

Geomeetria: Ringjooned

Hendrik Vija

20. detsember 2024

Sissejuhatus

- Veendu, et tead mõisteid: võrdkülgne ja võrdhaarne kolmnurk, alusnurk, tipunurk, haar, alus, kolmnurga kõrgus, mediaan, nurgapoolitaja, keskrist-sirge, kolmnurkade võrdsus ja sarnasus.
- Veendu, et tead järgmiseid fakte:
 1. Kolmnurga sisenurkade summa on 180° ja nelinurgal 360° .
 2. Kolmnurk on võrdhaarne parajasti siis, kui ta alusnurgad on võrdsed.
 3. Et kolmnurgad oleksid võrdsed/sarnased, piisab kui kehtib üks tingimustest KKK, NNN, NKN.
- Ülesandeid lahendades soovitan järgnevat:
 1. Tee suur joonis joonlaua ja sirkliga. Sobib nii harilik kui pastakas.
 2. Kui sul tekib mõni hüpotees, näiteks "punktid X, Y, Z asuvad ühel sirgel" või "sirged AC ja BD on paralleelsed", siis tee veel jooniseid, et veenduda, kas hüpotees kehtib ka neil.
 3. Kirjuta välja kõik oma tulemused ja ideed. Kui neid pole kirjas või on vaid joonisel, ei saa parandaja ega hiljem sina ise nendest aru.

Ringjooned

Definitsioon 1 Ringjooneks keskpunktiga O ja raadiusega r nimetatakse nende punktide hulka, mis asuvad punktist O kaugusel r .

Ülesanne 1 Leia korrapärase n -nurga sisenurga suurus.

Teoreem 1 Igal kolmnurgal ABC leidub täpselt üks ümberringjoon, mis läbib tema tippu A, B, C . Selle keskpunkt O on ühtlasi kolmnurga ABC keskrist-sirgete lõikepunkt.

Teoreem 2 (Thalese teoreem) Kolmnurgal ABC asub täisnurk tipu A juures parajasti siis, kui tema ümberringjoone keskpunkt on külje BC keskpunkt.

Teoreem 3 (Piirdenurk ja kesknurk) Asugu punktid A, B, C ringjoonel keskpunktiga O ja olgu C, O samal pool sirget AB . Siis $\angle AOB = 2\angle ACB$.

Ülesanne 2 Leia piirdenurga suurus, mis toetub korrapärase n -nurga küljele.

Teoreem 4 (Kõõlnelinurksuse tingimused) Olgu $ABCD$ nelinurk.

1. Asugu C, D samal pool sirget AB . Tõesta, et A, B, C, D asuvad ühel ringjoonel parajasti siis, kui $\angle ACB = \angle ADB$.
2. Asugu C, D erineval pool sirget AB . Tõesta, et A, B, C, D asuvad ühel ringjoonel parajasti siis, kui $\angle ACB + \angle ADB = 180^\circ$.

Ülesanne 3 Olgu kolmnurgas ABC tippudest A, B, C tõmmatud kõrguste aluspunktid D, E, F ja kõrguste lõikepunkt H . Tõesta, et nelinurgad $BCEF, ACDF, ABDE, AHEF, BHDF, CHDE$ on kõik kõõlnelinurgad.

Ülesanne 4 (Simsoni sirge) Olgu ABC kolmnurk ja P punkt tema ümberringjoonel. Tõesta, et punktist P sirgetele AB, BC, CA tõmmatud ristsirgete aluspunktid asuvad ühel sirgel.

Teoreem 5 (Puutuja-kõõlu teoreem) Olgu meil antud ringjoon, selle ringjoone mingi kõõl AB ning puutuja läbi punkti A . Siis kõõlu AB ja antud puutuja vaheline nurk on võrdne kaarele AB toetuva piirdenurgaga.

Ülesanne 5 Olgu ABC kolmnurk ja ω tema ümberringjoon. Tõmbame ringjoonele ω puutujad punktides A, B, C . Osutub, et puutujatest moodustuv kolmnurk on sarnane kolmnurgaga ABC . Tõesta, et ABC on võrdkülgne.

Ülesanne 6 Ringjooned ω_1, ω_2 lõikuvad punktides P, Q . Läbi punkti A ringjoonel ω_1 tõmmatakse sirged AP ja AQ , mis lõikavad ringjoont ω_2 punktides $B \neq P$ ja $C \neq Q$. Tõesta, et läbi A ringjoonele ω_1 tõmmatud puutuja on paralleelne sirgaga BC .

Ülesanne 7 (Olegi punkt) Tõesta, et kolmnurga ABC tipust A tõmmatud nurgapoolitaja ja külje BC keskristsirge lõikuvad kolmnurga ümberringjoonel.

Ülesanne 8 (Seespool/väljaspool ringjoont asuva "piirdenurga" suurus) Olgu antud ringjoon ω ja punkt P , mis ei asu ringjoonel. Tõmbame läbi P kaks sirget ℓ_1, ℓ_2 , olgu ℓ_1 ja ω lõikepunktid A, D ning ℓ_2 ja ω lõikepunktid B, C (nii et A, B, C, D asuvad ringjoonel selles järjekorras). Tõesta, et

1. kui P asub ringjoone sees, on nurk $\angle APB$ võrdne kaartele AB ja CD toetuvate piirdenurkade summaga,
2. kui P asub ringjoonest väljaspool, on nurk $\angle APB$ võrdne kaartele AB ja CD toetuvate piirdenurkade vahega.