maa raadiusest, siis päikesevarjutuse kogukestus on

$$t_v = \frac{2R_m}{v_k} = \frac{2 \cdot 6{,}378 \cdot 10^6\,\mathrm{m}}{947\,\mathrm{m/s}} \approx 13\,500\,\mathrm{s} \approx \boxed{3\,\mathrm{h}\,44\,\mathrm{min}}.$$

Esmases lähenduses on Kuu varju kiirus maapinnal lihtsalt $v_k = 947\,\mathrm{m/s}$ (selle vastuse



eest anda osalised punktid). Küll aga tuleb arvestada ka Maa pöörlemisega, mistõttu varju suhteline kiirus v maapinna vaatleja suhtes on erinev. Vaatleja läbib ühe ööpäeva jooksul vahemaa $2\pi R_m$, seega vaatleja kiirus on

$$v_m = \frac{2\pi R_m}{T_m} = \frac{2\pi \cdot 6{,}378 \cdot 10^6\,\mathrm{m}}{86\,400\,\mathrm{s}} \approx 463\,\mathrm{m/s}.$$

Eeldades lihtsustavalt, et Maa pöörlemistelg on orbitaaltasandiga risti, on seega täisvarju suhteline kiirus maapinnal

$$v = v_k - v_m = 947\,\mathrm{m/s} - 463\,\mathrm{m/s} \approx \boxed{480\,\mathrm{m/s}}.$$

(Tegelikud vastused on 3 h 17 min ja 700 m/s. Mingil määral tuleb erinevus sellest, et tegelikult ei liigu varjutus täpselt mööda Maa diameetrit ja Maa pöörlemistelg on orbiidi suhtes kaldu (vt vanema rühma lahendus). Samuti on Kuu orbiit elliptiline ning päikesevarjutuse ajal on Kuu kaugus Maast keskmisest väiksem ja Kuu orbitaalkiirus keskmisest suurem. Täpsemad arvutused on võimalik teha, kui eeldada, et Kuu kaugus Maast on minimaalne (∼360 000 km, vastab üsna hästi reaalsusele) ning leida v_k orbiidi energia valemi abil.)