

Geomeetria variat vanemale rühmale

Kristjan-Erik Kahu

20. detsember 2024

1 Homoteetia, pööre, peegeldamine

Eukleidilist tasandit saab mitmel toredal viisil käänta ja väänata.

2 Üheksapunktiringjoon

2.1

Olgu ω teravnurkse¹ kolmnurga ABC ümberringjoon. Olgu punkt H kolmnurga ABC kõrguste lõikepunkt. Olgu punkt K sirge AH teine lõikepunkt ringjoonega ω . Tõesta, et lõigu KH keskpunkt asub sirgel BC .

2.2

Olgu ω teravnurkse² kolmnurga ABC ümberringjoon. Olgu punkt H kolmnurga ABC kõrguste lõikepunkt. Olgu punkt M lõigu BC keskpunkt. Tõesta, et punkti H peegeldus üle punkti M asub ω peal.

2.3 Üheksapunktiringjoone olemasolu

Olgu ω teravnurkse³ kolmnurga ABC ümberringjoon. Olgu punkt H kolmnurga ABC kõrguste lõikepunkt. Olgu punkt O ω keskpunkt. Olgu punktid M, N, K vastavalt lõikude BC, CA, AB keskpunktid. Olgu punktid D, E, F vastavalt lõikude BC, AC, AB kõrguste aluspunktid. Olgu punktid X, Y, Z vastavalt lõikude AH, BH, CH keskpunktid.

Tõesta, et $D, E, F, M, N, K, X, Y, Z$ asuvad kõik ühel ringjoonel, (lisaks tõestada, et selle ringjoone keskpunkt on lõigu OH keskpunkt).

¹tõestatav väide kehtib ka nürinurkse kolmnurga korral, aga tõestust peab natuke kohandama sellel juhul

²vt eelmine alapunkt

³vt eelmine alapunkt

3 Projektiivne tasand

Definitsioon 1. Punktiks projektiivsel tasandil \mathbb{RP}^2 ⁴ nimetame reaalarvude kolmikut $(x : y : z)$ ⁵, kus x, y ja z pole kõik korraga nullid.

Definitsioon 2. Loeme kaks punkti projektiivsel tasandil samaks, kui nende kõik koordinaadid on võrdelised, s.t $(x : y : z) = (\lambda x : \lambda y : \lambda z) \forall \lambda \in \mathbb{R}, \lambda \neq 0$.

Definitsioon 3. Eukleiidilise tasandi punkti asukohaga (x, y) loeme võrdseks projektiivse tasandi punktiga $(x : y : 1)$. Projektiivse tasandi punkti $(x : y : z)$ loeme võrdseks eukleiidilise tasandi punktiga $(x/z, y/z)$, (kus z ei ole 0). Projektiivse tasandi punktid kujul $(x : y : 0)$ moodustavad sirge lõpmatuses, mida tavalisel eukleiidilisel tasandil ei leidu.

4 Pascali teoreem

Olgu ω ringjoon⁶. Asugu punktid A, B, C ja X, Y, Z selle peal (ei pea olema just selles järjestuses). Sirgete AY ja BX lõikepunkt, BZ ja CY lõikepunkt ning AZ ja CX lõikepunkt asuvad ühel sirgel. Soovi korral tõestada.

5 Desargue'i teoreem

Olgu punktid A, B, C ja X, Y, Z projektiivsel tasandil. Olgu nii kolmnurga ABC kui XYZ pindala üle nulli (s.t need pole ühe sirge peal). Siis järgmised kaks väidet on samaväärsed: 1) et sirged AX, BY ja CZ lõikuvad ühes punktis; 2) et $AC \cup XZ, AB \cup XY$ ja $BC \cup YZ$ asuvad ühel sirgel.

5.1

Tõestada suund 1) \Rightarrow 2).⁷

6 Miqueli teoreem

Olgu ABC kolmnurk. Asugu punktid X küljel BC , Y küljel AC ning Z küljel AB . Tõesta, et ringjooned XYC, XBZ ja AYZ lõikuvad ühes punktis.

7 Euleri sirge

Kolmnurga mediaanide lõikepunkt, kõrguste lõikepunkt ja ümberringjoone keskpunkt asuvad ühel sirgel. Tõestada.

⁴P nagu projektiivne.

⁵Koolon koordinaatide vahel ei tähistata jagamist, vaid on eraldaja. Koma kasutades oleks segadus tavalise arvukolmikuga kergem tekkima.

⁶või ellips või parabool või hüperbool või kaks suvalist sirget, ühesõnaga mõni teist järku algebraline joon

⁷Vihje: minna kolmandasse dimensiooni.

8 Simsoni sirge

Olgu ω kolmnurga ABC ümberringjoon. Olgu punkt $P \in \omega$. Olgu punktid X, Y ja Z vastavalt punktist P tõmmatud kõrgused sirgetele BC, AC ja AB . Tõesta, et punktid X, Y ja Z asuvad ühel sirgel.⁸

9 Olegi punkt ja selle omadused

⁹ Olgu ABC kolmnurk, ω selle ümberringjoon, I selle siseringjoone keskpunkt. Olgu punkt D sirge AI teine lõikepunkt ω -ga. Olgu E küljele BC toetuva välisringjoone keskpunkt. Tõestada, et siis E, B, I, C asuvad ühel ringjoonel ning D on selle keskpunkt. Tõestada ka, et punkti D läbib mh sirge BC keskrist-sirge.¹⁰

10 2020 IMO P1

Vaatleme kumerat nelinurka $ABCD$. Punkt P asub nelinurga $ABCD$ sisepiirkonnas. Kehtivad järgmised seosed:

$$\angle PAD : \angle PBA : \angle DPA = 1 : 2 : 3 = \angle CBP : \angle BAP : \angle BPC$$

Tõesta, et järgmised kolm sirget lõikuvad ühes punktis: nurkade $\angle ADP$ ja $\angle PCB$ sisenurgapoolitajad ning lõigu AB keskristsirge

11

<https://math.olympiadid.ut.ee/> AoPS (community-*i* forum või contests) ean chen Euclidean Geometry in Mathematical Olympiads (vihje: libgen on raamatupiraatluse jaoks väga hea sait) jne

⁸Kehtib ka sarnane pöördväide: kui X, Y ja Z on punktist P tõmmatud kõrgused sirgetele a, b ja c ning X, Y ja Z asuvad ühel sirgel, siis P asub sirgetest a, b ja c moodustunud kolmnurga ümberringjoonel.

⁹Mujal maailmas tuntud kui incenter-excenter lemma.

¹⁰Teisisõnu, ümberringjoone olemasolul on see hea, kiire ja suhteliselt täpne viis joonestada nurgapoolitajaid.