Lahtine võistlus 2024 talv

Võistluskomplekti valmimisse panustasid:

Aleksei Ganyukov
Maksim Ivanov
Urve Kangro
Oleg Košik
Härmel Nestra
Vahur Paist
Birgit Veldi

Matemaatika lahtine võistlus

14. detsember 2024 **Noorem rühm**

Lahendamisaega on 5 tundi.
Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti.
Elektroonilised ega kirjalikud abivahendid ei ole lubatud.

1. Leia kõik võimalused asendada kirjutises $4 \cdot SADA = TUHAT$ ühesugused tähed ühesuguste numbrite ja erinevad tähed erinevate numbritega nii, et tekiks tõene võrdus.

2. Raadiosaade on eetris iga 28 päeva järel. Käesoleval sajandil oli selline aasta, kui see raadiosaade oli eetris 1. ja 29. jaanuaril. Mitme aasta möödudes oli või on järgmine kord see raadiosaade jaanuaris kaks korda eetris?

3. Kirjutises $2024 \cdot AB \cdot CC \cdot BA$ asendatakse sama täht sama numbri ja erinevad tähed erinevate numbritega nii, et tekiks korrektne avaldis, mille väärtus võrdub mingi täisarvu ruuduga. Mitu erinevat väärtust saab olla summal $A + B + C$?

4. Lahenda võrrandisüsteem

$$\begin{cases} x + y = z, \\ x^2 + y^2 = 4z, \\ x^3 + y^3 = 18z. \end{cases}$$

5. On antud võrdhaarne kolmnurk ABC tipunurgaga tipu A juures. Tipunurga poolitaja lõikab külge BC punktis D. Alusnurga poolitaja lõikab lõigu AD keskristsirget punktis E. Tõesta, et kolmnurga kolmas nurgapoolitaja on risti sirgega DE.

6. Firmal on mingi hulk veebilehti, millest mõned lehed viitavad teistele sama firma lehtedele. Nimekirja, milles esinevad kõigi nende veebilehtede nimed igaüks ühe korra, nimetame *loomulikuks*, kui alati, kui mingi leht viitab teisele, on esimene leht nimekirjas teisest eespool.

Firma veebimeistril on koostatud mingi loomulik veebilehtede nimekiri. Seejärel aga järjestab ta nimekirjas veebilehed ümber, pannes algusse mingis järjestuses kõik lehed, millele ükski teine leht ei viita, nende järele mingis järjestuses kõik lehed, millele viitab algse nimekirja esimene leht, nende järele mingis järjestuses kõik lehed, millele viitab algse nimekirja teine leht ja mis pole veel kirjas, jne.

a) On teada, et igale veebilehele viitab ülimalt üks veebileht. Kas võib kindlalt väita, et ka uus nimekiri on loomulik?

b) Pole teada, kas igale veebilehele viitab ülimalt üks veebileht. Kas võib kindlalt väita, et vähemalt üks võimalik uus nimekiri on loomulik?

Matemaatika lahtine võistlus

14. detsember 2024 **Vanem rühm**

Lahendamisaega on 5 tundi.
Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti.
Elektroonilised ega kirjalikud abivahendid ei ole lubatud.

1. Kas leidub naturaalarv n, mille korral arv $2^n + n^3$ jagub 88-ga?

2. Olgu n naturaalarv, $n \geqslant 3$. Ruudustikul mõõtmetega $n \times n$ paikneb kolm nähtamatut koletist: ülemisel parempoolsel nurgaruudul üks ja kummalgi naaberruudul samuti üks. Vastasnurga juures olevale alale mõõtmetega 2×2 paigutatakse mingi arv konni; seejuures võib ühelt ühikruudult ka mitu konna alustada.

Konnad ja koletised hakkavad kordamööda tegema järgnevaid käike. Konnade käigul sooritab iga konn ühe kahest ratsuhüppest, mis on suunaga üles paremale (st asukohale rakendub vektor $(1; 2)$ või $(2; 1)$). Koletiste käigul sooritavad kõik koletised kokku kuni 3 ratsukäiku suunaga alla vasakule (st asukohale rakendub vektor $(-1; -2)$ või $(-2; -1)$). Konnad alustavad. Kui koletis ja konn satuvad peale kelle tahes käiku ühele ja samale ruudule, siis sööb koletis konna ära.

Milline on vähim arv konni, mille saab algul ruudustikule paigutada nii, et vähemalt üks konnadest jõuaks kindlasti elusana kohta, kus tema mõlemad järgmised hüppevõimalused lähevad ruudustiku piirest välja?

3. Iga positiivse täisarvu n korral tähistab $n!$ korrutist $1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$. Leia kõik positiivsete täisarvude kolmikud (x, y, z), mille korral

$$3 \cdot x! + 4 \cdot y! = 5 \cdot z!.$$

4. Teoema tahab minna koos lapsega 75 cm kaugusel elavale naabrile külla. Ta on planeerinud kasutada iga tunni esimest 45 minutit liikumiseks ja ülejäänud 15 minutit puhkamiseks. Järjekorras n-ndal tunnil liiguvad nad edasi $\dfrac{1}{n^2+1}$ meetrit, kuid puhkamise asemel tõmbab teolaps neid seejärel $\dfrac{1}{n+1}$ sel tunnil edenetud vahemaast tagasi. Kas nad jõuavad kunagi kohale ja kui jah, siis millal?

5. Teravnurkse kolmnurga ABC kõrguse AD pikendus üle punkti D lõikab kolmnurga ABC ümberringjoont punktis E. Lõigu CE keskpunkt on F. Kolmnurkade ABC ja DEF ümberringjooned lõikuvad teistkordselt punktis G, $G \neq E$. Punktist A sirgele FG tõmmatud ristlõigu aluspunkt on P. Tõesta, et lõigud DA ja DP on võrdse pikkusega.

6. Leia kõik täisarvud n, mille korral $n > 1$ ja leidub arvude $0, 1, \ldots, n-1$ selline ümberjärjestus $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$, et arvude $1, \ldots, n-1$ seas ei leidu selliseid indekseid i ja j, et $i \neq j$ ja $\left(a_i - a_{i-1}\right) - \left(a_j - a_{j-1}\right)$ jagub arvuga n.

Открытое соревнование по математике

14 декабря 2024 г. **Младшая группа**

Время, отводимое для решения: 5 часов.
Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи даёт 7 баллов.
Вспомогательные письменные материалы или электронные приборы не разрешены.

1. Найти все возможности заменить в записи $4 \cdot SADA = TUHAT$ одинаковые буквы одинаковыми цифрами и разные буквы разными цифрами так, чтобы получилось верное равенство.

2. Радиопередача выходит в эфир каждые 28 дней. В этом веке был такой год, когда она выходила в эфир 1 и 29 января. Через сколько лет в следующий раз эта радиопередача вышла или выйдет в эфир дважды в январе?

3. В записи $2024 \cdot AB \cdot CC \cdot BA$ одинаковые буквы заменяются одинаковыми цифрами, а разные буквы — разными цифрами так, чтобы получилось корректное выражение, значение которого является квадратом целого числа. Сколько различных значений может принимать сумма $A + B + C$?

4. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x + y = z, \\ x^2 + y^2 = 4z, \\ x^3 + y^3 = 18z. \end{cases}$$

5. Дан равнобедренный треугольник ABC с вершиной в точке A. Биссектриса угла при вершине пересекает сторону BC в точке D. Биссектриса угла при основании пересекает серединный перпендикуляр отрезка AD в точке E. Доказать, что третья биссектриса треугольника перпендикулярна прямой DE.

6. У фирмы есть несколько веб-страниц, некоторые из которых ведут на другие страницы той же фирмы. Список, в котором названия всех этих веб-страниц встречаются ровно по одному разу, называется *естественным*, если каждый раз, когда какая-то страница ведёт на другую, первая страница стоит в списке выше второй.

У веб-мастера фирмы уже составлен какой-то естественный список веб-страниц. Однако затем он перестраивает этот список следующим образом: в начало он помещает в каком-то порядке все страницы, на которые не ведёт ни одна другая страница, за ними в каком-то порядке — все страницы, на которые ведёт первая страница исходного списка, за ними — все страницы, на которые ведёт вторая страница исходного списка и которые ещё не включены, и так далее.

а) Известно, что на каждую страницу ведёт не более чем одна другая страница. Можно ли смело утверждать, что новый список тоже будет естественным?

б) Неизвестно, ведёт ли на каждую страницу не более одной другой страницы. Можно ли смело утверждать, что хотя бы один из возможных новых списков будет естественным?

Открытое соревнование по математике

14 декабря 2024 г. **Старшая группа**

Время, отводимое для решения: 5 часов.
Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи даёт 7 баллов.
Вспомогательные письменные материалы или электронные приборы не разрешены.

1. Найдётся ли такое натуральное число n, что число $2^n + n^3$ делится на 88?

2. Дано натуральное число n, $n \geqslant 3$. На сетке размером $n \times n$ расположены три невидимых монстра: один в верхнем правом углу, и по одному на двух соседних с ним клетках. В области размером 2×2, расположенной в противоположном углу сетки, размещается некоторое количество лягушек; при этом с одной клетки может начинать несколько лягушек.

Лягушки и монстры начинают по очереди делать следующие ходы. На ходу лягушек каждая лягушка выполняет один из двух конных прыжков, направленных вверх и вправо (т.е. её позиция изменяется на вектор $(1; 2)$ или $(2; 1)$). На ходу монстров все монстры вместе выполняют не более 3 конных прыжков, направленных вниз и влево (т.е. их позиция изменяется на вектор $(-1; -2)$ или $(-2; -1)$). Лягушки начинают. Если после какого-либо хода монстр и лягушка оказываются на одной и той же клетке, монстр съедает лягушку.

Сколько лягушек нужно минимально разместить на сетке в начале, чтобы хотя бы одна из них гарантированно добралась живой до такой клетки, с которой оба её следующих прыжка выходят за пределы сетки?

3. Для любого положительного целого числа n обозначим за $n!$ произведение $1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$. Найти все тройки положительных целых чисел (x, y, z), при которых

$$3 \cdot x! + 4 \cdot y! = 5 \cdot z!.$$

4. Мама-улитка с детёнышем хочет пойти в гости к соседу, который живёт на расстоянии 75 см. Она планирует использовать первые 45 минут каждого часа для движения, а оставшиеся 15 минут — для отдыха. В n-й час они продвигаются вперёд на расстояние в $\frac{1}{n^2+1}$ метра, но вместо отдыха улитёнок тянет их назад на $\frac{1}{n+1}$ от пройденного за этот час расстояния. Доберутся ли они когда-нибудь до цели и, если да, то когда?

5. В остроугольном треугольнике ABC продолжение высоты AD за точку D пересекает описанную окружность треугольника ABC в точке E. Точка F — середина отрезка CE. Описанные окружности треугольников ABC и DEF пересекаются повторно в точке G, где $G \neq E$. Точка P — основание перпендикуляра, опущенного из точки A на прямую FG. Доказать, что отрезки DA и DP равной длины.

6. Найти все такие целые числа n, что $n > 1$ и найдётся такая перестановка $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ чисел $0, 1, \ldots, n-1$, что среди чисел $1, \ldots, n-1$ не найдётся таких индексов i ja j, что $i \neq j$ и $(a_i - a_{i-1}) - (a_j - a_{j-1})$ делится на n.

Lahendused

1. *(Härmel Nestra)*

Leia kõik võimalused asendada kirjutises $4 \cdot SADA = TUHAT$ ühesugused tähed ühesuguste numbrite ja erinevad tähed erinevate numbritega nii, et tekiks tõene võrdus.

Vastus: $T = 2$, $A = 3$, $D = 8$, $H = 5$, $S = 7$, $U = 9$.

Lahendus. Kuna 4-ga korrutamisel saab ülekanne kõrgemasse numbrikohta olla ülimalt 3, siis kümnetuhandelistest saame võimalused $T = 1$, $T = 2$ ja $T = 3$. Ühelistest aga saame, et T on mingi 4-ga jaguva arvu viimane number. Kuna 4-ga jaguv arv jagub ka 2-ga, siis see number peab olema paaris. Kokkuvõttes peab olema $T = 2$. Seega $A = 3$ või $A = 8$, et korrutise üheliste number tuleks 2.

- Kui $A = 3$, siis ka korrutise kümneliste number on 3, seejuures kandub ühelistest kümnelistesse 1. Järelikult peab numbri D korrutamisel 4-ga saadud arv lõppema numbriga 2. Kuna number 3 on kasutatud, siis on ainus võimalus $D = 8$. Sajalistest saame nüüd $H = 5$, sest kümnelistest kandub sajalistesse 3. Seejuures sajalistest kandub tuhandelistesse 1. Vaadates kõik võimalikud juhud läbi, näeme, et ainus võimalus kümnetuhandelistesse 2 saada tuhandelistes vaid kasutamata numbrite abil on $S = 7$ ja $U = 9$.
- Kui $A = 8$, siis ka korrutise kümneliste number on 8, seejuures kandub ühelistest kümnelistesse 3. Järelikult peab numbri D korrutamisel 4-ga saadud arv lõppema numbriga 5. See pole võimalik, sest 4-ga korrutamisel saadud arv on paaris ega saa lõppeda paaritu numbriga.

Järelikult on ainus võimalus $4 \cdot 7383 = 29532$.

2. *(Härmel Nestra)*

Raadiosaade on eetris iga 28 päeva järel. Käesoleval sajandil oli selline aasta, kui see raadiosaade oli eetris 1. ja 29. jaanuaril. Mitme aasta möödudes oli või on järgmine kord see raadiosaade jaanuaris kaks korda eetris?

Vastus: 21.

Lahendus. Lihtaastas on 365 päeva. Kuna $365 = 13 \cdot 28 + 1$, siis ühe lihtaasta möödumisel nihkuvad raadiosaate eetrisolekud 1 päeva võrra varasemaks; liigaastas on 1 päev enam, mistõttu liigaasta möödumisega nihkuvad raadiosaate eetrisolekud 2 päeva võrra varasemaks. Iga 4 aasta sees on

3 lihtaastat ja 1 liigaasta, mistõttu iga 4 aastaga nihkuvad raadiosaate eetrisolekud $3 \cdot 1 + 2$ ehk 5 päeva võrra varasemaks. Järelikult $5 \cdot 4$ ehk 20 aasta möödumisega nihkuvad raadiosaate eetrisolekud $5 \cdot 5$ ehk 25 päeva võrra varasemaks.

Kui aastal a on raadiosaade eetris 29. jaanuaril, siis aastal $a + 20$ on eelneva põhjal raadiosaade eetris 4. jaanuaril, kusjuures aastatel $a+1$ kuni $a+20$ on raadiosaade eetris 4. ja 28. jaanuari vahel (mainitud kuupäevad kaasaarvatud). Neil aastatel ei jää raadiosaate eelmine ega järgmine eetrisolek jaanuarisse. Sõltuvalt sellest, kas $a + 20$ on liht- või liigaasta, langeb aastal $a + 21$ raadiosaate esimene eetrisolek 3. või 2. jaanuarile. Sellel aastal on raadiosaade jaanuaris ka teist korda eetris. Seega oli või on raadiosaade jälle jaanuaris kaks korda eetris 21 aasta möödudes.

Märkus. Lahenduses on oluline, et aasta a on käesoleval sajandil (või üldisemalt lähiminevikus või -tulevikus). Kaugemate aastate puhul võib mängu tulla gregooriuse kalendri korrektsioon võrreldes juuliuse kalendriga, mille kohaselt jääb aastatel 1700, 1800, 1900, 2100, 2200, 2300 jne 29. veebruar vahele. Nende aastate läheduses võiks juhtuda, et topelt eetrisoleku kuu satub jaanuarile uuesti alles 22 aasta pärast.

3. *(Maksim Ivanov)*

Kirjutises $2024 \cdot AB \cdot CC \cdot BA$ asendatakse sama täht sama numbri ja erinevad tähed erinevate numbritega nii, et tekiks korrektne avaldis, mille väärtus võrdub mingi täisarvu ruuduga. Mitu erinevat väärtust saab olla summal $A + B + C$?

Vastus: 6.

Lahendus. Olgu saadud avaldise väärtus k. Teame, et $2024 = 2^3 \cdot 11 \cdot 23$ ning arv CC avaldub kujul $C \cdot 11$. Täisarvu ruudus on kõik algtegurid paarisastmel. Kuna number C ei saa sisaldada algtegurit 23, siis selleks, et k oleks mingi täisarvu ruut, peab algteguri 23 lisama emb-kumb kahekohalistest arvudest AB ja BA. Eeldame, et see on AB; teine variant on sümmeetriline. Kahekohalised 23-ga jaguvad arvud on 23, 46, 69 ja 92.

- Kui AB on 23, siis BA on 32 ehk 2^5, järelikult $k = 2^8 \cdot 11^2 \cdot 23^2 \cdot C$. Siis k on mingi täisarvu ruut parajasti siis, kui C on mingi täisarvu ruut. Selleks on kolm võimalust: $C = 1$, $C = 4$ ja $C = 9$. Summa $A + B + C$ on vastavalt 6, 9 ja 14.
- Kui AB on 46, siis BA on 64 ehk 2^6, järelikult $k = 2^{10} \cdot 11^2 \cdot 23^2 \cdot C$. Jällegi on k mingi täisarvu ruut parajasti siis, kui C on mingi täisarvu ruut. Selleks on kaks võimalust: $C = 1$ ja $C = 9$ (number 4 on juba kasutusel). Summa $A + B + C$ on vastavalt 11 ja 19.
- Kui AB on 69, siis BA on 96 ehk $2^5 \cdot 3$, järelikult $k = 2^8 \cdot 3^2 \cdot 11^2 \cdot 23^2 \cdot C$. Jällegi on k mingi täisarvu ruut parajasti siis, kui C on mingi täisarvu ruut. Selleks on kaks võimalust: $C = 1$ ja $C = 4$ (number 9 on juba kasutusel). Summa $A + B + C$ on vastavalt 16 ja 19.

- Kui AB on 92, siis BA on 29, järelikult $k = 2^5 \cdot 11^2 \cdot 23^2 \cdot 29 \cdot C$. Selline k ei saa olla täisarvu ruut, sest number C ei too sisse algarvu 29.

Summa $A+B+C$ saab kokkuvõttes omandada 6 erinevat väärtust (19 esineb kahes juhus).

4. *(Urve Kangro)*

Lahenda võrrandisüsteem

$$\begin{cases} x + y = z, \\ x^2 + y^2 = 4z, \\ x^3 + y^3 = 18z. \end{cases}$$

Vastus: $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ või $x = 3+\sqrt{3}$, $y = 3-\sqrt{3}$, $z = 6$ või $x = 3-\sqrt{3}$, $y = 3+\sqrt{3}$, $z = 6$.

Lahendus 1. Kui $x \neq 0$ või $y \neq 0$, siis teise võrrandi vasak pool on positiivne. Paremast poolest saame, et ka z on positiivne. Seega $z = 0$ saab kehtida vaid juhul $x = y = 0$. Kontroll näitab, et $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ rahuldab ka esimest ja kolmandat võrrandit. Eeldame järgnevas, et $z \neq 0$.

Tõstes esimese võrrandi pooled ruutu, saame $x^2 + 2xy + y^2 = z^2$. Lahutades sellest teise võrrandi vastavad pooled, saame

$$2xy = z^2 - 4z. \tag{1}$$

Tõstes aga esimese võrrandi pooled kuupi, saame $x^3+3x^2y+3xy^2+y^3 = z^3$. Lahutades sellest kolmanda võrrandi vastavad pooled, saame pärast mõlemas pooles tegurdamist

$$3xy(x + y) = z\left(z^2 - 18\right). \tag{2}$$

Kuna $z \neq 0$ ja esimese võrrandi põhjal $x + y = z$, siis taandub võrrand (2) kujule

$$3xy = z^2 - 18. \tag{3}$$

Korrutades võrrandite (1) ja (3) pooled vastavalt 3-ga ja 2-ga, saame kaks võrrandit, mille vasakud pooled on võrdselt $6xy$. Seega on võrdsed ka paremad pooled ehk $3\left(z^2 - 4z\right) = 2\left(z^2 - 18\right)$. Pärast sulgude avamist ja sarnaste liikmete koondamist saame sellest $z^2 - 12z + 36 = 0$ ehk $(z-6)^2 = 0$, kust ainsa võimalusena $z = 6$.

Võrrandist (1) saame nüüd $2xy = 36 - 24 = 12$, kust järeldub $xy = 6$. Antud süsteemi esimesest võrrandist aga saame $x+y = 6$. Neist kahest seosest kokku saame x suhtes ruutvõrrandi $x^2-6x+6 = 0$, kust $x = 3\pm\sqrt{9-6} = 3\pm\sqrt{3}$. Vastavalt $y = 3\mp\sqrt{3}$. Lahenduse loogika tagab, et $(x, y, z) = (3+\sqrt{3}, 3-\sqrt{3}, 6)$ ja $(x, y, z) = (3-\sqrt{3}, 3+\sqrt{3}, 6)$ rahuldavad algse süsteemi kõiki võrrandeid.

Lahendus 2. Nagu lahenduses 1 näitame, et $z = 0$ saab kehtida vaid juhul $x = y = 0$ ning leiame lahendi $(x, y, z) = (0, 0, 0)$. Nagu lahenduses 1 tuletame ka võrrandi (1). Edasi kasutame valemit $x^3 + y^3 = (x + y)\left(x^2 - xy + y^2\right)$. Asendades siin $x + y$, $x^2 + y^2$ ja $x^3 + y^3$ vastavalt algse süsteemi esimesest, teisest ja kolmandast võrrandist ning xy võrrandist (1), saame

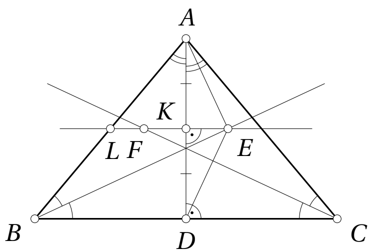
$$18z = z\left(4z - \frac{z^2 - 4z}{2}\right).$$

Jagades mõlemad pooled suurusega z (kuna juht $z = 0$ on eelnevalt läbi vaadatud) ja lihtsustades, saame siit $z^2 - 12z + 36 = 0$ ehk $(z - 6)^2 = 0$, kust ainsa võimalusena $z = 6$. Edasi jätkame nagu lahenduses 1.

5. *(Aleksei Ganyukov)*

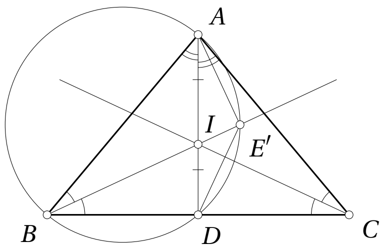
On antud võrdhaarne kolmnurk ABC tipunurgaga tipu A juures. Tipunurga poolitaja lõikab külge BC punktis D. Alusnurga poolitaja lõikab lõigu AD keskristsirget punktis E. Tõesta, et kolmnurga kolmas nurgapoolitaja on risti sirgega DE.

Lahendus 1. Kuna võrdhaarse kolmnurga tipunurgast tõmmatud nurgapoolitaja on ühtlasi kõrgus, siis $BD \perp AD$. Üldisust kitsendamata eeldame, et punkt E asub tipu B juures oleva alusnurga poolitajal. Olgu F kolmnurga ABC tipu C juures oleva alusnurga poolitaja lõikepunkt lõigu AD keskristsirgega ning olgu K ja L sirge EF lõikepunktid vastavalt sirgetega AD ja AB (joonis 1). Tähistame $\angle ACB = \angle ABC = \gamma$. Kuna $LK \perp AD$ ja $BD \perp AD$, siis $LK \parallel BD$. Põiknurkadest saame seega $\angle LEB = \angle CBE = \frac{\gamma}{2}$, kaasnurkadest aga $\angle ALE = \angle ABC = \gamma$. Kuna ka $\angle EBL = \frac{\gamma}{2}$, siis $|LE| = |LB|$. Samas sellest, et $|AK| = |KD|$ ja $LK \parallel BD$, saame $|LA| = |LB|$. Seega $|LE| = |LA|$. Võrdhaarsest kolmnurgast ALE saame järelikult $\angle AEL = \angle EAL = \frac{180° - \gamma}{2} = 90° - \frac{\gamma}{2}$. Kolmnurgad EKA ja EKD aga on võrdsed tunnuse KNK põhjal. Järelikult

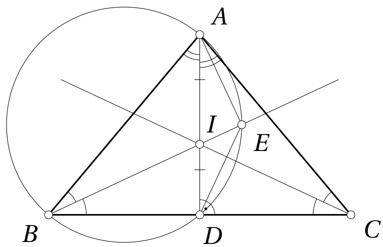


Joonis 1

$\angle DEK = \angle AEK = \angle AEL = 90^\circ - \dfrac{\gamma}{2}$, ning kuna $EK \parallel CD$, siis ka $\angle CDE = \angle DEK = 90^\circ - \dfrac{\gamma}{2}$. Et $\angle BCF = \dfrac{\gamma}{2}$, siis peabki olema $CF \perp DE$.



Joonis 2

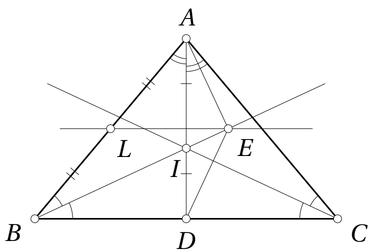


Joonis 3

Lahendus 2. Kuna võrdhaarse kolmnurga tipunurgast tõmmatud nurgapoolitaja on ühtlasi kõrgus, siis $BD \perp AD$. Üldisust kitsendamata eeldame, et punkt E asub tipu B juures oleva alusnurga poolitajal. Olgu I kolmnurga ABC nurgapoolitajate lõikepunkt ning E' kolmnurga ABD ümberringjoone teine lõikepunkt sirgega BI (joonis 2). Et $E'A$ ja $E'D$ on selle ümberringjoone kaared ning $\angle ABE' = \angle DBE'$ on vastavad piirdenurgad, siis $|E'A| = |E'D|$. Seega E' asub lõigu AD keskristsirgel. Järelikult $E' = E$ ehk punkt E asub kolmnurga ABD ümberringjoonel (joonis 3).

Veendume, et $\angle EDI + \angle CID = 90^\circ$, kust tuleneks nõutud ristseis $CI \perp DE$. Olgu $\angle ACB = \angle ABC = \gamma$. Eelneva põhjal $\angle EDI = \angle EDA = \angle EBA = \dfrac{\gamma}{2}$, samas kui $\angle CID = 180^\circ - \angle CDI - \angle DCI = 180^\circ - 90^\circ - \dfrac{\gamma}{2} = 90^\circ - \dfrac{\gamma}{2}$. Seega saamegi $\angle EDI + \angle CID = 90^\circ$, mistõttu sirged CI ja DE on risti.

Lahendus 3. Kuna võrdhaarse kolmnurga tipunurgast tõmmatud nurgapoolitaja on ühtlasi kõrgus, siis $BD \perp AD$. Seega lõigu AD keskristsirge on paralleelne alusega BC, millest nähtub, et see sirge sisaldab kolmnurga ABC kesklõigu ja poolitab haarad. Üldisust kitsendamata eeldame, et punkt E



Joonis 4

asub tipu B juures oleva alusnurga poolitajal; olgu L haara AB keskpunkt ja I kolmnurga ABC nurgapoolitajate lõikepunkt (joonis 4). Põiknurkadest saame $\angle LEB = \angle CBE = \angle LBE$, seega kolmnurk LBE on võrdhaarne ning $|LE| = |LB| = |LA|$. Seega on L kolmnurga ABE ümberringjoone keskpunkt, kusjuures AB on selle diameeter. Kuna ADB on täisnurk, mis toetub sellele diameetrile, siis ka punkt D asub sellel ringjoonel ehk punkt E asub kolmnurga ABD ümberringjoonel. Edasi jätkame nagu lahenduses 2.

Märkus. Kirjutis $|l|$ tähistab lõigu l pikkust.

6. *(Härmel Nestra)*

Firmal on mingi hulk veebilehti, millest mõned lehed viitavad teistele sama firma lehtedele. Nimekirja, milles esinevad kõigi nende veebilehtede nimed igaüks ühe korra, nimetame *loomulikuks*, kui alati, kui mingi leht viitab teisele, on esimene leht nimekirjas teisest eespool.

Firma veebimeistril on koostatud mingi loomulik veebilehtede nimekiri. Seejärel aga järjestab ta nimekirjas veebilehed ümber, pannes algusse mingis järjestuses kõik lehed, millele ükski teine leht ei viita, nende järele mingis järjestuses kõik lehed, millele viitab algse nimekirja esimene leht, nende järele mingis järjestuses kõik lehed, millele viitab algse nimekirja teine leht ja mis pole veel kirjas, jne.

a) On teada, et igale veebilehele viitab ülimalt üks veebileht. Kas võib kindlalt väita, et ka uus nimekiri on loomulik?

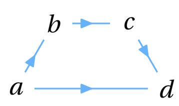
b) Pole teada, kas igale veebilehele viitab ülimalt üks veebileht. Kas võib kindlalt väita, et vähemalt üks võimalik uus nimekiri on loomulik?

Vastus: a) jah; b) ei.

Lahendus.

a) Vaatleme suvalist kaht veebilehte a ja b, millest esimene viitab teisele. Eelduse põhjal ei viita lehele b ükski teine leht. Seega leht b asub uues järjestuses rühmas, mis koosneb lehtedest, millele viitab leht a. Vaatame kahte juhtu.

- Kui lehele a viitab mingi leht c, siis leht a asub uues järjestuses rühmas, mis koosneb tippudest, millele viitab leht c. Algses järjestuses on aga leht c loomulikkuse põhjal enne lehte a. Seega uues järjestuses on leht a enne lehte b.



Joonis 5

- Kui lehele a ei viita ükski leht, siis asub leht a uues järjestuses esimeses rühmas. Seega leht a on enne lehte b.

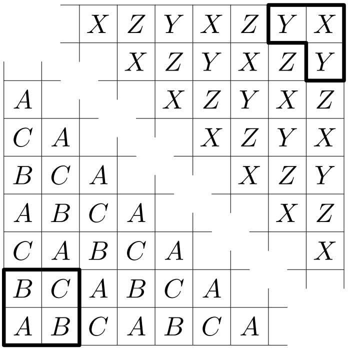
Kuna igal juhul on leht a uues järjestuses enne lehte b, siis on uus järjestus loomulik.

b) Olgu firmal 4 veebilehte a, b, c, d viitamistega $a \to b$, $b \to c$, $c \to d$ ja $a \to d$ (joonis 5). Siis järjestus a, b, c, d on loomulik. Sellest järjestusest on võimalik saada kaks uut järjestust a, b, d, c ja a, d, b, c, mis aga kumbki pole loomulik, sest viimane leht c viitab eespool olevale lehele d.

Lahendused

1. *(Härmel Nestra)*
Kas leidub naturaalarv n, mille korral arv $2^n + n^3$ jagub 88-ga?
Vastus: jah.
Lahendus 1. Juhul $n = 10$ saame $2^n + n^3 = 1024 + 1000 = 2024 = 88 \cdot 23$, millest tulenevalt arv $2^{10} + 10^3$ jagub 88-ga.
Lahendus 2. Vaatleme eraldi 11-ga ja 8-ga jaguvust. Fermat' väikse teoreemi põhjal $2^{10} \equiv 1 \pmod{11}$, samas $10^3 \equiv (-1)^3 = -1 \pmod{11}$. Kokkuvõttes $2^{10} + 10^3 \equiv 1 - 1 = 0 \pmod{11}$ ehk arv $2^{10} + 10^3$ jagub 11-ga. Kuna nii 2^{10} kui ka 10^3 jaguvad arvuga 2^3 ehk 8, siis arv $2^{10} + 10^3$ jagub ka 8-ga. Siit järeldub, et arv $2^{10} + 10^3$ jagub 88-ga, sest 11 ja 8 on ühistegurita.

2. *(Birgit Veldi)*
Olgu n naturaalarv, $n \geqslant 3$. Ruudustikul mõõtmetega $n \times n$ paikneb kolm nähtamatut koletist: ülemisel parempoolsel nurgaruudul üks ja kummalgi naaberruudul samuti üks. Vastasnurga juures olevale alale mõõtmetega 2×2 paigutatakse mingi arv konni; seejuures võib ühelt ühikruudult ka mitu konna alustada.
Konnad ja koletised hakkavad kordamööda tegema järgnevaid käike. Konnade käigul sooritab iga konn ühe kahest ratsuhüppest, mis on suunaga üles paremale (st asukohale rakendub vektor $(1;2)$ või $(2;1)$). Koletiste käigul sooritavad kõik koletised kokku kuni 3 ratsukäiku suunaga alla vasakule (st asukohale rakendub vektor $(-1;-2)$ või $(-2;-1)$). Konnad alustavad. Kui koletis ja konn satuvad peale kelle tahes käiku ühele ja samale ruudule, siis sööb koletis konna ära.
Milline on vähim arv konni, mille saab algul ruudustikule paigutada nii, et vähemalt üks konnadest jõuaks kindlasti elusana kohta, kus tema mõlemad järgmised hüppevõimalused lähevad ruudustiku piirest välja?
Vastus: 1.
Lahendus. Värvime ruudustiku laskuvate diagonaalide kaupa 3 värviga (joonisel 6 on värvid tähistatud tähtedega A, B, C ja X, Y, Z, mis on ikka samad kolm värvi, aga algusvärv sõltub ruudustiku mõõtmetest). Märkame, et nii konnad kui ka koletised saavad hüpata ainult sama värvi ruutudele, millelt nad alustasid. Kuna koletised alustavad kaht värvi ruutudelt, kuid 2×2 alal on kõiki kolme värvi ruute, siis piisab, kui paigutada üks konn seda värvi ruudule, millist värvi ruudul ühtki koletist pole. Ükskõik, kuidas temaga ruudustiku servani hüpata, koletised teda kätte ei saa.



Joonis 6

3. *(Urve Kangro)*

Iga positiivse täisarvu n korral tähistab $n!$ korrutist $1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$. Leia kõik positiivsete täisarvude kolmikud (x, y, z), mille korral

$$3 \cdot x! + 4 \cdot y! = 5 \cdot z!.$$

Vastus: $(2, 1, 2)$ ja $(2, 3, 3)$.

Lahendus 1. Vaatleme juhtu $x \leqslant y$. Siis $4 \cdot y! < 3 \cdot x! + 4 \cdot y! \leqslant 7 \cdot y!$, seega $\frac{4}{5} \cdot y! < z! < \frac{7}{5} \cdot y!$. Edasi kasutame asjaolu, et erinevate arvude faktoriaalid erinevad teineteisest mingi 1-st suurem täisarv ehk vähemalt 2 korda. Seega kui oleks $z < y$, siis peaks olema $z! \leqslant \frac{1}{2} \cdot y! < \frac{4}{5} \cdot y! < z!$, vastuolu. Kui aga oleks $z > y$, siis peaks olema $z! \geqslant 2 \cdot y! > \frac{7}{5} \cdot y! > z!$, vastuolu. Kokkuvõttes saame ainsa võimalusena $z = y$. Asendades selle algsesse võrrandisse, saame sarnaste liikmete koondamise järel $3 \cdot x! = y!$. Siit $y > x$, kusjuures arvude $x+1, x+2, \ldots, y$ korrutis peab olema 3. See on võimalik ainult juhul $y = x + 1 = 3$. Siit saame lahendi $(x, y, z) = (2, 3, 3)$.

Vaatleme nüüd juhtu $x > y$. Siis $3 \cdot x! < 3 \cdot x! + 4 \cdot y! < 7 \cdot x!$, seega $\frac{3}{5} \cdot x! < z! < \frac{7}{5} \cdot x!$. Sarnaselt eelmise juhuga annavad nii võrratus $z < x$ kui ka võrratus $z > x$ vastuolu, seega $z = x$. Asendades selle algsesse võrrandisse, saame sarnaste liikmete koondamise järel $4 \cdot y! = 2 \cdot x!$ ehk $2 \cdot y! = x!$. Siit $x > y$, kusjuures arvude $y+1, y+2, \ldots, x$ korrutis peab olema 2. See on võimalik ainult juhul $x = y + 1 = 2$. Siit saame lahendi $(x, y, z) = (2, 1, 2)$.

Lahendus 2. Märkame, et $x \leqslant z$ ja $y \leqslant z$, sest kui $x \geqslant z + 1$ või $y \geqslant z + 1$, siis

$$5 \cdot z! = 3 \cdot x! + 4 \cdot y! \geqslant 3 \cdot \max(x!, y!) \geqslant 3 \cdot (z+1)!,$$

millest arvuga $z!$ jagamisel saame $5 \geqslant 3(z+1)$, kust $z \leqslant \frac{2}{3} < 1$, vastuolu.

Edasi vaatame eraldi kolme varianti.

- Kui $x = z$, siis võrrand omandab kuju $3 \cdot z! + 4 \cdot y! = 5 \cdot z!$ ehk $4 \cdot y! = 2 \cdot z!$, kust $2 \cdot y! = z!$. Seega $2 = (y+1) \cdot \ldots \cdot z$. Kuna 2 on algarv, siis on see võimalik vaid juhul $y = 1$, $z = 2$. Siit saame lahendi $(2, 1, 2)$.
- Kui $y = z$, siis võrrand omandab kuju $3 \cdot x! + 4 \cdot z! = 5 \cdot z!$ ehk $3 \cdot x! = z!$. Seega $3 = (x+1) \cdot \ldots \cdot z$. Kuna 3 on algarv, siis on see võimalik vaid juhul $x = 2$, $z = 3$. Siit saame lahendi $(2, 3, 3)$.
- Kui $x \leqslant z - 1$ ja $y \leqslant z - 1$, siis

$$5 \cdot z! = 3 \cdot x! + 4 \cdot y! \leqslant 3 \cdot (z-1)! + 4 \cdot (z-1)! = 7 \cdot (z-1)!,$$

  kust suurusega $(z-1)!$ jagamisel saame $5z \leqslant 7$. Seda võrratust rahuldab vaid $z = 1$, mis pole aga eelduste $x \leqslant z-1$ ja $y \leqslant z-1$ valguses võimalik.

Kokkuvõttes on ainsad sobivad kolmikud $(2, 1, 2)$ ja $(2, 3, 3)$.

4. *(Birgit Veldi)*

Teoema tahab minna koos lapsega 75 cm kaugusel elavale naabrile külla. Ta on planeerinud kasutada iga tunni esimest 45 minutit liikumiseks ja ülejäänud 15 minutit puhkamiseks. Järjekorras n-ndal tunnil liiguvad nad edasi $\frac{1}{n^2+1}$ meetrit, kuid puhkamise asemel tõmbab teolaps neid seejärel $\frac{1}{n+1}$ sel tunnil edenetud vahemaast tagasi. Kas nad jõuavad kunagi kohale ja kui jah, siis millal?

Vastus: ei.

Lahendus. Järjekorras n-nda tunni jooksul on teoema ja -laps edenenud $\frac{1}{n^2+1} - \frac{1}{n+1} \cdot \frac{1}{n^2+1}$ ehk $\frac{n}{(n+1)\left(n^2+1\right)}$ meetrit. Muuhulgas esimese tunni lõpuks on nad edenenud $\frac{1}{2 \cdot 2}$ ehk $\frac{1}{4}$ meetrit. Paneme tähele, et

$$\frac{n}{(n+1)\left(n^2+1\right)} < \frac{n}{(n+1)n^2} = \frac{1}{(n+1)n} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}.$$

Seega järjekorras m-nda tunni lõpuks, kus $m \geqslant 2$, on nad edenenud vähem kui

$$\frac{1}{4} + \left(\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{m+1}\right)\right)$$

ehk $\frac{3}{4} - \frac{1}{m+1}$ meetrit, mis on vähem kui 75 sentimeetrit. Seega ei jõua teod naabrini ühegi tunni lõpuks.

Samuti pole võimalik jõuda naabrini olukorras, kus teolaps pole veel tagasi tirimist alustanud. Tõepoolest, 45 minutit pärast algust on läbitud $\frac{1}{2}$ meetrit ning 1 tunni ja 45 minuti järel $\frac{1}{4} + \frac{1}{5}$ meetrit, mis on mõlemad vähem kui 75 sentimeetrit. Kui aga $m \geqslant 2$, siis m tunni ja 45 minuti pärast on läbitud vähem kui $\frac{3}{4} - \frac{1}{m+1} + \frac{1}{(m+1)^2+1}$ meetrit, mis on ikka väiksem kui 75 sentimeetrit, sest $\frac{1}{(m+1)^2+1} < \frac{1}{m+1}$.
Seega teoema ja -laps kohale ei jõua.

5. *(Aleksei Ganyukov)*

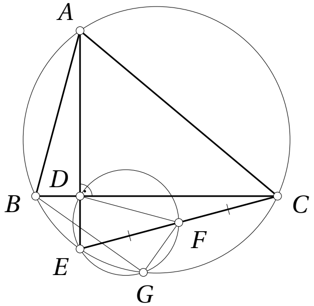
Teravnurkse kolmnurga ABC kõrguse AD pikendus üle punkti D lõikab kolmnurga ABC ümberringjoont punktis E. Lõigu CE keskpunkt on F. Kolmnurkade ABC ja DEF ümberringjooned lõikuvad teistkordselt punktis G, $G \neq E$. Punktist A sirgele FG tõmmatud ristlõigu aluspunkt on P. Tõesta, et lõigud DA ja DP on võrdse pikkusega.

Lahendus 1. Alustuseks näitame, et $\angle BGF = 90^\circ$ (joonis 7). Selleks paneme tähele, et F kui täisnurkse kolmnurga CDE hüpotenuusi keskpunkt on selle kolmnurga ümberringjoone keskpunkt, mistõttu $|FC| = |FD|$. Kasutades seda ja asjaolu, et punktid B, E, G, C asuvad ühel ringjoonel selles järjestuses, saame

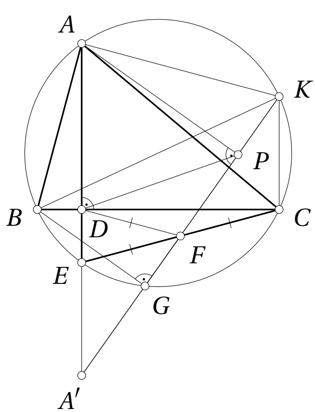
$$\angle EGB = \angle ECB = \angle FCD = \angle FDC.$$

Seega

$$\begin{aligned}\angle BGF &= \angle EGF - \angle EGB = \\ &= 180^\circ - \angle EDF - \angle FDC = \\ &= 180^\circ - \angle EDC = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ.\end{aligned}$$



Joonis 7



Joonis 8

Olgu sirge GF lõikepunkt sirgega AD ja teine lõikepunkt kolmnurga ABC ümberringjoonega vastavalt A' ja K (joonis 8). Kuna $\angle BGK = \angle BGF = 90^\circ$, siis Thalese teoreemi põhjal on BK kolmnurga ABC ümberringjoone diameeter. Thalese teoreemi põhjal saame nüüd ka $\angle BCK = 90^\circ$, mistõttu $CK \parallel AE$. Seega $AKCE$ kui kahe paralleelse küljega kõõlnelinurk on võrdhaarne trapets. Kasutades seda koos faktiga, et $|FD| = |FE|$, saame $\angle EDF = \angle DEF = \angle AEC = \angle EAK$, millest tulenevalt $DF \parallel AK$. Kuna $|FE| = |FC|$, siis kiirteteoreemi põhjal ka $|FA'| = |FK|$. Seega on DF on kolmnurga AKA' kesklõik, mis omakorda tähendab, et D on lõigu AA' keskpunkt. Seega D on täisnurkse kolmnurga APA' ümberringjoone keskpunkt, mis tõestabki vajaliku väite.

Lahendus 2. Olgu A' punkti A peegeldus sirgest BC ning olgu BK kolmnurga ABC ümberringjoone diameeter.

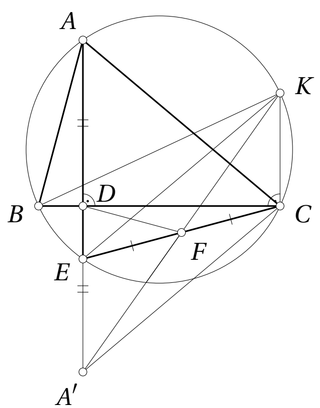
Esiteks näitame, et punkt F asub sirgel $A'K$ (joonis 9). Selleks märkame, et $KC \perp BC$ ning $AD \perp BC$, seega $KC \parallel EA'$. Lisaks sellele

$$\begin{aligned}\angle AEK &= \angle ACK = 90^\circ - \angle ACB,\\ \angle AA'C &= \angle DA'C = \angle DAC = \angle 90^\circ - \angle ACB.\end{aligned}$$

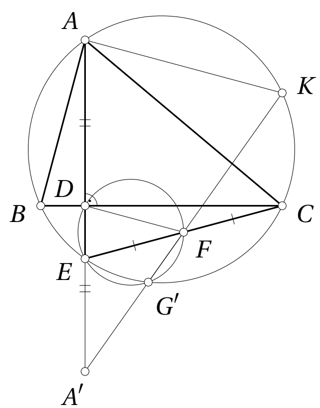
Seega $\angle AEK = \angle AA'C$, mis näitab, et $EK \parallel A'C$. Kokkuvõttes on $A'CKE$ rööpkülik. Et rööpküliku diagonaalide lõikepunkt poolitab diagonaalid ja F on diagonaali CE keskpunkt, on F ka diagonaali $A'K$ keskpunkt ning A', K, F asuvad ühel sirgel.

Teiseks näitame, et ka punkt G asub sirgel $A'K$. Selleks olgu G' sirge $A'K$ teine lõikepunkt kolmnurga ABC ümberringjoonega (joonis 10). Märkame, et DF on kolmnurga $A'AK$ kesklõik, mistõttu $DF \parallel AK$. Seega

$$\angle EDF = \angle EAK = 180^\circ - \angle EG'K = 180^\circ - \angle EG'F,$$



Joonis 9



Joonis 10

mistõttu punkt G' asub kolmnurga DEF ümberringjoonel ehk $G' = G$.

Kokkuvõttes oleme saanud, et punkt A' asub sirgel GF, kus asub ka punkt P. Järelikult APA' on täisnurkne kolmnurk, mille ümberringjoone keskpunkt asub hüpotenuusi AA' keskpunktis D. Seega DA ja DP on võrdse pikkusega lõigud.

Lahendus 3. Nagu lahenduses 1 näitame, et $|FC| = |FD|$ ja $BG \perp GF$. Kuna ka $AP \perp GF$ (joonis 11), siis $AP \parallel BG$. Sellest nähtub, et

$$\angle GAP = \angle AGB = \angle ACB = \angle ACD,$$

millest tulenevalt on täisnurksed kolmnurgad GAP ja ACD sarnased tunnuse NN põhjal. Sellest järeldub, et

$$\frac{|GA|}{|AC|} = \frac{|PG|}{|DA|}. \tag{4}$$

Teisalt märkame, et

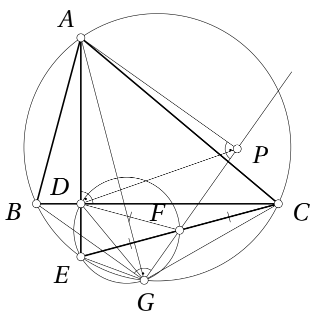
$$\angle GDF = \angle GEF = \angle GEC = \angle GAC,$$
$$\angle FGD = \angle FED = \angle CEA = \angle CGA,$$

millest tulenevalt on kolmnurgad GDF ja GAC sarnased tunnuse NN põhjal. Seetõttu $\dfrac{|GD|}{|GA|} = \dfrac{|DF|}{|AC|}$ ehk

$$\frac{|GA|}{|AC|} = \frac{|GD|}{|DF|}. \tag{5}$$

Võrdustest (4) ja (5) järeldub $\dfrac{|PG|}{|DA|} = \dfrac{|GD|}{|DF|}$ ehk

$$\frac{|GD|}{|PG|} = \frac{|DF|}{|DA|}. \tag{6}$$



Joonis 11

Ühise tipuga G sarnaste kolmnurkade GDF ja GAC vahel aga eksisteerib pöördhomoteetia, mistõttu $\angle AGD = \angle CGF$. Koos samast sarnasusest tuleneva võrdusega $\frac{|GD|}{|GA|} = \frac{|GF|}{|GC|}$ näitab see, et ka kolmnurgad AGD ja CGF on sarnased, mistõttu

$$\frac{|GC|}{|GA|} = \frac{|FC|}{|DA|}. \tag{7}$$

Kuna $|DF| = |FC|$, siis võrduste (6) ja (7) paremad pooled on võrdsed. Järelikult on võrdsed ka vasakud pooled, mis tähendab, et $\frac{|GD|}{|PG|} = \frac{|GC|}{|GA|}$. Kuna $\angle PGD = \angle FGD = \angle CGA$, siis järeldub sellest kolmnurkade PGD ja AGC sarnasus. Sellest tulenevalt

$$\frac{|GA|}{|AC|} = \frac{|PG|}{|DP|}. \tag{8}$$

Võrduste (4) ja (8) vasakud pooled on võrdsed, mistõttu on võrdsed ka paremad pooled. Järelikult $|DA| = |DP|$.

Märkus. Kirjutis $|l|$ tähistab lõigu l pikkust.

6. *(Härmel Nestra)*

Leia kõik täisarvud n, mille korral $n > 1$ ja leidub arvude $0, 1, \ldots, n-1$ selline ümberjärjestus $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$, et arvude $1, \ldots, n-1$ seas ei leidu selliseid indekseid i ja j, et $i \neq j$ ja $\left(a_i - a_{i-1}\right) - \left(a_j - a_{j-1}\right)$ jagub arvuga n.

Vastus: kõik positiivsed paarisarvud.

Lahendus. Olgu $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ arvude $0, 1, \ldots, n-1$ selline ümberjärjestus, mis rahuldab toodud tingimust. Kuna ükski vahe $a_i - a_{i-1}$ ei jagu ise arvuga n, siis peavad vahed $a_i - a_{i-1}$ andma jagamisel arvuga n parajasti kõik jäägid $1, \ldots, n-1$ mingis järjestuses. Järelikult

$$\begin{aligned} a_{n-1} &= a_0 + (a_1 - a_0) + \ldots + (a_{n-1} - a_{n-2}) \equiv \\ &\equiv a_0 + (1 + \ldots + (n-1)) \pmod{n}, \end{aligned} \tag{9}$$

kus kirjutisega $x \equiv y \pmod{n}$ märgitakse, et vahe $x - y$ jagub arvuga n. Paaritu n korral saab liidetavad $1, \ldots, n-1$ jaotada paaridesse, mille liikmete summa on n. Seega summa $1 + \ldots + (n-1)$ jagub arvuga n, mistõttu seos (9) lihtsustub kujule $a_{n-1} \equiv a_0 \pmod{n}$. See aga pole võimalik, sest arvude $0, 1, \ldots, n-1$ seas pole kahte sellist, mille vahe jaguks arvuga n. Vastuolu näitab, et paaritu n korral arvude $0, 1, \ldots, n-1$ nõutud ümberjärjestust ei leidu.

Näitame nüüd, et iga positiivse paarisarvu n korral nõutud ümberjärjestus leidub. Olgu $n = 2m$, kus m on positiivne täisarv. Konstrueerime arvude $0, 1, \ldots, 2m-1$ ümberjärjestuse $a_0, a_1, \ldots, a_{2m-1}$, lisades järjendisse igal sammul vaheldumisi vähima ja suurima veel kasutamata arvu, st tulemus on kujul

$$0, 2m-1, 1, 2m-2, \ldots, m-1, m.$$

Siis vahed $a_i - a_{i-1}$, kus $i = 1, 3, \ldots, 2m-1$, on parajasti paaritud arvud $2m-1, 2m-3, \ldots, 1$, ning vahed $a_i - a_{i-1}$, kus $i = 2, 4, \ldots, 2m-2$, on parajasti paarisarvud $-(2m-2), -(2m-4), \ldots, -2$. Liites viimase rühma kõigile vahedele $2m$, saame $2, 4, \ldots, 2m-2$. Seega annavad vahed $a_i - a_{i-1}$, kus $i = 1, \ldots, 2m-1$, parajasti kõik positiivsed jäägid jagamisel arvuga $2m$, mistõttu nende vahede sees ei leidu kaht sellist, mille vahe jaguks arvuga $2m$.