

# Algebra õppesessioon

## Võrdused, võrratused ja võrrandid

Andres Alumets

20. detsember 2024

### 1 Võrratused

Võrratuste teisendamise reeglid:

- Võrratuste mõlemale poolele võib liita sama avaldise.
- Võrratuse mõlemat poolt võib korrutada sama arvuga. Kui see arv on negatiivne, siis võrratuse märk muutub vastupidiseks. Ettevaatlik tuleb olla avaldisega korrutamisel. Peab olema teadlik mis märgiga avaldise väärtus on ja kumba pidi märk läheb.
- Samapidi võrratusemärgiga võrratusi võib liita aga mitte lahutada.
- Kui  $A \leq B$  ja  $B \leq C$ , siis  $A \leq C$
- Millegi ruut on alati mittenegatiivne.

Tõestada järgmised võrratused ja otsustada millal kehtib võrdus.

**Ülesanne 1.**

$$x^2 + y^2 \geq 2xy$$

**Ülesanne 2.**

$$x + \frac{1}{x} \geq 2$$

, kui  $x > 0$ .

**Ülesanne 3.**

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + ac + bc$$

**Ülesanne 4.**

$$(a + b)(b + c)(c + a) \geq 8abc$$

, kui  $a, b, c \geq 0$

**Ülesanne 5** (Lõppvoor 2024 10.klass). *Kas leidub täisarv  $a$ , mille korral:*

$$\frac{1}{\sqrt{2024}} < \frac{1}{\sqrt{a+1}} + \frac{1}{\sqrt{a+2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{a+2023}} < \frac{1}{\sqrt{2023}}$$

**Ülesanne 6** (Sügisene lahtine 2022 noorem rühm). *Leia avaldise  $\frac{(x^2+1)(4y^2+1)(9z^2+1)}{6xyz}$  vähim võimalik väärtus kui muutujate  $x, y, z$  väärtused on positiivsed arvud (mitte tingimata täisarvud).*

## 2 Võrrandisüsteemid

**Ülesanne 7** (Piirkonnavor 2018 10.klass). *Leia võrrandisüsteemi*

$$\begin{cases} x^2 + y - 2 = 0 \\ y^2 + x - 2 = 0 \end{cases}$$

*kõik reaalarvulised lahendid.*

**Ülesanne 8** (Talvine lahtine 2022 Noorem). *Leia kõik algarvunelikud  $(p, q, r, s)$ , mis rahuldavad võrrandisüsteemi*

$$\begin{cases} 6p + 5q + 5r + 3s = 130 \\ 3p + 3q + 5r + 6s = 130 \end{cases}$$

**Ülesanne 9** (Talvine lahtine 2022 noorem). *Leia võrrandisüsteemi*

$$\begin{cases} x + y = z^2 \\ y + z = x^2 \\ z + x = y^2 \end{cases}$$

*kõik lahendid. Arvesta ka võimalusega, et muutujate väärtused pole täisarvud.*

**Ülesanne 10** (Lõppvoor 2023 11. klass). *Kas leiduvad sellised positiivsed reaalarvud  $a$  ja  $b$ , mis rahuldavad võrratuste süsteemi*

$$\begin{cases} \sqrt{119}a + \sqrt{17}b \leq 2ab \\ a^2 + b^2 \leq 2\sqrt{2023} \end{cases}$$

*kõik lahendid. Arvesta ka võimalusega, et muutujate väärtused pole täisarvud.*

**Ülesanne 11** (Lõppvoor 2022 11.klass). *Leia kõik reaalarvukolmikud, mis rahuldavad võrrandisüsteemi:*

$$\begin{cases} \frac{x}{y} + \frac{y}{z} + xy = 3 \\ \frac{y}{z} + \frac{z}{x} + yz = 3 \\ \frac{z}{x} + \frac{x}{y} + zx = 3 \end{cases}$$