7.–8. klasside lõppvoor 2024

Võistluskomplekti valmimisse panustasid:

Aleksei Ganyukov
Maksim Ivanov
Oleg Košik
Härmel Nestra
Sandra Schumann
Hendrik Vija
Raili Vilt

Eesti 71. matemaatikaolümpiaad

25. mai 2024 | Lõppvoor | **7. klass**

Lahendamisaega on 4 tundi.
Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti.
Elektroonilised ega kirjalikud abivahendid ei ole lubatud.

1. Avamata kommipakis on punaseid, rohelisi ja siniseid komme massiga vastavalt 2 g, 5 g ja 25 g. Igat sorti komme on võrdsel arvul. Mari sööb sellest pakist mõned kommid nii, et allesjäänud kommide kogumass on täpselt 787 g. Leia vähim võimalik Mari söödud kommide arv.

2. Kükametsa Reaalkoolis võttis käesoleval aastal „Känguru“ võistlusest osa täpselt neljandiku võrra rohkem gümnaasiumiõpilasi kui eelmisel aastal. Käesoleval aastal oli osalejaid 11. ja 12. klassist küll vastavalt 3 ja 4 võrra vähem kui oli osalejaid eelmisel aastal vastavalt 10. ja 11. klassist, kuid 10. klassist võttis võistlusest käesoleval aastal osa 2 korda rohkem õpilasi kui möödunud aastal 12. klassist. Eelmisel aastal oli Kükametsa Reaalkoolis osalejaid iga gümnaasiumiklassi kohta keskmiselt rohkem kui 60, kuid vähem kui 65. Leia kõik võimalused, mitu 10. klassi õpilast Kükametsa Reaalkoolist võis käesoleval aastal „Kängurul“ osaleda.

3. Korrapärase viisnurga $ABCDE$ tippu C läbiv sirge, mis on risti diagonaaliga BE, lõikab külge AB punktis K. On teada, et lõikude AC ja CE pikkuste summa on 25 cm. Leia lõikude EA ja AK pikkuste summa.

4. Kõik täisarvud 1 kuni 12 kirjutatakse kuubi servadele nii, et igale servale saab täpselt üks täisarv. Kaks robotsipelgat seisavad ühes ja samas kuubi tipus ja soovivad jõuda sellest tipust kõige kaugemal asuvasse kuubi tippu. Kumbki valib endale teekonna, mis koosneb täpselt kolmest kuubi servast. Servi mööda ronides korrutavad nad kokku arvud, mis jäävad nende teele. Esimese sipelga teele jäävate arvude korrutis jagub arvuga 100, kuid mitte arvuga 200. Teise sipelga teele jäävate arvude korrutise numbrite summa on 2 ning tema teele ei jää arvu 1. Leia kõik võimalused, millise korrutise võib kumbki sipelgas saada.

5. Kuusnurga $ABCDEF$ külgede AB, BC, CD, DE, EF ja FA keskpunktid on vastavalt G, H, I, J, K ja L. On teada, et leidub selline punkt X, et kolmnurgad ABX, CDX ja EFX on võrdkülgsed ning lõigud XH, XJ ja XL on risti vastavalt külgedega BC, DE ja FA. Nurkade FXA ja DXE suurused on vastavalt 46° ja 78°. Leia kolmnurga GIK sisenurkade suurused.

Eesti 71. matemaatikaolümpiaad

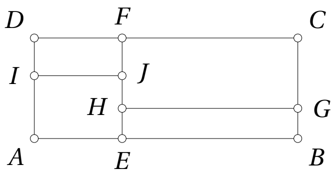
25. mai 2024 | Lõppvoor | **8. klass**

Lahendamisaega on 4 tundi.
Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti.
Elektroonilised ega kirjalikud abivahendid ei ole lubatud.

1. a) Kas leidub selline positiivne täisarv n, et kaheksa viimast numbrit arvus $n^2 + 1$ on samad mis arvus $2n$, kuid lõpust üheksas number neis kahes arvus pole sama?

b) Kas leidub selline positiivne täisarv n, et üheksa viimast numbrit arvus $n^2 + 1$ on samad mis arvus $2n$, kuid lõpust kümnes number neis kahes arvus pole sama?

2. Ristkülik $ABCD$ on lõikudega EF, GH ja IJ jaotatud väiksemateks ristkülikuteks, nagu joonisel kujutatud. Ristkülikute $AEFD$, $EBGH$ ja $IJFD$ pindalad moodustavad vastavalt kolmandiku, viiendiku ja kaheksandiku ristküliku $ABCD$ pindalast ning ristkülikute $AEJI$ ja $HGCF$ ümbermõõdud on vastavalt 60 cm ja 98 cm. Leia ristküliku $ABCD$ pindala.



3. Võrdhaarse kolmnurga ABC alusel BC valitakse punktid D ja E nii, et $|BD| = |EC| = 7$ cm. Haaraga AB ristuv sirge, mis läbib punkti A, lõikab alust BC punktis F. Kolmnurga ACE kõrgus on EG, kolmnurga AEF mediaan on AH. On teada, et $\angle DAF = \frac{1}{2}\angle BAC$. Leia lõigu GH pikkus.

4. Juku ja Miku mängivad ruudustikul mõõtmetega $n \times m$ järgmist mängu. Alguses on kõik ühikruudud värvimata. Kumbki mängija värvib oma käigul ühe värvimata ühikruudu omal valikul kas punaseks või siniseks, kuid kaht ühise külje ega ühise tipuga ühikruutu ei tohi värvida sama värviga. Käiakse kordamööda, alustab Juku. Mängija, kes ei saa lubatud käiku teha, on kaotanud. Kas Jukul on võimalik mäng võita Miku iga vastumängu korral, kui:

a) $n = 2023$ ja $m = 2023$;

b) $n = 2023$ ja $m = 2024$;

c) $n = 2024$ ja $m = 2024$?

5. Leia vähim võimalik 5 erineva positiivse täisarvu vähima ühiskordse ja suurima ühisteguri vahe.

71-я Олимпиада Эстонии по математике

25 мая 2024 г. Заключительный тур **7 класс**

Время, отводимое для решения: 4 часов.
Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи даёт 7 баллов.
Вспомогательные письменные материалы или электронные приборы не разрешены.

1. В нераспечатанной пачке конфет есть красные, зелёные и синие конфеты массой 2 г, 5 г и 25 г, соответственно. Конфет каждого вида одинаковое число. Маша съедает из этой пачки несколько конфет так, что общая масса оставшихся конфет составляет ровно 787 г. Найти наименьшее возможное число конфет, съеденных Машей.

2. В Реальной школе Кюкаметса в этом году в соревновании „Кенгуру“ приняло участие ровно на четверть больше гимназистов, чем в прошлом году. В этом году участников из 11 и 12 классов было соответственно на 3 и 4 меньше, чем участников в прошлом году из 10 и 11 классов, однако из 10 класса в этом году участвовало в 2 раза больше учеников, чем в прошлом году из 12 класса. В прошлом году в Реальной школе Кюкаметса в среднем участвовало больше 60, но меньше 65 учеников из каждого гимназического класса. Найти все возможности, сколько учеников 10 класса Реальной школы Кюкаметса могло участвовать в „Кенгуру“ в этом году.

3. Прямая, перпендикулярная диагонали BE правильного пятиугольника $ABCDE$ и проходящая через вершину C, пересекает сторону AB в точке K. Известно, что сумма длин отрезков AC и CE равна 25 см. Найти сумму длин отрезков EA и AK.

4. Все целые числа от 1 до 12 записываются на рёбра куба так, что на каждом ребре находится ровно одно целое число. Два робот-муравья стоят в одной и той же вершине куба и хотят добраться до самой дальней от неё вершины куба. Каждый из них выбирает для себя путь, состоящий ровно из трёх рёбер куба. Ползая по рёбрам, они перемножают числа, которые встречаются им на пути. Произведение чисел, встречающихся на пути первого муравья, делится на 100, но не на 200. Сумма цифр произведения чисел, встречающихся на пути второго муравья, равна 2, и на его пути не встречается число 1. Найти все возможности, какое произведение может получиться у каждого из муравьёв.

5. В шестиугольнике $ABCDEF$ серединами сторон AB, BC, CD, DE, EF и FA являются точки G, H, I, J, K и L, соответственно. Известно, что найдётся такая точка X, что треугольники ABX, CDX и EFX — равносторонние, а отрезки XH, XJ и XL перпендикулярны сторонам BC, DE и FA, соответственно. Величины углов FXA ja DXE — 46° и 78°, соответственно. Найти величины внутренних углов треугольника GIK.

71-я Олимпиада Эстонии по математике

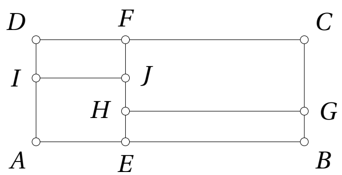
25 мая 2024 г. Заключительный тур **8 класс**

Время, отводимое для решения: 4 часов.
Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи даёт 7 баллов.
Вспомогательные письменные материалы или электронные приборы не разрешены.

1. а) Найдётся ли такое положительное целое число n, что восемь последних цифр в числе $n^2 + 1$ такие же, как в числе $2n$, но девятая с конца цифра в этих двух числах отличается?

б) Найдётся ли такое положительное целое число n, что девять последних цифр в числе $n^2 + 1$ такие же, как в числе $2n$, но десятая с конца цифра в этих двух числах отличается?

2. Прямоугольник $ABCD$ разделён отрезками EF, GH и IJ на меньшие прямоугольники, как показано на рисунке. Площади прямоугольников $AEFD$, $EBGH$ и $IJFD$ составляют третью, пятую и восьмую части, соответственно, от площади прямоугольника $ABCD$, а периметры прямоугольников $AEJI$ и $HGCF$ равны 60 см и 98 см, соответственно. Найти площадь прямоугольника $ABCD$.



3. На основании BC равнобедренного треугольника ABC выбираются точки D и E так, что $|BD| = |EC| = 7$ см. Прямая, проходящая через точку A и перпендикулярная боковой стороне AB, пересекает основание BC в точке F. Высота треугольника ACE — EG, а AH — медиана треугольника AEF. Известно, что $\angle DAF = \frac{1}{2}\angle BAC$. Найти длину отрезка GH.

4. Юра и Маша играют на клетчатом поле размером $n \times m$ в следующую игру. В начале ни одна клетка не закрашена. Каждый игрок в свой ход закрашивает одну незакрашенную клетку по своему выбору в красный или синий цвет, но две клетки, имеющие общую сторону или общий угол, не могут быть закрашены в один и тот же цвет. Игроки ходят по очереди, начинает Юра. Игрок, который не может сделать допустимый ход, проигрывает. Может ли Юра выиграть игру при любой контригре Маши, если:

а) $n = 2023$ и $m = 2023$;

б) $n = 2023$ и $m = 2024$;

в) $n = 2024$ и $m = 2024$?

5. Найти наименьшую возможную разность наименьшего общего кратного и наибольшего общего делителя одних и тех же 5 различных положительных целых чисел.

Lahendused

1. *(Maksim Ivanov)*

Avamata kommipakis on punaseid, rohelisi ja siniseid komme massiga vastavalt 2 g, 5 g ja 25 g. Igat sorti komme on võrdsel arvul. Mari sööb sellest pakist mõned kommid nii, et allesjäänud kommide kogumass on täpselt 787 g. Leia vähim võimalik Mari söödud kommide arv.

Vastus: 4.

Lahendus 1. Olgu avamata pakis n kommi igast sordist. Kuna üks punane, üks roheline ja üks sinine komm kaaluvad kokku 32 grammi, on avamata pakis olevate kommide kogumass $32n$ grammi. Mari sööb järelikult $32n - 787$ ehk $32(n-25)+13$ grammi komme.

Paneme tähele, et kui $n = 27$, siis Mari võis $32(n-25)+13$ ehk 77 grammi kokku saada 3 sinisest ja 1 punasest kommist, mis teeb kokku 4 kommi. Näitame juhtude läbivaatusega, et väiksem kommide arv pole võimalik.

- Kui $n = 25$, siis $32(n-25)+13$ ehk 13 grammi on võimalik kokku saada ainult 1 rohelise ja 4 punase kommiga, mis teeb kokku rohkem kui 4 kommi.
- Kui $n = 26$, siis $32(n-25)+13$ ehk 45 grammi kokkusaamiseks sinise kommi kasutamisega tuleb kergematest kommidest kokku saada $45-25$ ehk 20 grammi. Selleks kulub vähemalt 4 kergemat kommi, sest kuni 3 kergemat kommi kaalub kokku ülimalt $3 \cdot 5$ ehk 15 grammi. Sinist kommi mitte kasutades kulub ainuüksi kergemaid komme vähemalt 9, sest kuni 8 kergemat kommi kaalub kokku ülimalt $8 \cdot 5$ ehk 40 grammi. Igal juhul kulub kokku rohkem kui 4 kommi.
- Kui $n = 27$, siis $32(n-25)+13$ ehk 77 grammi kokkusaamiseks 0, 1 ja 2 sinise kommi kasutamisega tuleb kergematest kommidest saada kokku vastavalt 77, 52 ja 27 grammi. Viimasel juhul kulub vähemalt 6 kergemat kommi, sest kuni 5 kergemat kommi kaalub kokku ülimalt $5 \cdot 5$ ehk 25 grammi; esimesel ja teisel juhul ilmselt kulub rohkem kergemaid komme. Seega on vaja süüa rohkem kui 4 kommi.
- Kui $n = 28$, siis $32(n-25)+13$ ehk 109 grammi kokkusaamiseks tuleb süüa rohkem kui 4 kommi, sest mistahes 4 kommi kaaluvad kokku ülimalt $4 \cdot 25$ ehk 100 grammi. Juhul $n > 28$ on ärasöödud kommide kogumass suurem ja samal põhjusel on vaja jällegi rohkem kui 4 kommi.

Kuna kõigil juhtudel on vaja vähemalt 4 kommi, siis 4 on vähim võimalik söödud kommide arv.

Lahendus 2. Kuna üks punane, üks roheline ja üks sinine komm kaaluvad kokku 32 grammi ja kõiki komme on avamata pakis ühepalju, on pakis olevate kommide kogumass 32 grammi täiskordne.

Oletame, et Mari sõi k kommi. Paneme tähele, et $k = 4$ on võimalik, sest kui algses pakis oli igat värvi komme 27 tükki, oli kommide kogumass 864 grammi ja Mari võis süüa kolm sinist ja ühe punase kommi kogumassiga 77 grammi, jättes alles 787 grammi komme.

Näitame, et k ei saa olla väiksem kui 4.

- Kui $k = 1$, siis oleks Mari söönud kas ühe punase, ühe rohelise või ühe sinise kommi. Enne kommide söömist oleks pakis olnud siis vastavalt 789, 792 või 812 kommi. Kuna neist arvudest ükski ei jagu 32-ga, ei saanud need olla algseks kommide arvuks ehk $k = 1$ ei ole võimalik.
- Kui $k = 2$, siis oleks Mari söönud kas kaks punast, kaks rohelist, kaks sinist, ühe punase ja ühe rohelise, ühe rohelise ja ühe sinise või ühe punase ja ühe sinise kommi. Enne kommide söömist oleks pakis olnud siis vastavalt 791, 797, 837, 794, 817 või 814 kommi. Kuna neist arvudest ükski ei jagu 32-ga, ei saanud need olla algseks kommide arvuks ehk $k = 2$ ei ole võimalik.
- Kui $k = 3$, siis oleks Mari söönud kas kolm punast, kolm rohelist, kolm sinist, ühe punase ja kaks rohelist, ühe punase ja kaks sinist, ühe rohelise ja kaks punast, ühe rohelise ja kaks sinist, ühe sinise ja kaks punast, ühe sinise ja kaks rohelist või ühe punase, ühe rohelise ja ühe sinise kommi. Enne kommide söömist oleks pakis olnud siis vastavalt 793, 802, 862, 799, 839, 796, 842, 816, 822 või 819 kommi. Kuna neist arvudest ükski ei jagu 32-ga, ei saanud need olla algseks kommide arvuks ehk $k = 3$ ei ole võimalik.

Seega on vähim võimalik söödud kommide arv 4.

2. *(Maksim Ivanov)*

Kükametsa Reaalkoolis võttis käesoleval aastal „Känguru“ võistlusest osa täpselt neljandiku võrra rohkem gümnaasiumiõpilasi kui eelmisel aastal. Käesoleval aastal oli osalejaid 11. ja 12. klassist küll vastavalt 3 ja 4 võrra vähem kui oli osalejaid eelmisel aastal vastavalt 10. ja 11. klassist, kuid 10. klassist võttis võistlusest käesoleval aastal osa 2 korda rohkem õpilasi kui möödunud aastal 12. klassist. Eelmisel aastal oli Kükametsa Reaalkoolis osalejaid iga gümnaasiumiklassi kohta keskmiselt rohkem kui 60, kuid vähem kui 65. Leia kõik võimalused, mitu 10. klassi õpilast Kükametsa Reaalkoolist võis käesoleval aastal „Kängurul“ osaleda.

Vastus: 106, 108, 110.

Lahendus. Olgu e eelmisel aastal „Känguru“ võistlusest osa võtnud gümnaasiumiõpilaste arv. Siis käesoleval aastal osales „Kängurul“ $\frac{1}{4}e$ võrra rohkem gümnaasiumiõpilasi. Järelikult e jagub 4-ga. Kuna 11. ja 12. klassi osas oli osalejaid $3+4$ ehk 7 võrra vähem kui eelmisel aastal 10. ja 11. klassis, kuid 10. klassis osales 2 korda rohkem õpilasi kui möödunud aastal 12. klassis, siis kokkuvõttes tuli „Kängurul“ osalejaid juurde 7 võrra vähem kui oli eelmisel aastal 12. klassis osalejaid. Seega oli eelmisel aastal 12. klassis osalejaid 7 võrra rohkem kui tänavu „Kängurul“ osalejaid lisandus ehk $\frac{1}{4}e+7$. Käesoleval aastal osales 10. klassis õpilasi 2 korda rohkem ehk $\frac{1}{2}e+14$.

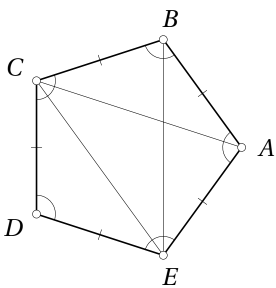
Eelmise aasta keskmine osalejate arv ühes gümnaasiumiklassis on $\frac{1}{3}e$. Kuna e jagub 4-ga, siis $\frac{1}{3}e$ avaldub hariliku murruna, mille lugeja on 4 kordne ja nimetajas on 3. Vaadates läbi kõik sellised murrud 60 ja 65 vahel, saame võimalused $\frac{184}{3}$, $\frac{188}{3}$ ja $\frac{192}{3}$. Seega e saab olla kas 184, 188 või 192 ning $\frac{1}{2}e+14$ on siis vastavalt 106, 108 või 110.

3. *(Raili Vilt, Tšehhi 2023/24 olümpiaadiülesande ainetel)*

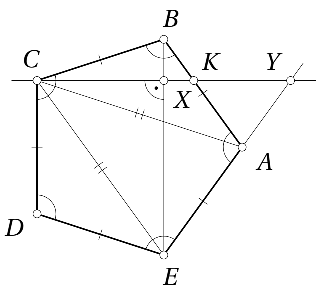
Korrapärase viisnurga $ABCDE$ tippu C läbiv sirge, mis on risti diagonaaliga BE, lõikab külge AB punktis K. On teada, et lõikude AC ja CE pikkuste summa on 25 cm. Leia lõikude EA ja AK pikkuste summa.

Vastus: 12,5 cm.

Lahendus 1. Korrapärase viisnurga sisenurgad on suurusega $\frac{(5-2)\cdot 180^\circ}{5}$ ehk 108°. Kuivõrd $|AB| = |BC|$ ja $\angle ABC = 108^\circ$ (joonis 1), siis järelikult $\angle BAC = \angle BCA = \frac{180^\circ - 108^\circ}{2} = 36^\circ$. Sarnaselt näeme, et kehtivad



Joonis 1



Joonis 2

võrdused $\angle DCE = \angle DEC = 36^\circ$. Seega $\angle EAC = 108^\circ - 36^\circ = 72^\circ$ ja samuti $\angle AEC = 72^\circ$. Järelikult kolmnurga ACE tippude A ja E juures on võrdse suurusega sisenurgad, millest tulenevalt $|AC| = |CE|$. Kuna $|AC| + |CE| = 25$ cm, siis $|AC| = |CE| = 12{,}5$ cm.

Olgu sirge CK lõikepunktid diagonaaliga BE ja külje EA pikendusega vastavalt X ja Y; siis punkti K valiku põhjal $\angle EXY = \angle EXC = 90^\circ$ (joonis 2). Samas $\angle DEC = 36^\circ$ ja sarnaselt $\angle AEB = 36^\circ$, millest tulenevalt $\angle BEC = 108^\circ - 36^\circ - 36^\circ = 36^\circ$. Seega $\angle EYX = 90^\circ - 36^\circ = 54^\circ$ ja $\angle ECX = 90^\circ - 36^\circ = 54^\circ$. Järelikult kolmnurga ECY tippude C ja Y juures on võrdse suurusega sisenurgad, millest tulenevalt $|EY| = |CE|$. Lisaks näeme, et $\angle KAY = 180^\circ - 108^\circ = 72^\circ$ ja $\angle AKY = 180^\circ - 72^\circ - 54^\circ = 54^\circ$. Järelikult ka kolmnurga AKY tippude K ja Y juures on võrdse suurusega sisenurgad, millest tulenevalt $|AK| = |AY|$.

Kokkuvõttes $|EA| + |AK| = |EA| + |AY| = |EY| = |CE| = 12{,}5$ cm.

Lahendus 2. Sarnaselt lahendusega 1 leiame nurgad suurusega 36° ja võrdused $|CA| = |CE| = 12{,}5$ cm.

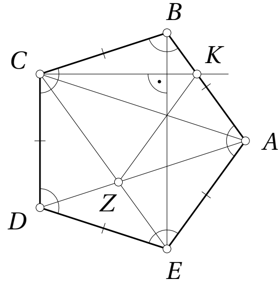
Tähistame diagonaalide AD ja CE lõikepunkti Z (joonis 3). Siis kehtib $\angle ACE = \angle EAZ$, sest $\angle ACE = \angle BCD - \angle ECD - \angle ACB = 108^\circ - 2 \cdot 36^\circ = 36^\circ$ ja $\angle EAZ = \angle EAD = 36^\circ$. Samuti saame $\angle ZEA = \angle AEC$, kuna punktid E, Z ja C asuvad ühel sirgel. Seega on kolmnurgad ACE ja ZAE sarnased tunnuse NN põhjal. Kuna $|CA| = |CE|$, siis kolmnurk ACE on võrdhaarne, järelikult kolmnurk EAZ on samuti võrdhaarne.

Nüüd näitame, et $|ZA| = |ZK|$. Sümmeetria tõttu $|ZA| = |ZC|$. Märkame, et

$$\begin{aligned}\angle AZC &= 180^\circ - \angle ZAC - \angle ZCA = \\ &= 180^\circ - \angle DAC - \angle ECA = 108^\circ.\end{aligned}$$

Kuna $\angle ABE = 36^\circ$ ning sirged CK ja BE on risti, siis

$$\angle CKB = 90^\circ - \angle EBK = 90^\circ - \angle EBA = 54^\circ.$$



Joonis 3

Seega $\angle AKC = 180^\circ - \angle CKB = 126^\circ$. Kuna $\angle AKC + \frac{1}{2}\angle AZC = 180^\circ$ ning $|AZ| = |ZC|$, siis punktid A, K ja C asuvad ringjoonel keskpunktiga Z. Järelikult $|ZA| = |ZK|$.

Kuna $\angle ZAK = \angle DAB = \angle BAE - \angle EAD = 108^\circ - 36^\circ = 72^\circ$, siis $\angle AZK = 180^\circ - 2\angle ZAK = 36^\circ$. Seega $\angle EAZ = \angle AZK$, järelikult kolmnurgad AEZ ja ZAK on tunnuse KNK põhjal võrdsed. Seega $|AK| = |ZE|$.

Kokkuvõttes $|EA| + |AK| = |ZA| + |ZE| = |ZC| + |ZE| = |CE| = 12{,}5$ cm.

4. *(Sandra Schumann)*

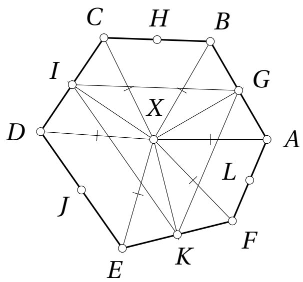
Kõik täisarvud 1 kuni 12 kirjutatakse kuubi servadele nii, et igale servale saab täpselt üks täisarv. Kaks robotsipelgat seisavad ühes ja samas kuubi tipus ja soovivad jõuda sellest tipust kõige kaugemal asuvasse kuubi tippu. Kumbki valib endale teekonna, mis koosneb täpselt kolmest kuubi servast. Servi mööda ronides korrutavad nad kokku arvud, mis jäävad nende teele. Esimese sipelga teele jäävate arvude korrutis jagub arvuga 100, kuid mitte arvuga 200. Teise sipelga teele jäävate arvude korrutise numbrite summa on 2 ning tema teele ei jää arvu 1. Leia kõik võimalused, millise korrutise võib kumbki sipelgas saada.

Vastus: esimene saab 300, teine saab 110.

Lahendus. Kuna arv 100 jagub arvuga 5^2, kuid kuubi servadel pole arve, mis jaguksid arvuga 5^2, siis peab esimese sipelga teel olema kaks arvu, mis jaguvad arvuga 5. Ainsad kaks sellist arvu nimekirjas on 5 ja 10. Nende korrutis jagub arvuga 2, kuid mitte arvuga 2^2. Kuna $100 = 2^2 \cdot 5^2$, siis kolmas arv esimese sipelga teel peab jaguma arvuga 2; samas et esimese sipelga saadud korrutis ei jaguks arvuga 200, ei tohi kolmas tegur jaguda arvuga 2^2. Kuubi servadele kirjutatud arvud, mis jaguvad arvuga 2, kuid mitte arvuga 2^2, on 2, 6 ja 10. Kuna 10 on juba kasutusel, peab kolmas arv esimese sipelga teel olema 2 või 6.

Teise sipelga teel olevate arvude korrutise numbrite summa 2 saab tekkida kas ühest number kahest või kahest number ühest, lisaks võib arvus olla nulle. Kuna kuubi servadel olevatest arvudest kolme kõige suurema korrutis on $12 \cdot 11 \cdot 10$ ehk 1320, siis on teise sipelga teel olevate arvude korrutise variandid 2, 11, 20, 101, 110, 200, 1001, 1010 ja 1100. Neist 2, 11 ja 101 on algarvud ja ei saa olla kolme ühest suurema arvu korrutised. Samuti saab välistada arvu 20, kuna ainus viis seda kolme ühest suurema arvu korrutisena kirjutada on $2 \cdot 2 \cdot 5$, mis sisaldab kaks korda sama arvu. Arvud 1001 ja 1010 saab välistada, sest $1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$ ja arvu 13 ei ole ühelgi kuubi serval ning $1010 = 2 \cdot 5 \cdot 101$ ja arvu 101 ei ole ühelgi kuubi serval. Sõelale on jäänud veel arvud 110, 200 ja 1100.

Nüüd paneme tähele, et 200 ja 1100 jaguvad mõlemad arvuga 5^2. Nende korrutiste saamiseks peab teise sipelga teekonnal olema kaks arvu, mis jaguvad arvuga 5. Ainsad sellised arvud kasutuses on 5 ja 10. Seega saab välistada ka korrutise 1100, kuna selle jaoks peaks kolmas arv olema 22, mida



Joonis 4

kuubi servadel ei esine. Korrutise 200 saamiseks peaksid kolm arvu olema 5, 10 ja 4. Lõpuks korrutise 110 saamiseks on ainsad kolm arvu 2, 5 ja 11.

Kahe sipelga teekonnad saavad aga kattuda kas 0, 1 või 3 serva ulatuses, mitte aga täpselt 2 serva ulatuses. Seega teise sipelga teekonnal ei saa olla arvud 5, 10 ja 4. Seega peavad teise sipelga teekonnal olema arvud 2, 5 ja 11. Esimese sipelga teekonnal peavad järelikult olema arvud 5, 6 ja 10, mis annavad korrutise 300.

5. *(Raili Vilt, Tšehhi 2023/24 olümpiaadiülesande ainetel)*

Kuusnurga $ABCDEF$ külgede AB, BC, CD, DE, EF ja FA keskpunktid on vastavalt G, H, I, J, K ja L. On teada, et leidub selline punkt X, et kolmnurgad ABX, CDX ja EFX on võrdkülgsed ning lõigud XH, XJ ja XL on risti vastavalt külgedega BC, DE ja FA. Nurkade FXA ja DXE suurused on vastavalt 46° ja 78°. Leia kolmnurga GIK sisenurkade suurused.

Vastus: 53°, 58°, 69°.

Lahendus. Kuna kolmnurgad ABX, CDX ja EFX on võrdkülgsed, siis peavad kehtima võrdused $|XA| = |XB|$, $|XC| = |XD|$ ja $|XE| = |XF|$ ning $\angle AXB = \angle CXD = \angle EXF = 60^\circ$. Kuna $XH \perp BC$ ja punkt H poolitab lõigu BC, siis kolmnurga XBC tipust X tõmmatud kõrgus ja mediaan ühtivad. Sellest järeldub, et $|XB| = |XC|$; sarnaselt saame võrdused $|XD| = |XE|$ ja $|XF| = |XA|$. Järelikult lõigud XA, XB, XC, XD, XE ja XF on kõik võrdse pikkusega.

Kuna punkt G poolitab lõigu AB, siis lõik XG on võrdkülgse kolmnurga XAB mediaan, järelikult ühtlasi nurga AXB poolitaja. Sellest tulenevalt $\angle AXG = \angle GXB = \dfrac{60^\circ}{2} = 30^\circ$; sarnaselt saame $\angle CXI = \angle IXD = 30^\circ$ ja $\angle EXK = \angle KXF = 30^\circ$ (joonis 4). Tähistades $\angle BXC = \alpha$, $\angle DXE = \beta$ ja $\angle FXA = \gamma$, saame $\angle GXI = 30^\circ + \alpha + 30^\circ = 60^\circ + \alpha$ ja samuti $\angle IXK = 60^\circ + \beta$ ja $\angle KXG = 60^\circ + \gamma$. Kuna kolmnurgad AXG, CXI ja EXK on kõik sisenurkadega $30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$ ning vastavad küljed XA, XC, XE on võrdsed, on need kolmnurgad võrdsed ja võrdsed on ka nende vastavad küljed XG, XI, XK. Seega kolmnurgad GXI, IXK ja KXG on võrdhaarsed tipunurgaga tipu X juures ning alusnurgad on vastavalt suurusega $\frac{180^\circ - (60 + \alpha)}{2}$, $\frac{180^\circ - \left(60^\circ + \beta\right)}{2}$, $\frac{180^\circ - \left(60^\circ + \gamma\right)}{2}$ ehk $60^\circ - \frac{\alpha}{2}$, $60^\circ - \frac{\beta}{2}$, $60^\circ - \frac{\gamma}{2}$. Kolmnurga GIK sisenurkade suurused on nende kahekaupa summad ehk $120^\circ - \frac{\alpha + \beta}{2}$, $120^\circ - \frac{\beta + \gamma}{2}$, $120^\circ - \frac{\gamma + \alpha}{2}$ ehk $30^\circ + \frac{\gamma}{2}$, $30^\circ + \frac{\alpha}{2}$, $30^\circ + \frac{\beta}{2}$.

Ülesande tingimuse põhjal $\gamma = 46^\circ$ ja $\beta = 78^\circ$, neist võrdustest tulenevalt siis $\alpha = 360^\circ - 3 \cdot 60^\circ - 46^\circ - 78^\circ = 56^\circ$. See annab kolmnurga GIK sisenurkade suurusteks 53°, 58° ja 69°.

Eesti 71. matemaatikaolümpiaad

25. mai 2024 Lõppvoor **8. klass**

Lahendused

1. *(Hendrik Vija)*

a) Kas leidub selline positiivne täisarv n, et kaheksa viimast numbrit arvus n^2+1 on samad mis arvus $2n$, kuid lõpust üheksas number neis kahes arvus pole sama?

b) Kas leidub selline positiivne täisarv n, et üheksa viimast numbrit arvus n^2+1 on samad mis arvus $2n$, kuid lõpust kümnes number neis kahes arvus pole sama?

Vastus: a) jah; b) ei.

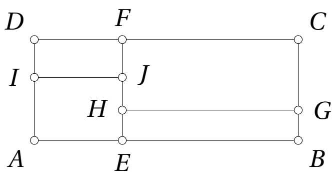
Lahendus. Tingimus, et arvudes ühtivad täpselt k viimast numbrit, kehtib parajasti siis, kui nende arvude vahe lõpeb täpselt k nulliga. Paneme tähele, et $n^2+1-2n=(n-1)^2$.

a) Valides $n=100010001$, on arvu $n-1$ lõpus 4 nulli ja lõpust viies number on 1. Seega arvu $(n-1)^2$ lõpus on 8 nulli ja lõpust üheksas number on 1. Järelikult see arv n rahuldab antud tingimust.

b) Alati, kui mingi arv lõpeb täpselt k nulliga, siis selle arvu ruut lõpeb täpselt $2k$ nulliga, kuna lõpust lugedes kohal $2k+1$ olev number tekib nullist erineva numbri korrutamisel iseendaga ega saa seetõttu olla null. Järelikult ei saa arv $(n-1)^2$ lõppeda täpselt 9 nulliga, sest 9 on paaritu arv. Seega küsitud omadusega arvu n ei leidu.

Märkus. Ülesande a-osas sobib mistahes vähemalt 9-kohaline arv n, mille korral arvu $n-1$ lõpus on täpselt 4 nulli.

2. *(Maksim Ivanov)*



Ristkülik $ABCD$ on lõikudega EF, GH ja IJ jaotatud väiksemateks ristkülikuteks, nagu joonisel kujutatud. Ristkülikute $AEFD$, $EBGH$ ja $IJFD$ pindalad moodustavad vastavalt kolmandiku, viiendiku ja kaheksandiku ristküliku $ABCD$ pindalast ning ristkülikute $AEJI$ ja $HGCF$ ümbermõõdud on vastavalt 60 cm ja 98 cm. Leia ristküliku $ABCD$ pindala.

Vastus: 1050 cm^2.

Lahendus. Olgu $|AB|=|CD|=x$ ja $|BC|=|DA|=y$. Tähistame kujundi K pindala kirjutisega S_K. Märkame järgnevat.

- Kuna $S_{AEFD} = \frac{1}{3}S_{ABCD}$, siis $|AE| \cdot y = \frac{1}{3}xy$, kust $|AE| = \frac{1}{3}x$. Sellest tulenevalt $|EB| = \frac{2}{3}x$.
- Kuna $S_{EBGH} = \frac{1}{5}S_{ABCD}$, siis $|EB| \cdot |BG| = \frac{1}{5}xy$. Eelnevat arvestades saame $\frac{2}{3}x \cdot |BG| = \frac{1}{5}xy$, kust $|BG| = \frac{3}{10}y$. Sellest tulenevalt $|GC| = \frac{7}{10}y$.
- Kuna $S_{IJFD} = \frac{1}{8}S_{ABCD}$, siis $|AE| \cdot |JF| = |IJ| \cdot |JF| = \frac{1}{8}xy$. Eelnevat arvestades saame $\frac{1}{3}x \cdot |JF| = \frac{1}{8}xy$, kust $|JF| = \frac{3}{8}y$. Sellest tulenevalt $|EJ| = \frac{5}{8}y$.

Ülesande tingimuste põhjal saame nüüd võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} 2\left(\frac{1}{3}x + \frac{5}{8}y\right) = 60 \text{ cm}, \\ 2\left(\frac{2}{3}x + \frac{7}{10}y\right) = 98 \text{ cm}. \end{cases}$$

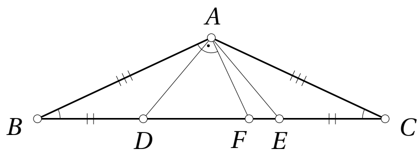
Jagades teise võrrandi 2-ga ja lahutades esimesest võrrandist, saame pärast x-ga liikmete koondamist $2 \cdot \frac{5}{8}y - \frac{7}{10}y = 11$ cm ehk $\left(2 \cdot \frac{5}{8} - \frac{7}{10}\right)y = 11$ cm. Kuna $2 \cdot \frac{5}{8} - \frac{7}{10} = \frac{50-28}{40} = \frac{22}{40} = \frac{11}{20}$, siis $y = 20$ cm. Emb-kumb võrrand annab nüüd $x = \frac{105}{2}$ cm. Kokkuvõttes saame $S_{ABCD} = xy = 1050 \text{ cm}^2$.

3. *(Härmel Nestra)*

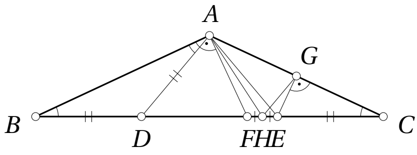
Võrdhaarse kolmnurga ABC alusel BC valitakse punktid D ja E nii, et $|BD| = |EC| = 7$ cm. Haaraga AB ristuv sirge, mis läbib punkti A, lõikab alust BC punktis F. Kolmnurga ACE kõrgus on EG, kolmnurga AEF mediaan on AH. On teada, et $\angle DAF = \frac{1}{2}\angle BAC$. Leia lõigu GH pikkus.

Vastus: 3,5 cm.

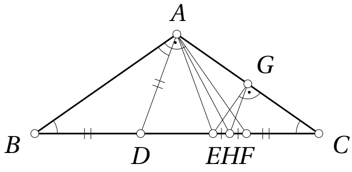
Lahendus 1. Kuna BC on võrdhaarse kolmnurga ABC alus, siis $|AB| = |AC|$ ja $\angle ABC = \angle ACB$ (joonis 5). Ülesande tingimuse põhjal ka $|BD| = |EC|$, seega on kolmnurgad ABD ja ACE tunnuse KNK põhjal võrdsed.



Joonis 5



Joonis 6



Joonis 7

Tähistame $\angle BAD = \alpha$. Siis $\angle DAF = 90^\circ - \alpha$. Kuna $\angle DAF = \frac{1}{2}\angle BAC$, siis

$$\begin{aligned} \angle CBA = \frac{1}{2}\left(180^\circ - \angle BAC\right) = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle BAC &= 90^\circ - \angle DAF = \\ &= 90^\circ - \left(90^\circ - \alpha\right) = \alpha. \end{aligned}$$

Seega kolmnurga ABD tippude A ja B juures on võrdse suurusega sisenurgad, millest tulenevalt $|AD| = |BD|$. Kuna

$$\angle AFD = \angle AFB = 90^\circ - \angle ABF = 90^\circ - \alpha = \angle DAF,$$

siis saame ka $|AD| = |DF|$. Kokkuvõttes $|DF| = |AD| = |BD| = |EC|$, millest tulenevalt

$$|DH| = |DF| \pm |HF| = |EC| \pm |EH| = |HC|,$$

kus pluss või miinus tuleb võtta vastavalt sellele, kas F asub lõigul DE või lõigul EC (vastavalt joonised 6 ja 7). Seega H on lõigu DC keskpunkt.

Kuna eelneva põhjal on kolmnurgad ABD ja ACE võrdsed, siis $|AE| = |CE|$. Võrdhaarse kolmnurga tipunurgast tõmmatud kõrgus on ühtlasi mediaan, seega G on lõigu AC keskpunkt. Kokkuvõttes on GH kolmnurga ACD küljega AD paralleelne kesklõik. Seega $|GH| = \frac{1}{2}|AD| = \frac{1}{2}|BD| = 3{,}5$ cm.

Lahendus 2. Kuna kolmnurk BAC on võrdhaarne, siis on tema alusnurgad võrdsed; tähistame $\angle ABC = \angle BCA = \beta$.

Kuna kolmnurga BAC sisenurkade summa on 180°, siis $\angle BAC = 180^\circ - 2\beta$.

Kuna $\angle DAF = \frac{1}{2}\angle BAC$, siis $\angle DAF = \dfrac{180^\circ - 2\beta}{2} = 90^\circ - \beta$.

Kuna FA on sirgega BA risti, siis $\angle BAF = 90^\circ$. Siit

$$\angle BAD = \angle BAF - \angle DAF = 90^\circ - \left(90^\circ - \beta\right) = \beta,$$

seega kolmnurk ADB on kahe nurga DBA ja BAD võrdsuse tõttu võrdhaarne. Järelikult $|AD| = |BD| = 7$ cm.

Kuna punktid D ja E ning samuti punktid B ja C on teineteise peegeldused üle võrdhaarse kolmnurga BAC sümmeetriatelje, siis ka $|AE| = |CE| = 7$ cm ning seega ka kolmnurk AEC on võrdhaarne. Kuna võrdhaarse kolmnurga tipust alusele tõmmatud kõrgus poolitab aluse, on G lõigu AC keskpunkt.

Kuna ka kolmnurga BAF sisenurkade summa on 180°, siis

$$\angle AFB = \angle AFD = 180^\circ - 90^\circ - \beta = 90^\circ - \beta.$$

Seega kolmnurk DAF on võrdhaarne sisenurkade DAF ja DFA võrdsuse tõttu, millest tulenevalt $|DF| = 7$ cm. Järelikult $|DF| = |EC|$. Kuna H on lõigu EF keskpunkt ja $|DF| = |EC|$, siis on H ka lõigu DC keskpunkt.

Kokkuvõttes on lõik HG kolmnurga ACD küljega AD paralleelne kesklõik. Seega $|HG| = \frac{1}{2}|AD| = 3{,}5$ cm.

4. *(Härmel Nestra)*

Juku ja Miku mängivad ruudustikul mõõtmetega $n \times m$ järgmist mängu. Alguses on kõik ühikruudud värvimata. Kumbki mängija värvib oma käigul ühe värvimata ühikruudu omal valikul kas punaseks või siniseks, kuid kaht ühise külje ega ühise tipuga ühikruutu ei tohi värvida sama värviga. Käiakse kordamööda, alustab Juku. Mängija, kes ei saa lubatud käiku teha, on kaotanud. Kas Jukul on võimalik mäng võita Miku iga vastumängu korral, kui:

a) $n = 2023$ ja $m = 2023$;

b) $n = 2023$ ja $m = 2024$;

c) $n = 2024$ ja $m = 2024$?

Vastus: a) jah; b) ei; c) ei.

Lahendus. Kui n ja m on paaritud, siis leidub ruudustikul keskmine ruut. Värvigu Juku esimesel käigul keskmise ruudu ükskõik kumba värvi. Edasi peegeldagu Juku igal oma käigul viimast Miku käiku ruudustiku keskpunkti suhtes. Kui enne Miku käiku on seis ruudustiku keskpunkti suhtes sümmeetriline, siis Miku käiguvõimaluse olemasolul saab Juku kindlasti sümmeetriliselt vastata ning enne Miku järgmist käiku on seis jällegi ruudustiku keskpunkti suhtes sümmeetriline. Seega saab käigupuudusse jääda vaid Miku.

Kui n või m on paaris, siis peegeldagu Miku igal oma käigul viimast Juku käiku ruudustiku keskpunkti suhtes, aga vastasvärviga. Siis on enne igat Juku käiku laual seis, milles keskpunkti suhtes sümmeetrilised ühikruudud on vastasvärvi. Seega kui Juku saab teha käigu, siis Mikul on võimalik keskpunkti suhtes sümmeetriliselt talle vastata. Järelikult saab käigupuudusse jääda vaid Juku.

Arutlusest järeldub, et ruudustikul mõõtmetega 2023×2023 saab Juku võita Miku iga vastumängu korral, kuid ruudustikel mõõtmetega 2023×2024 ja 2024×2024 ei saa.

5. *(Härmel Nestra, „Kängurule“ pakutud ülesande ainetel)*

Leia vähim võimalik 5 erineva positiivse täisarvu vähima ühiskordse ja suurima ühisteguri vahe.

Vastus: 11.

Lahendus 1. Arvude 1, 2, 3, 4 ja 6 vähim ühiskordne on 12 ja suurim ühistegur 1. Vähima ühiskordse ja suurima ühisteguri vahe on 11.

Näitame, et väiksemat tulemust pole võimalik saada. Selleks võtame suvalised 5 erinevat positiivset täisarvu s, t, u, v ja w ja näitame, et nende vähima ühiskordse ja suurima ühisteguri vahe on vähemalt 11. Vaatame kolme juhtu.

- Kui $\text{SÜT}(s, t, u, v, w) = 1$, siis paneme tähele, et $\text{VÜK}(s, t, u, v, w) \geqslant 12$, sest 12 on vähim positiivne täisarv, mis jagub 5 erineva positiivse täisarvuga. Seega $\text{VÜK}(s, t, u, v, w) - \text{SÜT}(s, t, u, v, w) \geqslant 11$.
- Kui $\text{SÜT}(s, t, u, v, w) = 2$, siis s, t, u, v ja w on paarisarvud. Nagu eelmises punktis näeme, et $\text{VÜK}(s, t, u, v, w) \geqslant 12$; kuid 12 ei jagu 5 erineva paarisarvuga. Seega $\text{VÜK}(s, t, u, v, w) \geqslant 13$, millest tulenevalt $\text{VÜK}(s, t, u, v, w) - \text{SÜT}(s, t, u, v, w) \geqslant 11$.
- Kui $\text{SÜT}(s, t, u, v, w) \geqslant 3$, siis tähistame $\text{SÜT}(s, t, u, v, w) = d$. Paneme tähele, et $\text{VÜK}(s, t, u, v, w)$ peab olema vähemalt niisama suur kui suurim arvudest s, t, u, v, w ning $\text{SÜT}(s, t, u, v, w)$ saab olla ülimalt nii suur kui vähim arvudest s, t, u, v, w. Viis järjestikust d-ga jaguvat arvu esituvad kujul kd, $(k+1)d$, $(k+2)d$, $(k+3)d$ ja $(k+4)d$, millest suurima ja vähima vahe on $4d$. Seega $\text{VÜK}(s, t, u, v, w) - \text{SÜT}(s, t, u, v, w) \geqslant 4d$. Kuna $d \geqslant 3$, siis $4d \geqslant 12 > 11$.

Kuna kõigil juhtudel on uuritav vahe vähemalt 11, siis väiksemat vahet pole võimalik saavutada.

Lahendus 2. Arvude 1, 2, 3, 4 ja 6 vähim ühiskordne on 12 ja suurim ühistegur 1. Vähima ühiskordse ja suurima ühisteguri vahe on 11.

Näitame, et väiksemat tulemust pole võimalik saada. Selleks võtame suvalised 5 erinevat positiivset täisarvu s, t, u, v ja w ja näitame, et nende vähima ühiskordse ja suurima ühisteguri vahe on vähemalt 11. Vaatame kahte juhtu.

- Kui $\text{SÜT}(s, t, u, v, w) = 1$, siis paneme tähele, et $\text{VÜK}(s, t, u, v, w) \geqslant 12$, sest 12 on vähim positiivne täisarv, mis jagub 5 erineva positiivse täisarvuga. Seega $\text{VÜK}(s, t, u, v, w) - \text{SÜT}(s, t, u, v, w) \geqslant 11$.
- Kui $\text{SÜT}(s, t, u, v, w) > 1$, siis tähistame $\text{SÜT}(s, t, u, v, w) = d$ ja taandame kõik arvud s, t, u, v, w arvuga d. Saame mingid väiksemad positiivsed täisarvud s', t', u', v', w', mille vähim ühiskordne ja suurim ühistegur on samuti d korda väiksemad kui arvudel s, t, u, v, w. Seega

$$\begin{aligned}&\text{VÜK}(s, t, u, v, w) - \text{SÜT}(s, t, u, v, w) =\\ &\qquad = d \cdot \text{VÜK}(s', t', u', v', w') - d \cdot \text{SÜT}(s', t', u', v', w') =\\ &\qquad = d \cdot \big(\text{VÜK}(s', t', u', v', w') - \text{SÜT}(s', t', u', v', w')\big).\end{aligned}$$

Kuna $\mathrm{SÜT}(s', t', u', v', w') = 1$, siis eelmise punkti põhjal

$$\mathrm{VÜK}(s', t', u', v', w') - \mathrm{SÜT}(s', t', u', v', w') \geqslant 11.$$

Vahe $\mathrm{VÜK}(s, t, u, v, w) - \mathrm{SÜT}(s, t, u, v, w)$ on sellest d korda suurem, seega ammugi ka $\mathrm{VÜK}(s, t, u, v, w) - \mathrm{SÜT}(s, t, u, v, w) \geqslant 11$.

Kuna mõlemal juhul on uuritav vahe vähemalt 11, siis väiksemat vahet pole võimalik saavutada.

Hindamisskeemid ja kontrollijate kommentaarid

1. *(Toomas Herodes)*

Lahenduse allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Esitatud tingimustele vastav näide, kus Mari sööb 4 kommi: 2 p
- Põhjendatud, et 4 on vähim võimalik söödud kommide arv: 5 p
  - Näidatud, et kommide koguarv peab jaguma 32-ga või tõestatud analoogne väide: *1 p*
  - Juhtude $n = 25$ ja $n = 26$ analüüs (kus n on ühte sorti kommide arv avamata pakis): *2 p*
  - Juhu $n = 27$ analüüs: *1 p*
  - Juhu $n \geqslant 28$ analüüs: *1 p*

Kui õpilane ei analüüsinud juhte $n = 25$ ja $n = 26$, aga leidis nende jaoks vähimad võimalikud söödud kommide arvud, siis anti skeemi vastava rea järgi 1 punkt 2-st.

2. *(Andres Alumets)*

Lahenduse allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Leitud, millises vahemikus oli õpilaste arv eelmisel aastal (181 kuni 194): 1 p
- Saadud aru, et keskmine õpilaste arv klassis ei pea olema täisarv: 1 p
- Saadud aru, et algne õpilaste arv peab jaguma 4-ga: 3 p
- Eelmise aasta õpilaste koguarvu järgi leitud selle aasta 10. klassi õpilaste arv: 2 p

Peamine tüüpviga oli see, et arvati, et keskmine õpilaste arv klassis peab olema täisarv. See jätab välja mitmed ülesande lahendid. Samuti ei pandud tihti tähele seda, et eelmisel aastal pidi õpilaste arv jaguma 4-ga. See tingimus lihtsustas ülesannet märgatavalt.

3. *(Aleksei Ganyukov)*

Žürii lahenduse 1 allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Näidatud, et $|AC| = |CE|$: 1 p
- Näidatud, et $\angle AEB = 36^\circ$ või leitud sellega analoogse nurga väärtus: 1 p
- Näidatud, et $|EC| = |EY|$ (kus Y on sirgete CK ja AE lõikepunkt): 2 p

- Näidatud, et $|AK| = |AY|$: 2 p
- Lahendus lõpule viidud: 1 p

Žürii lahenduse 2 allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Näidatud, et $|AC| = |CE|$: 1 p
- Näidatud, et $\angle AEB = 36^\circ$ või leitud sellega analoogse nurga väärtus: 1 p
- Näidatud, et $|AE| = |ZC|$, kus Z on AD ja CE lõikepunkt: 2 p
- Näidatud, et $|AK| = |ZE|$, ja lahendus lõpule viidud: 3 p

Ülesanne osutus raskeks. Paljudes töödes esinesid õigete väidete põhjendustes puudujäägid. Esines ka palju valesid hüpoteese, näiteks ei ole K lõigu AB keskpunkt. Tuleb märkida, et joonisest lõikude pikkuste ära mõõtmine ei saa olla matemaatiliselt korrektse lahenduse osaks.

Kui muud progressi ei ole, aga õige vastus on väidetud, siis anti 1 punkt.

4. *(Birgit Veldi)*

Lahenduse järgnevalt märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Leitud ülemine tõke korrutistele ning kirjutatud välja kõik sellest väiksemad arvud, mille numbrite summa on 2: 1 p
- Leitud esimesele sipelgale sobivad korrutised (kuubi ehitust arvesse võtmata): 1 p
- Põhjendatud, miks esimesel sipelgal rohkem võimalusi pole: 1 p
- Leitud teisele sipelgale sobivad korrutised (kuubi ehitust arvesse võtmata): 1 p
- Põhjendatud, miks ei sobi 2, 11, 20, 101, 1001 ja 1010: 1 p
- Välistatud juhud, kus sipelgate teekondadel oleks täpselt 2 ühist serva: 2 p

  Sealhulgas:
  - Leitud, mitu serva võib teekondadel kattuda, või välistatud vaid osa juhte: *1 p*

Skeemi esimese rea järgi sai punkti ka siis, kui nimekirjast unustati üks algarv välja.

Keegi täislahenduseni ega ka õige vastuseni ei jõudnudki. Enamik õpilasi ei arvestanud kuubi ehitusega ning need, kes arvestasid, välistasid vaid ühe juhu.

5. *(Raili Vilt)*

Lahenduse allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Näidatud võrdkülgsete kolmnurkade võrdsus: 2 p
- Leitud koos põhjendusega kolmnurga GIK nurkade suurused: 5 p

  Sealhulgas:
  - Märgatud või kasutatud kolmnurkade FXA, BXC ja EXD võrdhaarsust ja nende nurkade suurusi: *1 p*

Kui lahenduseks oli leitud vaid nurga CXB suurus ja võibolla veel mõningate nurkade suurusi, punkte ei antud.

Hindamisskeemid ja kontrollijate kommentaarid

1. *(Oleg Košik)*

Lahenduse allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Osa a): 3 p
- Osa b): 4 p

Osas a) piisas tuua korrektne näide koos kontrolli või ammendava põhjendusega. Kahjuks esines hulgaliselt arvutusvigu, näiteks isegi mitu õpilast arvas, et osas a) sobib näitena arv 200000001.

Ainult tõestuse eest, et arv n peab olema paaritu või lõppema ühega, punkte ei antud.

2. *(Evely Kirsiaed)*

Lahenduse allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Märgatud, et punkt F jaotab lõigu DC suhtes $1:2$: 1 p
- Leitud, kui suure osa moodustavad ristkülikute $AEJI$ ja $HGCF$ pindalad ristküliku $ABCD$ pindalast (vastavalt $\frac{5}{24}$ ja $\frac{7}{15}$): 1 p
- Jõutud võrrandisüsteemi või võrrandini, mis seob ristkülikute $AEJI$ ja $HGCF$ ümbermõõdud ristküliku $ABCD$ külgede pikkustega või selle osadega: 3 p
- Leitud ristküliku $ABCD$ küljed: 1 p
- Arvutatud ristküliku $ABCD$ pindala: 1 p

3. *(Kristjan-Erik Kahu)*

Lahenduse allpool märgitud (või nendega võrdväärsete) osade eest antud punktid summeeriti.

- Näidatud, et kolmnurk ADB on võrdhaarne: 2 p
- Näidatud, et kolmnurk AEC on võrdhaarne: 1 p
- Näidatud, et kolmnurk ADF on võrdhaarne: 2 p
- Lahendus lõpuni viidud: 2 p

Näitamised ei pea käima kolmnurkade kohta, piisavad on ka samalaadsed põhjendused vastavate nurkade või lõikude võrduse kohta jne.

4. *(Marko Tsengov)*

Lahenduse allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Pakutud strateegiana sooritada sümmeetrilisi käike: 1 p
- Toodud konstruktsioon a-osa jaoks: 3 p
- Toodud konstruktsioon b- ja c-osa jaoks: 3 p

Suur osa lahendustest järgisid kombinatoorsetele mängudele omaseid vigu: valdavalt vaadati vaid üht konkreetset käikude jada (ehkki nõutud oli eraldi *iga* vastumängu kaalumist), samuti tehti liigseid eeldusi mängu lõppseisu kohta, seejuures näiteks seda, et lõpuks värvitakse mingi kindel arv kumbagi värvi ruute. Leidus ka mitmeid konstruktsioone, mis olid puudulikud ning ei tundunud ühegi mõeldava korrektse lahenduseni viivat.

Täispunktide saamiseks ei nõutud korrektset tõestust, et konstruktsioonid ühtki reeglit ei riku. Parimad põhjendused olid enam-vähem näidislahenduse tasemel, samas rangema korrektsuse jaoks tuleks uurida ka erijuhte, näiteks seda, kui strateegia järgi värvitav ruut on vastase värskelt värvitud ruudu läheduses.

5. *(Hans Gustav Kõljalg)*

Lahenduse allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Leitud viis positiivset täisarvu, mille vähima ühiskordse ja suurima ühisteguri vahe on 11: 2 p
- Põhjendatud, et kui SÜT$(s, t, u, v, w) = 1$, siis vähima ühiskordse ja suurima ühisteguri vahe on vähemalt 11: 1 p
- Põhjendatud, et kui SÜT$(s, t, u, v, w) > 1$, siis vähima ühiskordse ja suurima ühisteguri vahe on vähemalt 11: 4 p

  Sealhulgas:
  - Põhjendatud, et kui SÜT$(s, t, u, v, w) = 2$, siis vähima ühiskordse ja suurima ühisteguri vahe on vähemalt 11: *1 p*

Vähima vahe leidmine oli enamusele õpilastest jõukohane, kuid raskeks osutuks tõestamine, et väiksemat vahet ei leidu.