

# Algebra eliitriühm - Polünoomid (ja kompleksarvud)

Artur Avameri

20.12.2024

## 1 Teooria

Räägime jooksvalt. Igas plokis peitub ülesannete taga peitub mingi idee, millel ma peatuda tahaks.

## 2 Ülesanded

**Ülesanne 1.** Leia kõik reaalarvuliste kordajatega polünoomid  $p(x)$ , mille korral

$$p((x+1)^3) = (p(x)+1)^3$$

ja  $p(0) = 0$ .

**Ülesanne 2.** Leia kolm erinevat reaalarvuliste kordajatega polünoomi  $P(x)$ , mis rahuldavad iga reaalarvu  $x$  korral tingimust  $P(x^2+1) = P(x)^2+1$ .

---

**Ülesanne 3.** Tõesta, et polünoomidel  $x^5+x^4+1$  ja  $x^4+x^2+1$  leiduvad mittetriviaalsed tegurdused.

**Ülesanne 4.** Tõesta, et kui  $P$  ja  $Q$  on reaalarvuliste kordajatega polünoomid ja  $P(x) = Q(x)$  kõigi reaalarvude  $x$  korral, siis  $P(z) = Q(z)$  ka kõigi kompleksarvude  $z$  korral.

**Ülesanne 5.** • Antud on polünoom  $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$ . Avalda avaldise  $a_0 + a_k + a_{2k} + a_{3k} + \dots$  väärtus võimalikult lihtsalt.

• Veeretame kuuetaolist täringut 1000 korda ning liidame saadud tulemused kokku. Mis on tõenäosus, et saadud summa jagub a) seitsmega, b) kuuega?

• Mis on avaldise  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$  väärtus? Avaldise  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n}$  väärtus? Avaldise  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$  väärtus?

**Ülesanne 6.** Leia kõik reaalarvuliste kordajatega polünoomid  $P(x)$ , mille korral võrdus

$$P(x)P(x+1) = P(x^2)$$

kehtib kõigi reaalarvude  $x$  jaoks.

**Ülesanne 7.** Olgu  $k > 1$  fikseeritud naturaalarv. Leia kõik reaalarvuliste kordajatega polünoomid  $P(x)$ , mis rahuldavad tingimust  $P(x^k) = P(x)^k$  iga reaalarvu  $x$  korral.

**Ülesanne 8.** Leia kõik reaalarvuliste kordajatega polünoomid  $f(x)$ , mille korral

$$f(x)f(2x^2) = f(2x^3+x)$$

kehtib kõigi reaalarvude  $x$  korral.

---

**Ülesanne 9.** Tee kindlaks, kas leiduvad mittekonstantsed reaalarvuliste kordajatega polünoomid  $P(x)$  ja  $Q(x)$  nii, et

$$P(x)^{10} + P(x)^9 = Q(x)^{21} + Q(x)^{20}$$

**Ülesanne 10.** Milliste reaalarvuliste kordajatega polünoomide  $p$  jaoks leidub reaalarvuliste kordajatega polünoom  $q$  nii, et võrdus

$$p(p(x)) - x = (p(x) - x)^2 q(x)$$

kehtib iga reaalarvu  $x$  jaoks?

---

**Ülesanne 11.** Leia kõik sellised reaalarvuliste kordajatega polünoomid  $P(x)$ , et

$$(x - 2010)P(x + 67) = xP(x)$$

iga täisarvu  $x$  korral.

**Ülesanne 12.** Olgu  $F, G, H$  reaalarvuliste kordajatega ülimalt  $2n + 1$  astme polünoomid, mis rahuldavad järgmisi tingimusi:

1. Iga reaalarvu  $x$  korral  $F(x) \leq G(x) \leq H(x)$ .
2. Leiduvad paarikaupa erinevad reaalarvud  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , nii et  $F(x_i) = H(x_i)$  iga  $i = 1, 2, \dots, n$  korral.
3. Leidub arvudest  $x_1, x_2, \dots, x_n$  erinev reaalarv  $x_0$ , nii et  $F(x_0) + H(x_0) = 2G(x_0)$ .

Tõesta, et võrdus  $F(x) + H(x) = 2G(x)$  kehtib iga reaalarvu  $x$  korral.

**Ülesanne 13.** Olgu  $n > 1$  täisarv. Leia kõik mittekonstantsed reaalarvulised polünoomid  $P(x)$ , mis iga reaalarvu  $x$  korral rahuldavad võrdust

$$P(x)P(x^2)P(x^3) \cdots P(x^n) = P\left(x^{\frac{n(n+1)}{2}}\right).$$