Arvuteooria nooremale rühmale

Birgit Veldi

21. detsember 2024. a.

1 Jaguvus

Definitsioon 1.1. (Jaguvuse definitsioon) Ütleme, et täisarv a jagab täisarvu b või a on b tegur ehk jagaja (tähistame $a \mid b$), kui leidub selline täisarv c, et $ac = b$. Sama asja kohta võib öelda ka, et arv b jagub arvuga a või arv b on arvu a kordne (tähistame $b \vdots a$).

1.1 Jaguvuse kasulikke omadusi:

1. Iga täisarvu a jaoks $a \mid 0$, $1 \mid a$, $a \mid a$.
2. Kui $a, b > 0$ ja $a \mid b$, siis $a \leqslant b$.
3. Kui $a \mid b$ ja $b \mid a$, siis $a = \pm b$.
4. Kui $d \mid a$ ja $d \mid b$, siis $d \mid a \pm b$.
5. Kui p on algarv ja $p \mid ab$, siis $p \mid a$ või $p \mid b$.
6. Kui $a \mid b$ ja $b \mid c$, siis $a \mid c$.

1.2 Ülesandeid

1. Tõesta jaguvuse omadused.
2. **(EGMO VV 2023)** Positiivsete täisarvude m ja n jaoks on teada, et arv $5n + m$ jagub arvuga $5m + n$. Tõesta, et arv n jagub arvuga m.
3. **(LVT 2024 V)** Iga positiivse täisarvu n korral tähistab $n!$ korrutist $1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$. Leia kõik positiivsete täisarvude kolmikud (x, y, z), mille korral
$$3 \cdot x! + 4 \cdot y! = 5 \cdot z!.$$

2 Suurim ühistegur ja vähim ühiskordne

Definitsioon 2.1. (Suurima ühisteguri definitsioon) Ütleme, et positiivne täisarv c on täisarvude a ja b suurim ühistegur (kirjutame $\text{SÜT}(a, b) = c$), kui $c \mid a$ ja $c \mid b$ ning kehtivad järgmised samaväärsed tingimused:

1. Iga teise $d \mid a$, $d \mid b$ korral $d \mid c$,
2. Iga teise $d \mid a$, $d \mid b$ korral $d < c$.

Definitsioon 2.2. (Vähima ühiskordse definitsioon) Ütleme, et positiivne täisarv c on täisarvude a ja b vähim ühiskordne (kirjutame $\text{VÜK}(a, b) = c$), kui $a|c$ ja $b|c$ ning kehtivad järgmised samaväärsed tingimused:

1. Iga teise $a \mid d$, $b \mid d$ korral $c \mid d$,
2. Iga teise $a \mid d$, $b \mid d$ korral $c < d$.

2.1 Suurima ühisteguri kasulikke omadusi:

1. $\text{SÜT}(a,0) = a$, $\text{SÜT}(a,1) = 1$, $\text{SÜT}(a,a) = a$.
2. $\text{SÜT}(ca,cb) = c\text{SÜT}(a,b)$.
3. Leiduvad täisarvud k, l, nii et $ka + lb = \text{SÜT}(a,b)$.
4. $\text{SÜT}(a,b) = \text{SÜT}(a-b,b)$
5. Kui $c|ab$ ja $\text{SÜT}(b,c) = 1$, siis $c \mid a$.

2.2 Vähima ühiskordse kasulikke omadusi:

1. $\text{VÜK}(a,1) = a$, $\text{VÜK}(a,a) = a$.
2. $\text{VÜK}(ca,cb) = c\text{VÜK}(a,b)$.
3. $\text{SÜT}(a,b) \cdot \text{VÜK}(a,b) = ab$

2.3 Ülesandeid

1. Tõesta omadused.
2. Tõestada, et mistahes $a, b, c \in \mathbb{Z}$ korral $a \mid bc$ *parajasti siis*, kui leiduvad $d, e \in \mathbb{Z}$ selliselt, et $a = de$, $d \mid b$ ja $e \mid c$.
3. **(PKV 2022 9. klass)** Leia kolm vähimat naturaalarvu, millest 1 võrra väiksemad arvud jaguvad 5-ga, 1 võrra suuremad arvud jaguvad 3-ga ja mis ise jaguvad 4-ga.
4. **(LP 2018 10. klass)** Leia kõik täisarvude paarid (a, b), mille korral $(2a^2 + b)^3 = b^3 a$.
5. **(LP 2019 12. klass)** . Positiivsete täisarvude a, b ja c korral kehtib võrdus $10a^2 - 3ab + 7c^2 = 0$. Leia avaldise $\text{SÜT}(a,b) \cdot \text{SÜT}(b,c) \cdot \text{SÜT}(c,a)$ vähim võimalik väärtus.
6. **(LV 2021 12. klass)** Leia kõik positiivsete täisarvude paarid (a, b), mille korral $a \geqslant b$ ja
$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{2021}.$$

3 Kongruentsid

Definitsioon 3.1. (Jäägiga jagamine) Täisarvu a ja positiivse täisarvu b jaoks leiduvad üheselt määratud täisarvud q ja r, nii et
$$a = bq + r, \quad \text{kus } 0 \leqslant r < b.$$
Täisarv r on jääk, mis tekib arvu a jagamisel arvuga b.

Definitsioon 3.2. (Kongruentsi definitsioon) Ütleme, et täisarvud a ja b on kongruentsed mooduli n järgi (tähistame $a \equiv b \pmod{n}$), kui kehtivad järgmised samaväärsed tingimused:

1. a ja b annavad n-ga jagamisel sama jäägi,
2. $n \mid a - b$.

3.1 Kongruentsi omadusi

1. Kui $a \equiv b \pmod{n}$, siis $a \pm c \equiv b \pm c \pmod{n}$, $ac \equiv bc \pmod{n}$ ja $a^c \equiv b^c \pmod{n}$.
2. Kui $ac \equiv bc \pmod{n}$ ja $\text{SÜT}(c,n) = 1$, siis $a \equiv b \pmod{n}$

3.2 Ülesandeid

1. Tõesta omadused.
2. **(PKV 2021 10. klass)** Leia positiivse täisarvu $p^2 + 239$ vähim võimalik positiivsete tegurite arv, kui on teada, et p on algarv.
3. **(PKV 2024 9. klass)** Positiivse täisarvu k *faktoriaaliks* nimetatakse arvu k ja kõigi temast väiksemate positiivsete täisarvude korrutist.

   Leia kõik positiivsed täisarvud n, mille puhul esimese n positiivse täisarvu faktoriaalide summa on mingi täisarvu ruut.
4. **(LV 2024 9. klass)** Kas leiduvad positiivsed täisarvud x ja y, mis rahuldavad võrrandit
$$11x^5 + 33y = 13y^5 + 31x + 2024?$$
5. **(LV 2024 10. klass)** Kas leidub selline positiivne täisarv n, mille korral
$$1950^n + 1934^n = 2024^n?$$
6. **(LVS 2022 N)** Leia kõik positiivsete täisarvude paarid (a, b), mille korral $a! = b^2 + 44$.

   Märkus. Iga naturaalarvu x korral tähistatakse $x! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot x$, st $x!$ märgib korrutist kõigist positiivsetest täisarvudest, mis pole suuremad kui x.
7. **(LV 2019 9. klass)** Nimetame huvitavateks kõiki positiivseid täisarve kujul $3 \cdot 7^k$, kus k on positiivne täisarv. Kas mingi hulga erinevate huvitavate positiivsete täisarvude kokkuliitmisel on võimalik saada tulemuseks mõne positiivse täisarvu ruut?
8. **(LV 2018 11. klass)** Leia kõik algarvud p, mille korral on arv $2p^3 + 4p^2 - 3p + 12$ mingi täisarvu viies aste.
9. **(LVS 2021 V3)** Nimetame algarvu p *nunnuks*, kui leidub algarv q, mille korral $pq - 2$ ja $pq + 2$ on samuti algarvud. Nimetame arvu p *imeliseks*, kui nii p kui ka $p + 2$ on nunnud algarvud. Leia kõik imelised arvud.
10. **(LV 2018 12. klass)** Leia kõik algarvude kolmikud (p, q, r), mille korral
$$2018(p^2 + q^2) = r^2 + 1$$

4 Arvu kanooniline kuju

Teoreem 4.1. (Aritmeetika põhiteoreem) Iga naturaalarvu $n > 1$ jaoks leiduvad üheselt määratud algarvud $p_1, \ldots, p_s$ ja positiivsed astendajad $k_1, \ldots, k_s$, nii et
$$n = p_1^{k_1} \cdot \ldots \cdot p_s^{k_s}.$$

Sellist esitust nimetatakse arvu *kanooniliseks kujuks* või *standardkujuks*.

4.1 Jaguvus, SÜT ja VÜK läbi kanoonilise kuju

1. Arvu $n = p_1^{k_1} \cdot \ldots \cdot p_s^{k_s}$ jagajad on arvud kujul $m = p_1^{\ell_1} \cdot \ldots \cdot p_s^{\ell_s}$, kus $0 \leqslant \ell_1 \leqslant k_1, \ldots, 0 \leqslant \ell_s \leqslant k_s$.
2. Arvu $n = p_1^{k_1} \cdot \ldots \cdot p_s^{k_s}$ kordsed on arvud kujul $m = p_1^{\ell_1} \cdot \ldots \cdot p_s^{\ell_s} m'$, kus $\ell_1 \geqslant k_1, \ldots, \ell_s \geqslant k_s$ ning m' on täisarv.
3. Kui $n = p_1^{k_1} \cdot \ldots \cdot p_s^{k_s}$ ja $m = p_1^{\ell_1} \cdot \ldots \cdot p_s^{\ell_s}$, siis $\text{SÜT}\,(n, m) = p_1^{\min\{k_1, \ell_1\}} \cdot \ldots \cdot p_s^{\min\{k_s, \ell_s\}}$.
4. Kui $n = p_1^{k_1} \cdot \ldots \cdot p_s^{k_s}$ ja $m = p_1^{\ell_1} \cdot \ldots \cdot p_s^{\ell_s}$, siis $\text{VÜK}\,(n, m) = p_1^{\max\{k_1, \ell_1\}} \cdot \ldots \cdot p_s^{\max\{k_s, \ell_s\}}$.

4.2 Ülesandeid

1. Tõesta 2 viimast omadust.
2. **(PKV 2020 10. klass)**
   (a) Kas leiduvad erinevad positiivsed täisarvud a, b ja c, mille korral
   $$\text{VÜK}(\text{SÜT}(a,b),c) = \text{VÜK}(\text{SÜT}(b,c),a) = \text{VÜK}(\text{SÜT}(c,a),b)?$$
   (b) Kas leiduvad (mitte tingimata erinevad) positiivsed täisarvud a, b ja c, mille korral
   $$\text{VÜK}(\text{SÜT}(a,b),c) = \text{VÜK}(\text{SÜT}(b,c),a) = \text{VÜK}(\text{SÜT}(c,a),b) = m,$$
   kus $m \neq \text{VÜK}(a,b,c)$?
3. **(LVT 2023 V)** Anu ja Bert mängivad kumbki ChatGPT-ga järgmist mängu. Anu ja ChatGPT mängus on algul tahvlil arv 2023!, Berdi ja ChatGPT mängus arv 2024!. Iga käik koosneb kahest osast. Kõigepealt valib üks mängija tahvlil oleva arvu kordarvulise teguri d ja jagab arvu sellega läbi. Seejärel peab vastane tegema omal valikul ühte järgmisest kolmest tegevusest:
   - korrutada tahvlil olevat arvu arvu d teguriga d', mille korral $1 < d' < d$;
   - korrutada tahvlil olevat arvu 7-ga;
   - eemaldada tahvlil oleva arvu lõpust null ja tulemus korrutada 2023-ga (kui arv ei lõpe nulliga, siis seda varianti valida ei saa).

   Järgmise käigu ajal vahetavad mängijad osad. Nii jätkatakse kordamööda ning mängija, kes ei saa nõuetekohast toimingut sooritada, on kaotanud. ChatGPT alustab mõlemat mängu. Tõesta, et ChatGPT-l on võimalik vähemalt üks mängudest võita.

   Märkus. Kirjutis $n!$ märgib kõigi positiivsete täisarvude $1, 2, \ldots, n$ korrutist.
4. **(LVS 2024 V)** Positiivset täisarvu m nimetatakse *tavaliseks*, kui arvu m iga algteguri ruut on väiksem kui m.
   (a) Tõesta, et leidub lõpmata palju positiivseid täisarve n, mille korral n ja $n+1$ on mõlemad tavalised.
   (b) Kas leidub positiivne täisarv n, mille korral n, $n+1$ ja $n+2$ on kõik tavalised?