

XX Astronoomia lahtine võistlus 2024 – vanem rühm

Juhised

Ülesannete lahendamiseks on aega 3 tundi. Kokku on võimalik saada **110 punkti**. Ülesandeid ei pea lahendama järjest ning ei pea lahendama ka kõiki ülesandeid. Hindamisel arvestatakse ainult puhtandit, välja arvatud juhul, kui puhtandile on lisatud märke, et tuleks vaadata mustandit. Sama märke peab olema lisatud ka mustandile. Ülesannete lahendamisel on lubatud kasutada vabalt valitud kalkulaatorit, aga kalkulaatoriks ei või olla internetiühendusega või muude mitte-arvutuslike võimekustega seade. Kahtluse korral küsi järelevaatajalt. Lahendus tuleb kirjutada kas sinise või musta pastakaga. Kõigis lahendustes võib teha mõistlikke lihtsustusi, näiteks modelleerida kanasid ideaalse sfäärina, ignoreerida atmosfääride optilisi iseärasusi jne.

Lahendamiseks vajalike konstantide ja astronoomiliste suuruste tabel on allpool.

NB!

- Igale lehele peab olema kirjutatud õpilase nimi ja kood.
- Iga ülesanne peab olema lahendatud eraldi lehele.

Punktid

Ülesanded annavad järgnevalt punkte:

- 1. ülesanne – 10,
- 2. ülesanne – 10,
- 3. ülesanne – 10,
- 4. ülesanne – 20,
- 5. ülesanne – 30,
- 6. ülesanne – 30.

Konstandid

Fundamentaalkonstandid

Valguse kiirus vaakumis	c	=	$2.998 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$
Plancki konstant	h	=	$6.626 \times 10^{-34} \text{ J s}$
Boltzmanni konstant	k_B	=	$1.381 \times 10^{-23} \text{ J K}^{-1}$
Stefan-Boltzmanni konstant	σ	=	$5.670 \times 10^{-8} \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-4}$
Elementaarlaeng	e	=	$1.602 \times 10^{-19} \text{ C}$
Gravitatsioonikonstant	G	=	$6.674 \times 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2}$
Vaakumi dielektriline läbitavus	ϵ_0	=	$8.854 \times 10^{-12} \text{ m}^{-3} \text{ kg}^{-1} \text{ s}^4 \text{ A}^2$
Universaalne gaasi konstant	R	=	$8.315 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1}$
Avogadro arv	N_A	=	$6.022 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$
Wieni nihkeseadus	$b = \lambda_m T$	=	$2.898 \times 10^{-3} \text{ m K}$
Elektroni mass	m_e	=	$9.109 \times 10^{-31} \text{ kg}$
Prootoni mass	m_p	=	$1.673 \times 10^{-27} \text{ kg}$
Neutroni mass	m_n	=	$1.675 \times 10^{-27} \text{ kg}$
Heeliumi aatomituumade mass	m_{He}	=	$6.645 \times 10^{-27} \text{ kg}$
Aatommassiühik (a.m.ü.)		=	$1.661 \times 10^{-27} \text{ kg}$

Astronoomilised andmed

Hubble'i konstant	H_0	=	$70 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$
Ekliptilise põhjapooluse koordinaadid	(α_E, δ_E)	=	$(18^{\text{h}}00^{\text{m}}00^{\text{s}}, +66^{\circ}33'39'')$
Galaktilise põhjapooluse koordinaadid	(α_G, δ_G)	=	$(12^{\text{h}}51^{\text{m}}26^{\text{s}}, +27^{\circ}7'42'')$
1 jansky	1 Jy	=	$10^{-26} \text{ W m}^{-2} \text{ Hz}^{-1}$
1 parsek	1 pc	=	$3.086 \times 10^{16} \text{ m}$ 206 265 aü 3.262 ly
1 astronoomiline ühik	1 aü	=	$1.496 \times 10^{11} \text{ m}$
1 sideeriline päev	T_{SD}	=	23.934 44 h $23^{\text{h}}56^{\text{m}}04^{\text{s}}$
1 troopiline aasta		=	365.2422 päeva
1 sideeriline (tähe-) aasta		=	365.2564 päeva

Lähendused

$$(1 + x)^n \approx 1 + nx$$

$$(1 + x)(1 + y) \approx 1 + x + y \text{ kui } x \ll 1 \text{ ja } y \ll 1$$

Gaussi valemid

Sfääriline koosinusteoreem: $\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A$

Sfääriline siinusteoreem: $\frac{\sin A}{\sin a} = \frac{\sin B}{\sin b} = \frac{\sin C}{\sin c}$

Päike

Päikese heledus	L_{\odot}	=	$3.826 \times 10^{26} \text{ W}$
Päikese näiv nurkläbimõõt	θ_{\odot}	=	$32'$
Päikese efektiivne temperatuur	$T_{\text{eff},\odot}$	=	5778 K
Näiv tähesuurus		=	-26.75
Absoluutne tähesuurus		=	$+4.82$
Näiv bolomeetriline tähesuurus		=	-26.83
Absoluutne bolomeetriline tähesuurus		=	$+4.74$
Päikese kaugus Galaktika keskmest		\approx	8 kpc

Maa ja Kuu

Maa telje kaldenurk	ϵ	=	$23.5'$
Platooniline aasta (Maa telje pretsessiooni periood)		=	$25\,765$ aastat
Täiskuu näiv tähesuurus		=	-12.74
Kuu näiv nurkläbimõõt	θ_{L}	=	$31'$
Kuu orbiidi kalle ekliptika suhtes		=	$05^{\circ}08'43''$
Kuu ekvaatori kaldenurk Kuu orbiidi tasandi suhtes		=	6.687°
Sideeriline kuu	T_{SL}	=	27.321661 päeva 655.71986 h
Sünoodiline kuu		=	29.530589 päeva
Troopiline kuu		=	27.321582 päeva
Anomaalne kuu (keskmine aeg kahe Kuu perigee läbimise vahel)		=	27.554550 päeva
Drakooniline kuu (Kuu ekliptikaga lõikumise periood)		=	27.212221 päeva

Päikesesüsteem

Taeva- keha	Keskmine raadius [km]	Mass [kg]	Pikem pooltelg [aiü]	Ekstsentrilisus
Päike	695 700	1.988×10^{30}	—	—
Merkuur	2 440	3.301×10^{23}	0.387	0.206
Veenus	6 052	4.867×10^{24}	0.723	0.007
Maa	6 378	5.972×10^{24}	1.000	0.016 710
Kuu	1 737	7.346×10^{22}	3.844×10^5 km	0.054 900 (vahemik 0.026 – 0.077)
Marss	3 390	6.417×10^{23}	1.524	0.093
Jupiter	69 911	1.898×10^{27}	5.203	0.048
Saturn	58 232	5.683×10^{26}	9.537	0.054
Uraan	25 362	8.681×10^{25}	19.189	0.047
Neptuun	24 622	1.024×10^{26}	30.070	0.009

1 Supernoova

1604. aastal oli taevas näha Kepleri supernoova, mis on kõige hiljutisem palja silmaga näha olnud supernoova. Hinnanguliselt oli selle näiv tähesuurus $m_S = -2,5$ ja see asus 5 kpc kaugusel. Mitu Päikest peaks panema sama kaugele ($d = 5$ kpc) vahetult üksteise kõrvale, et Päikesed paistaksid koos sama heledalt kui Kepleri supernoova?

Lahendus:

Me teame, et Päikese absoluutne tähesuurus (näiv tähesuurus 10 pc kaugusel) on 4,82. Kui Päike oleks 5 kpc kaugusel, siis selle näiv tähesuurus oleks

$$m'_{\odot} = m_{\odot} + 5 \log \left(\frac{d}{10 \text{ pc}} \right) = 4,82 + 5 \log \left(\frac{5000 \text{ pc}}{10 \text{ pc}} \right) = 18,31.$$

Seega supernoova ja Päikese heleduste suhe on

$$m'_{\odot} - m_S = 2.5 \log \left(\frac{L_S}{L_{\odot}} \right) \implies \frac{L_S}{L_{\odot}} = 10^{(18,31 - (-2,5))/2,5} \approx \boxed{2,1 \cdot 10^8}.$$

Kuna heledused liituvad, siis just nii mitu Päikest peaks panema üksteise kõrvale, et Päikesed paistaksid sama heledana.

2 Arvuta nagu Kopernikus

10 punkti

Ühel päeval olid Jupiter ja Maa vastasseisus (Päike, Maa ja Jupiter olid joondunud ühele joonele). 87.5 päeva hiljem paiknesid Maa ja Jupiter kvadratuuris, st Maa, Päike, Jupiter moodustasid täisnurga. 311.5 päeva hiljem on Jupiter taas vastasseisus. Te teate, et Maa sideeriline periood on 365.2425 päeva. Antud ülesande lahendamise ajal te ei tea Kepleri seaduseid ja planeetide masse. Leidke:

1. Mis on Jupiteri sünoodiline periood (Päike-Maa-Jupiter suhteline asend on sama)?
2. Leidke Jupiteri sideeriline periood.
3. Arvutage Jupiteri kaugus (astronoomilistes ühikutes), kasutades ainult ülesandes antud suuruseid.

Lahendus:

1. Leidmiseks iisab kui leiame kahe vastasseisu vahelise aja.

$$T_{Jup-sünoodiline} = 87,5 + 311,5 = 399 \text{ päeva}$$

2. Kasuteme sideerilise ja sünoodilise perioodi seost, teades et jupiter on välisplaneet

$$\frac{1}{T_{Jupsideeriline}} = \frac{1}{T_{\odot sideeriline}} - \frac{1}{T_{Jupsünoodiline}},$$

saame

$$T_{Jupsideeriline} = 4317\text{päeva} = 11.8a$$

3. Põhimõtteliselt leiame Kepleri seadused. Selleks parametrizeerime Päike-Maa-Jupiteri nurga leidmise sõltuvana ta sünoodilisest perioodist ja ajast mil planeet liigub vastas- seisust kvadratuuri:

$$\Theta = \frac{360^\circ t}{T_{sünoodiline}} = \frac{360 \cdot 87.5}{399} = 78.9$$

Välisplaneedilt vaadatuna saab Maa-planeet -Päike nurka avaldada seosega:

$$\phi = 180^\circ - \epsilon - \Theta = 180 - 90 - 78.9 = 11.1$$

Kauguse saame leida:

$$d = \frac{\sin \epsilon}{\sin \phi} = 5.2AU$$

3 Punanihe

10 punkti

Me näeme kosmilisi objekte tänu aatomite ja molekulidele, mis suurel hulgal kindlatel lainepikkustel meie poole valgust saadavad. Edwin Hubble avastas 1929 aastal, et enamik galaktikaid paistavad punasemana kui nad peaks, eeldades et nad koosneksid peamiselt vesinikust nagu meie galaktika. See viiski Universumi paisumise avastamiseni. Universumi paisumist mõõdetakse Hubble'i konstandiga ja tähistatakse H_0 .

Galaktikate punanihet mõõdetakse harilikult suurusega z . Oletame, et te vaatlete galaktikat, mille $z = 0.3$, teades et vesiniku $H - \alpha$ joone spekter on lainepikkusega 486.1nm ja eeldades, et kehtib Doppleri nihke lähend $z \approx \frac{v}{c}$, siis:

1. Millisel lainepikkusel näeme seda galaktikat?
2. Kui kaugele minevikku me seda galaktikat vaadates näeme?

Lahendus:

1. Millisel lainepikkusel näeme seda galaktikat? Kiiruse saame: Doppleri nihke kaudu leida ka vaadeldava lainepikkuse

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} = \frac{v}{c} = z \rightarrow \lambda_0 + z \cdot \lambda_0 = \lambda,$$

saame $\lambda = 632nm$

2. Aja leidmiseks teame

$$v = H_0 \cdot D \& D = c \cdot t,$$

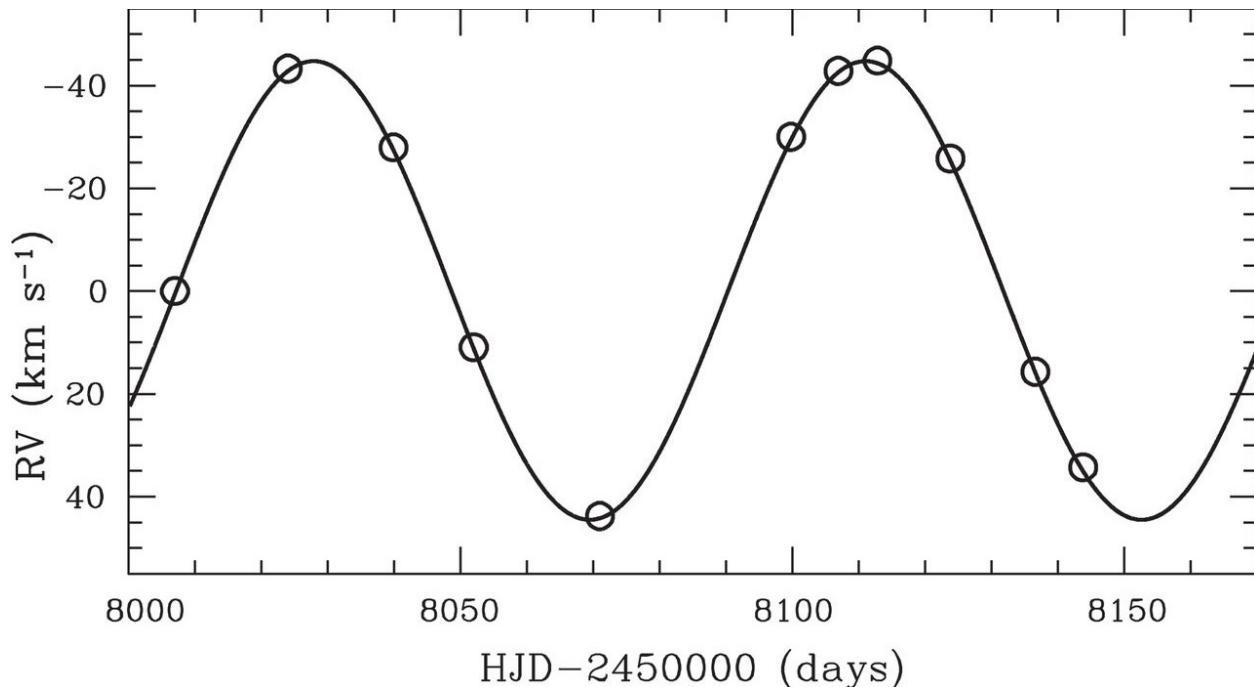
saame

$$t = \frac{v}{H_0 \cdot c} = 2 \cdot 10^{14} a$$

see on 1000 korda vanem kui Universum, mistõttu peaksime tegeliku vanuse arvutamiseks kasutama täpset valemit.

4 Väike must auk

20 punkti



Joonis 1: Tähe radiaalkiiruse sõltuvus ajast (allikas: <https://doi.org/10.3847/2041-8213/acc076>)

„Kaksitähesüsteemis“ 2MASS J05215658+4359220 asub üks hetkel teadaolevaid väiksemaid mustasid aukusid; süsteemi teine komponent paistab olevat hiidtäht. Süsteemi orbiitide ekstsentrilisus on 0.005 ning tähe massiks on hinnatud ligikaudu $3.2M_{\odot}$. Eeldage, et süsteemi orbitaaltasand on ligikaudu paralleelne meie vaatesuunaga. Leidke musta augu mass (Päikese massi ühikutes) ning selle Schwarzschildi raadius.

Lahendus:

Graafikult mõõdame, et süsteemi periood on $P \approx 83$ päeva. Ühtlasi $RV_{max} - RV_{min} \approx 89$ km/s ehk tähe orbitaalkiirus on $v_* \approx 44.5$ km/s. Sellest saame avaldise

$$v_* = \frac{2\pi a_*}{P}$$

kus a_* on tähe orbiidi raadius. Peab kehtima seos $M_* a_* = M_{bh} a_{bh}$, kust saame avaldada süsteemi pikema pooltelje

$$a = \frac{M_* + M_{bh}}{M_{bh}} a_* = \frac{M_* + M_{bh}}{M_{bh}} \cdot \frac{P v_*}{2\pi}.$$

Asendame seose Kepleri III seadusesse:

$$P^2 = \frac{4\pi^2}{G(M_* + M_{bh})} \cdot \left(\frac{M_* + M_{bh}}{M_{bh}} \frac{Pv_*}{2\pi} \right)^3 = \frac{P^3 v_*^3 (M_* + M_{bh})^2}{2\pi G M_{bh}^3}$$

$$\frac{(M_* + M_{bh})^2}{M_{bh}^3} = \frac{2\pi G}{Pv_*^3}$$

Kirjutame $M_{bh} = xM_*$, kus x on musta augu ja tähe masside suhe. Siis võrrandi vasak pool on

$$\frac{M_*^2 + M_{bh}^2 + 2M_*M_{bh}}{M_{bh}^3} = \frac{1}{M_*} \left(\frac{1}{x^3} + \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x} \right) = \frac{1}{M_*} \frac{x^2 + 2x + 1}{x^3}.$$

Defineerime $C \equiv \frac{2\pi GM_*}{Pv_*^3} \approx 4.22$. Siis meie võrrand võtab kuju

$$4.22x^3 - x^2 - 2x - 1 = 0.$$

Võrrandi täpne reaalarvuline lahendus on $x \approx 0.973$. Seda võrrandit saab umbkaudselt lahendada graafiliselt, kuid katse-eksituse meetodil lahendades on $x \approx 1$ piisavalt hea vastus.

Musta augu mass on seega $M_{bh} = 0.973M_* \approx \boxed{3.1M_\odot}$. Schwarzschildi raadiuse väärtuseks saame

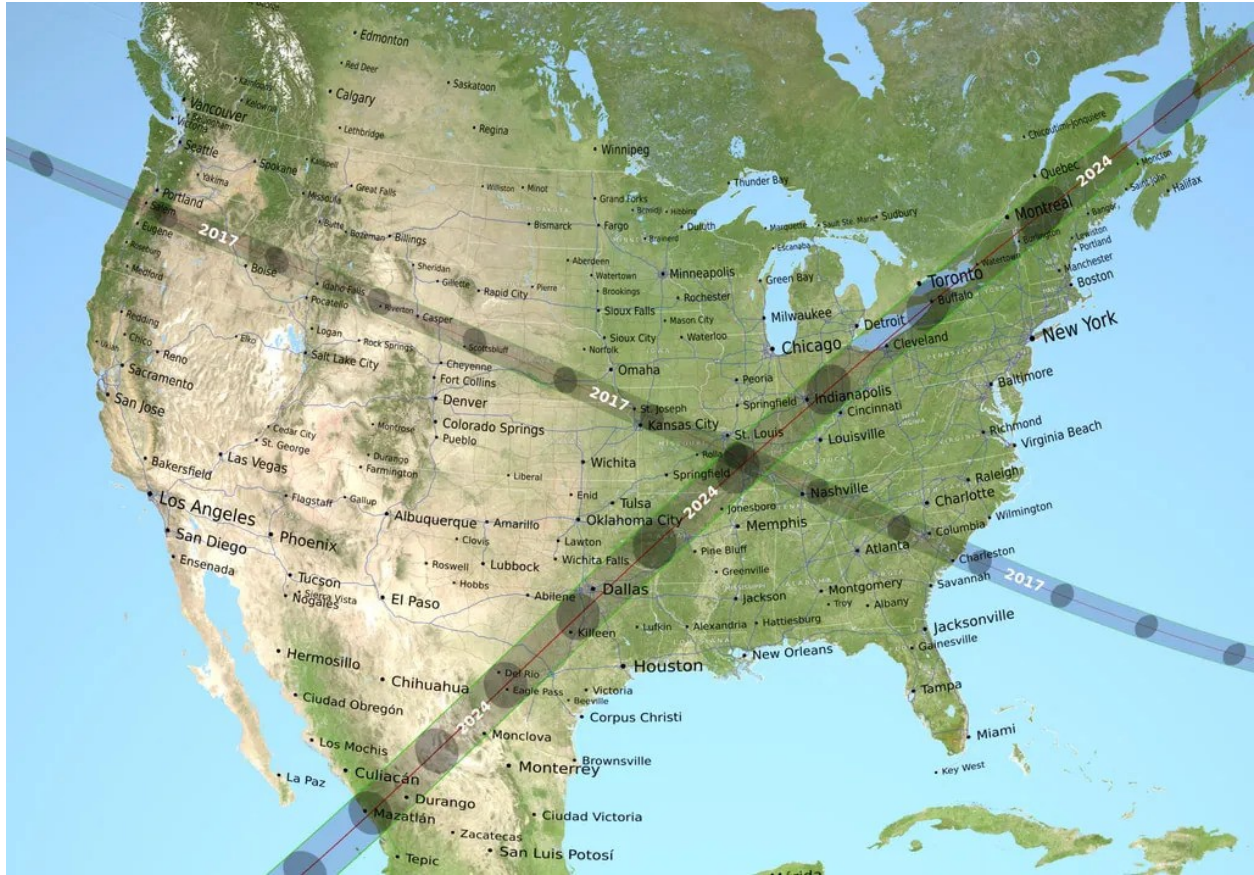
$$R_s = \frac{2GM_{bh}}{c^2} \approx \boxed{9.1 \text{ km}}.$$

5 Varjutus

30 punkti

Homme, 8. aprillil on Põhja-Ameerikas näha täielik päikesevarjutus, mille trajektoor on näidatud kaardil. Hinnake, mis on päikesevarjutuse kogukestus Maal tundides ja minutites (s.t. aeg, mille jooksul eksisteerib Maa mingis punktis Kuu täisvari). Samuti hinnake, kui kiiresti (m/s) liigub täisvari Maa pinnal oleva vaatleja jaoks varjutuse maksimumpunktis. On teada, et varjutuse maksimumpunkt (punkt, kus varjutuse ajal on Päikese kõrgus horisondist maksimaalne) asub Mehhikos, selle laiuskraad on $\phi = 25^\circ$ N ja Päikese kõrgus horisondist $h = 70^\circ$.

Võib lihtsustavalt eeldada, et varjutus toimub ligikaudu kevadisel pööripäeval ning Kuu orbiidi kaldenurk Maa orbiidi suhtes on tühine.



Joonis 2: Täieliku päikesevarjutuse trajektoor 2017. ja 2024. aastal (NASA).

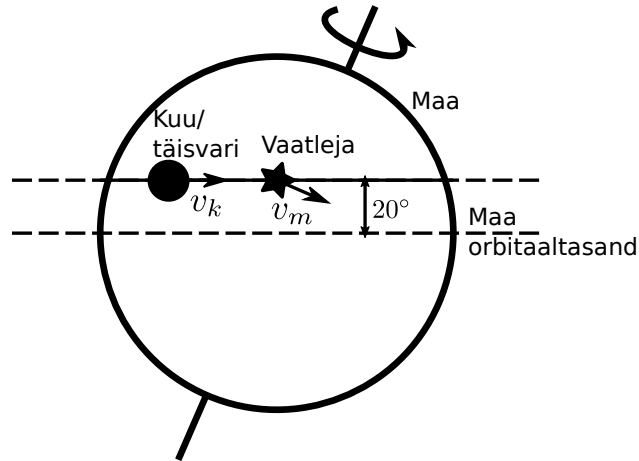
Lahendus: Joonisel on märgitud Maa ja Kuu Päikeselt vaadelduna. Kuna Kuu ja Maa vaheline kaugus on võrreldes Päikese kaugusega palju väiksem, võime teha lihtsustuse, et täisvarju keskpunkt ühtib Päikeselt vaadelduna Kuu keskpunktiga (varju diameeter on küll Kuu diameetrist palju väiksem).

Leiame kõigepealt Kuu orbitaalkiiruse v_k (tehes ringorbiidi eelduse). Ühe perioodi jooksul läbib Kuu vahemaa $2\pi r_k$, kus r_k on Kuu orbitaalraadius, seega $v_k = \frac{2\pi r_k}{T_k}$. Kuna meid huvitab Kuu kiirus Maaga kaasa tiirlevas taustsüsteemis, siis kõige täpsem on T_k väärtuseks võtta sünoodilise kuu pikkus 29,53 päeva (ajavahemik, mille jooksul Kuu asub uuesti Maa ja Päikese vahel). Seega

$$v_k = \frac{2\pi \cdot 3,844 \cdot 10^8 \text{ m}}{29,53 \cdot 24 \cdot 3600 \text{ s}} \approx 947 \text{ m/s.}$$

Teame, et kuna maksimumis on Päikese kõrgus horisondist 70° , siis varju trajektoor on Maa diameetrist 20° kõrgemal. Seega varjutuse ajal läbib vari (ning Kuu) vahemaa $2R_m \cos 20^\circ$. Eeldades, et Kuu täisvari on palju väiksem Maa raadiusest (nii et võime selle lähendada punktiks), leiame, et päikesevarjutuse kogukestus on

$$t_v = \frac{2R_m \cos 20^\circ}{v_k} = \frac{2 \cdot 6,378 \cdot 10^6 \text{ m} \cdot \cos 20^\circ}{947 \text{ m/s}} \approx 12\,640 \text{ s} \approx \boxed{3 \text{ h } 31 \text{ min.}}$$



Esmases lähenduses on Kuu varju kiirus maapinnal lihtsalt $v_k = 947 \text{ m/s}$ (selle vastuse eest anda osalised punktid). Küll aga tuleb arvestada ka Maa pöörlemisega, mistõttu varju suhteline kiirus v maapinna vaateleja suhtes on erinev. Vaateleja läbib ühe ööpäeva jooksul vahemaa $2\pi R_m \cos \phi$, seega vaateleja kiirus on

$$v_m = \frac{2\pi R_m \cos \phi}{T_m} = \frac{2\pi \cdot 6,378 \cdot 10^6 \text{ m} \cdot \cos 25^\circ}{86\,400 \text{ s}} \approx 420 \text{ m/s}.$$

Eeldades lihtsustavalt, et varjutus toimub kevadisel pööripäeval, on Maa pöörlemistelje nurk orbitaaltasandi normaali suhtes $23,5^\circ$. See on ka nurk \vec{v}_k ja \vec{v}_m vahel. Varju suhteline kiirus vaateleja suhtes on seega $\vec{v} = \vec{v}_k - \vec{v}_m$. Koosinusteoreemist leiame, et

$$v = \sqrt{v_k^2 + v_m^2 - 2v_kv_m \cos 23,5^\circ} \approx \boxed{590 \text{ m/s}}.$$

(Tegelikud vastused on 3 h 17 min ja 700 m/s. Üks erinevus tuleneb tõenäoliselt sellest, et Kuu orbiit on tegelikult elliptiline ning päikesevarjutuse ajal on Kuu kaugus Maast keskmisest väiksem ja Kuu orbitaalkiirus keskmisest suurem. Täpsemad arvutused on võimalik teha, kui eeldada, et Kuu kaugus Maast on minimaalne ($\sim 360\,000 \text{ km}$, vastab üsna hästi reaalsusele) ning leida v_k orbiidi energia valemi abil.)

6 Tumeenergiata universum

30 punkti

(i) Leia seos punanihke ja temperatuuri vahel. See peaks võtma vormi $T = T_0(1+z)^x$, kus x on konstant, mille pead leidma ja $T_0 \approx 2.7$ K on universumi temperatuur tänapäeval (palun kirjuta ka tuletuskäik, mitte vaid lõppvastus). *Vihje: Wieneri nihkeseadus võib olla kasulik.*

(ii) Rekombinatsiooniks nimetatakse ligi 380 000 aastat pärast suurt pauku aset leidnud ajajärku, kus elektronid ja prootonid moodustasid esimest korda neutraalsed vesiniku aatomid. See leidis aset punanihke $z \approx 1100$ juures. Leia universumi temperatuur rekombinatsiooni hetkel.

Friedmanni võrrandi saab anda kujul

$$\left(\frac{\dot{a}(t)}{a(t)}\right)^2 = H_0^2 \left(\frac{\Omega_{r,0}}{(a(t))^4} + \frac{\Omega_{m,0}}{(a(t))^3} + \Omega_{\Lambda,0} + \frac{\Omega_{\kappa}}{(a(t))^2} \right),$$

kus a on dimensioonitu **skaalafaktor**, mis kirjeldab universumi paisumist ning $\dot{a}(t) = \frac{da(t)}{dt}$ kirjeldab seega universumi paisumise kiirust. H_0 on Hubble'i konstant tänapäeval ning Ω_0 on universumi tihedusparameetrid tänapäeval (indeks m tähistab materiat, r kiirgust, Λ tumeenergiat ning κ **curvature**). Ühtlasi, tänapäeval $a(t=0) = a_0 = 1$.

(iii) Kui Hubble'i konstant tänapäeval on $H_0 = \left. \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \right|_{a_0}$, kuidas on tihedusparameetrid omavahel seotud?

(iv) Eelda, et universum on lapik ($\kappa = 0$) ning praeguses universumis $\Omega_{r,0} \approx 0$. Kirjuta Friedmanni võrrand, kui universumist puuduks ka tumeenergia.

(v) Pane punkti (iv) tulemusena saadud võrrand kujule $\dot{a}(t) = C(a(t))^k$, kus C ja k on arvulised konstandid. Lahenda see võrrand ehk leia $a(t)$ ning elimineeri $\dot{a}(t)$. *Vihje: kui diferentsiaalvõrrand on antud kujul $\dot{a}(t) = C(a(t))^k$ ning C ja $k \neq 0, -1$ on konstandid, siis (antud ülesande kontekstis!) on $a(t)$ ja t vahel seos $\frac{a^{1-k}}{1-k} = Ct$, kui suure paugu hetkel $t = 0$ ja $a = 0$.*

(vi) Leia selle universumi vanus. Kas see on kooskõlas vaatluslike andmetega? Põhjenda.

(vii) Eeldusel, et rekombinatsioon toimus selles universumis endiselt punanihke $z = 1100$ juures, mitu aastat pärast suurt pauku oleks pidanud see aset leidma?

(viii) Kirjelda lühidalt, milline on selle universumi edasine saatus.

Lahendus:

(i) Lahendus 1: Wieneri nihkeseadus ütleb, et $\lambda_{max}T = b$, kust saame seose $\frac{\lambda_0}{\lambda} = \frac{T}{T_0}$. Punanihke ja lainepikkuse vaheline seos on $\frac{\lambda_0}{\lambda} = 1 + z$. Kombineerides need kaks valemit, saame $T = T_0(1 + z)$ ehk $x = 1$.

Lahendus 2: footonite (relativistliku materia) jaoks on energiatihedus antud valemiga $\varepsilon = \varepsilon_0(1 + z)^4$. Stefan-Boltzmanni seadusest saame, et $\varepsilon \propto T^4$. Kombineerides need kaks valemit, saame sama vastuse, mis lahenduses 1.

(ii)

$$T \approx 2.7 \text{ K} \cdot 1100 \approx 2970 \text{ K}$$

(iii)

$$H_0^2 = \left(\frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \Big|_{a_0} \right) = H_0^2 \left(\frac{\Omega_{r,0}}{a_0} + \frac{\Omega_{m,0}}{a_0} + \Omega_{\Lambda,0} + \frac{\Omega_{\kappa}}{a_0} \right) \Rightarrow \Omega_{r,0} + \Omega_{m,0} + \Omega_{\Lambda,0} + \Omega_{\kappa} = 1$$

(iv) Kuna tumeaine puudub ja universum on lapik, siis $\Omega_{\Lambda,0} = 0$, $\Omega_{\kappa} = 0$, millest järeldub punkti (iii) vastuse põhjal $\Omega_{m,0} = 1$. Seega:

$$\left(\frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \right)^2 = H_0^2 \frac{\Omega_{m,0}}{(a(t))^3}$$

(v) Punkti (iv) põhjal on võrrand

$$\dot{a}(t) = \frac{H_0}{\sqrt{a(t)}}$$

ning

$k = -\frac{1}{2}$ ja $C = H_0$. Seega

$$\frac{2}{3}a^{3/2} = H_0 t \Rightarrow a = \left(\frac{3}{2} H_0 t \right)^{2/3}$$

(vi) Praeguses universumis $a = a_0 = 1$. Seega $t = \frac{2}{3H_0}$ ning universumi vanus on $T = \frac{2}{3 \cdot 2.27 \cdot 10^{-18}} \text{ s} \approx 9.3 \text{ Gyrs}$. See ei ole kooskõlas vaatluslike andmetega: näiteks ühe vanema tähe vanuseks on hinnatud 12 Gyrs.

(vii) Teame, et $a_0 = a(1 + z) = 1$ (analoogne lainepikkuse ja punanihke vahelisele seosele). Asendades selle punktis (v) leitud võrrandisse, saame

$$\frac{1}{1+z} = \left(\frac{3}{2}H_0 t\right)^{\frac{2}{3}} \Rightarrow t = \frac{2}{3H_0}(1+z)^{-\frac{2}{3}} \approx \boxed{0.09 \text{ Gyrs}} \gg 3.8 \cdot 10^5 \text{ yrs}$$

(viii) Jätkab lõpmatult paisumist.