Ülesandeid arvuteooriast eliitrühmale

Tartus 21. detsembril 2024

Soojenduseks

1. Lõpmatu positiivsete täisarvude jada $a_1, a_2, \ldots$ on selline, et $a_n \geqslant 2$ ja a_{n+2} jagab arvu $a_{n+1} + a_n$ iga $n \geqslant 1$ korral. Tõesta, et leidub algarv, mis jagab lõpmatu paljusid selle jada liikmeid. (BT 2024)

Ruutjäägid

2. Iga algarvu p jaoks leidub p-kuningriik, mis koosneb p saarest numbritega $1, 2, \ldots, p$. Kaks erinevat saart numbritega n ja m on omavahel ühendatud sillaga parajasti siis, kui p jagab arvu $(n^2-m+1)(m^2-n+1)$. Tõesta, et lõpmata paljude algarvude p jaoks leiduvad p-kuningriigi kaks saart, mis ei ole omavahel ühendatud sildade ahelaga. (Eesti TVV 2021, IMO eelvalik 2020)

3. Olgu p selline algarv, et $p > 5$ ja -5 on ruutjääk p järgi. Tõestada, et p^2 esitub kujul $m^2 + 5n^2$ mingite positiivsete täisarvude m ja n korral. (Korea olümpiaadi lõppvoor 2014)

Varia

4. Kas leidub positiivne täisarv N, mis jagub vähemalt 2024 erineva algarvuga ja mille positiivsed jagajad $1 = d_1 < d_2 < \ldots < d_k = N$ on sellised, et arv

$$\frac{d_2}{d_1} + \frac{d_3}{d_2} + \ldots + \frac{d_k}{d_{k-1}}$$

on täisarv? (BT 2024)

5. Positiivsed täisarvud a, b ja c rahuldavad võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} (ab-1)^2 = c\,(a^2+b^2) + ab + 1, \\ a^2 + b^2 = c^2 + ab. \end{cases}$$

a) Tõesta, et $c + 1$ on täisruut.

b) Leia kõik sellised kolmikud (a, b, c). (BT 2024)

6. Leia kõik kordarvud n, mille iga positiivse jagaja d jaoks leiduvad täisarvud $k \geqslant 0$ ja $m \geqslant 2$, nii et $d = k^m + 1$. (BT 2024)

7. Kas leidub lõpmatu palju positiivsete täisarvude nelikuid (a, b, c, d), mille korral arv $a^{a!} + b^{b!} - c^{c!} - d^{d!}$ on algarv ja $2 \leqslant d \leqslant c \leqslant b \leqslant a \leqslant d^{2024}$? (BT 2024)

Ülesandeid arvuteooriast eliitrühmale

Tartus 21. detsembril 2024

Soojenduseks

1. Lõpmatu positiivsete täisarvude jada $a_1, a_2, \ldots$ on selline, et $a_n \geqslant 2$ ja a_{n+2} jagab arvu $a_{n+1} + a_n$ iga $n \geqslant 1$ korral. Tõesta, et leidub algarv, mis jagab lõpmatu paljusid selle jada liikmeid. (BT 2024)

Ruutjäägid

2. Iga algarvu p jaoks leidub p-kuningriik, mis koosneb p saarest numbritega $1, 2, \ldots, p$. Kaks erinevat saart numbritega n ja m on omavahel ühendatud sillaga parajasti siis, kui p jagab arvu $(n^2-m+1)(m^2-n+1)$. Tõesta, et lõpmata paljude algarvude p jaoks leiduvad p-kuningriigi kaks saart, mis ei ole omavahel ühendatud sildade ahelaga. (Eesti TVV 2021, IMO eelvalik 2020)

3. Olgu p selline algarv, et $p > 5$ ja -5 on ruutjääk p järgi. Tõestada, et p^2 esitub kujul $m^2 + 5n^2$ mingite positiivsete täisarvude m ja n korral. (Korea olümpiaadi lõppvoor 2014)

Varia

4. Kas leidub positiivne täisarv N, mis jagub vähemalt 2024 erineva algarvuga ja mille positiivsed jagajad $1 = d_1 < d_2 < \ldots < d_k = N$ on sellised, et arv

$$\frac{d_2}{d_1} + \frac{d_3}{d_2} + \ldots + \frac{d_k}{d_{k-1}}$$

on täisarv? (BT 2024)

5. Positiivsed täisarvud a, b ja c rahuldavad võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} (ab-1)^2 = c\,(a^2+b^2) + ab + 1, \\ a^2 + b^2 = c^2 + ab. \end{cases}$$

a) Tõesta, et $c + 1$ on täisruut.

b) Leia kõik sellised kolmikud (a, b, c). (BT 2024)

6. Leia kõik kordarvud n, mille iga positiivse jagaja d jaoks leiduvad täisarvud $k \geqslant 0$ ja $m \geqslant 2$, nii et $d = k^m + 1$. (BT 2024)

7. Kas leidub lõpmatu palju positiivsete täisarvude nelikuid (a, b, c, d), mille korral arv $a^{a!} + b^{b!} - c^{c!} - d^{d!}$ on algarv ja $2 \leqslant d \leqslant c \leqslant b \leqslant a \leqslant d^{2024}$? (BT 2024)