Matemaatika õppesessioon
Algebra vanem rühm – Võrratused

Richard Luhtaru (richard.luhtaru@gmail.com)

20. detsember 2024

1 Küsitlus

Soojendus 1. Täida ära `tinyurl.com/oppesess2024` (1-2 minutit).

Lehelt `math.olympiaadid.ut.ee` minnes *Õppematerjalid* leiab Indrek Zolki õppematerjalid nii funktsionaalvõrrandite kui võrratuste kohta, mis on väga kasulik nii teooriaga tutvumiseks kui ülesannete lahendamiseks.

2 Teooria

Lihtsamate võrratuste tõestamiseks piisab tihti kas suurusanalüüsist või liikmete ümbertõstmisest. Raskemate võrratuste tõestamiseks tulevad aga abiks erinevad standardvõrratused. Üks levinud trikk on liikmete tegurdamine ja järgnev lihtne (kuid võimas!) omadus:

Omadus 1. Reaalarvu ruut on mittenegatiivne.

Seda omadust kasutades on võimalik lihtsalt tõestada järgnev fakt:

Soojendus 2. Tõesta, et iga kahe reaalarvu a ja b korral $a^2 + b^2 \geqslant 2ab$.

Märkus. Kui a ja b on positiivsed, siis saab analoogselt tõestada $a + b \geqslant 2\sqrt{ab}$, mis on AK-GK võrratus kahe muutuja jaoks.

2.1 Astmekeskmiste vahelised võrratused

Kõige olulisem võrratus, millest piisab enamike ülesannete lahendamiseks:

Teoreem 1 (Aritmeetilise keskmise (AK) ja geomeetrilise keskmise (GK) vaheline võrratus)**.** Olgu $a_1, \dots, a_n$ positiivsed reaalarvud. Siis

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}.$$

kus võrdus kehtib parajasti siis kui $a_1 = \cdots = a_n$.

Mõnikord võib kasuks tulla selle võrratuse üldisem kuju:

Teoreem 2 (Kaalutud AK-GK võrratus)**.** Olgu $a_1, \dots, a_n$ positiivsed reaalarvud ja $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ mittenegatiivsed reaalarvud, nii et $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 1$. Siis

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \cdots + \lambda_n a_n \geqslant a_1^{\lambda_1} a_2^{\lambda_2} \cdots a_n^{\lambda_n}.$$

Tavaline AK-GK võrratus on kaalutud võrratuse erijuht ($\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = \frac{1}{n}$).

Samuti tasub teada, et AK-GK võrratus on üks osa suuremast võrratuste ahelast, kus RK on ruutkeskmine ja HK on harmooniline keskmine:

Teoreem 3 (max-RK-AK-GK-HK-min võrratus)**.** Olgu $a_1, \dots, a_n$ positiivsed reaalarvud. Siis

$$\max(a_1, \dots, a_n) \geqslant \sqrt{\frac{a_1^2 + \cdots + a_n^2}{n}} \geqslant \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{a_1 \cdots a_n} \geqslant \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_n}} \geqslant \min(a_1, \dots, a_n).$$

See võrratusteahel on omakorda erijuht üldisest astmekeskmiste vahelistest võrratustest.

Teoreem 4 (*Astmekeskmiste vaheline võrratus)**.** Olgu $a_1, \dots, a_n$ positiivsed reaalarvud ja $\alpha > \beta$ suvalised reaalarvud. Siis

$$\left(\frac{a_1^\alpha + \cdots + a_n^\alpha}{n}\right)^{1/\alpha} \geqslant \left(\frac{a_1^\beta + \cdots + a_n^\beta}{n}\right)^{1/\beta}.$$

kus võrdus kehtib parajasti siis, kui $a_1 = \cdots = a_n$.

Arvude maksimumile vastab $\alpha \to \infty$, RK vastab $\alpha = 2$, AK vastab $\alpha = 1$, GK vastab $\alpha \to 0$, HK vastab $\alpha = -1$ ja miinimumile vastab $\alpha \to -\infty$.

2.2 Muud võrratused

Eesti olümpiaadidel võib mõnikord kasuks tulla ka järgnev võrratus.

Teoreem 5 (Ümberpaigutusvõrratus)**.** Olgu $a_1 \geqslant \ldots \geqslant a_n$ ja $b_1 \geqslant \ldots \geqslant b_n$ reaalarvud (võivad olla ka negatiivsed). Arvude $a_1, \dots, a_n$ mistahes ümberjärjestuse $(a'_1, \dots, a'_n)$ korral kehtib

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n \geqslant a'_1 b_1 + a'_2 b_2 + \cdots + a'_n b_n \geqslant a_n b_1 + a_{n-1} b_2 + \cdots a_1 b_n.$$

Intuitiivselt, summa on maksimaalne, kui omavahel kokku korrutada suurimad elemendid, suuruselt teised elemendid jne. Summa on minimaalne, kui kokku korrutada suurim element väikseimaga, suuruselt teine vähemuselt teisega jne.

Kui ülesanne hõlmab endas kolmnurga külgede pikkusi, siis tasub meeles pidada järgnev võrratus.

Teoreem 6 (Kolmnurgavõrratus)**.** Olgu a, b ja c kolmnurga külgede pikkused. Siis $a + b > c$.

Soojendus 3. Olgu a, b ja c kolmnurga külgede pikkused. Tõesta, et $|a - b| < c$.

2.3 *Edasijõudnumad võrratused

Eesti olümpiaadidel tõenäoliselt vaja ei lähe, kuid kindlasti kasulikud IMO valikvõistlusel ja rahvusvahelistel võistlustel. Nende kohta võib lähemalt lugeda Indrek Zolki võrratuste brošüürist.

Teoreem 7 (Cauchy võrratus)**.** Olgu $a_1, \dots, a_n$ ja $b_1, \dots, b_n$ reaalarvud. Siis

$$(a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n)^2 \leqslant (a_1^2 + \cdots + a_n^2)(b_1^2 + \cdots + b_n^2).$$

See tähendab, et kahe vektori $(a_1, \dots, a_n)$ ja $(b_1, \dots, b_n)$ skalaarkorrutis on väiksem vektorite pikkuste korrutisest. Võrdus kehtib parajasti siis, kui vektorid on paralleelsed ($a_i = c b_i$ mingi konstandi c jaoks).

Teoreem 8 (Jenseni võrratus)**.** Olgu f lõigul $[a, b]$ kumer ($f''(x) \geqslant 0$) ja $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ positiivsed reaalarvud, nii et $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 1$. Siis kehtib

$$\lambda_1 f(x_1) + \cdots + \lambda_n f(x_n) \geqslant f(\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n).$$

Kui funktsioon on nõgus ($f''(x) \leqslant 0$), siis kehtib võrratus vastupidise märgiga.

Üks kõige tugevamaid võrratusi sümmeetriliste võrratuste tõestamiseks on Muirheadi võrratus.

Teoreem 9 (Muirheadi võrratus)**.** Olgu $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ ja $(\beta_1, \dots, \beta_n)$ kaks reaalarvu järjendit, nii et $\alpha_1 \geqslant \beta_1$, $\alpha_1 + \alpha_2 \geqslant \beta_1 + \beta_2$, …, $\alpha_1 + \cdots + \alpha_{n-1} \geqslant \beta_1 + \cdots + \beta_{n-1}$, $\alpha_1 + \cdots + \alpha_n = \beta_1 + \cdots + \beta_n$. Olgu $x_1, \dots, x_n$ positiivsed reaalarvud. Siis

$$\sum_{\text{sym}} x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n} \geqslant \sum_{\text{sym}} x_1^{\beta_1} \cdots x_n^{\beta_n},$$

kus summa on üle kõigi permutatsioonide. Näiteks $(3, 0, 0)$ ja $(2, 1, 0)$ puhul saame võrratuse $2x^3 + 2y^3 + 2z^3 \geqslant x^2 y + x^2 z + y^2 x + y^2 z + z^2 x + z^2 y$.

3 Ülesanded

Ülesanne 1 (Lõppvoor 2015 12.5)**.** Tõesta, et

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2015} > \frac{13}{2}.$$

Ülesanne 2 (Lahtine sügis 2012 V3)**.** Tõesta, et iga täisarvu $n \geqslant 3$ korral $(2n)! \leqslant n^{2n}$.

Ülesanne 3 (Lõppvoor 2010 12.2)**.** Olgu a, b ja c kolmnurga külgede pikkused ja k mingi reaalarv. Tõesta, et kui ruutvõrrandil $x^2 + (a+b+c)x + k(ab+bc+ca) = 0$ leidub reaalarvuline lahend, siis $k < 1$.

Ülesanne 4 (Lõppvoor 2008 11.4)**.** Tõesta, et suvaliste reaalarvude a, b ja c korral kehtib

$$a^2 + 4b^2 + 8c^2 \geqslant 3ab + 4bc + 2ca.$$

Millal kehtib võrdus?

Ülesanne 5 (Lõppvoor 2014 11.2)**.** Olgu a, b ja c positiivsed reaalarvud. Tõesta, et

$$\frac{1+ab}{c} + \frac{1+bc}{a} + \frac{1+ca}{b} > \sqrt{a^2+2} + \sqrt{b^2+2} + \sqrt{c^2+2}.$$

Ülesanne 6 (IMO VV 2011 ül 4)**.** Olgu a, b ja c positiivsed reaalarvud, mille korral $2a^2 + b^2 = 9c^2$. Tõesta, et

$$\frac{2c}{a} + \frac{c}{b} \geqslant \sqrt{3}.$$

Ülesanne 7 (*IMO VV 2014 ül 2)**.** Olgu a, b ja c positiivsed reaalarvud, mille korral $a + b + c = 1$. Tõesta, et

$$\frac{a^2}{b^3+c^4+1} + \frac{b^2}{c^3+a^4+1} + \frac{c^2}{a^3+b^4+1} > \frac{1}{5}.$$