Kombinatoorika nooremale rühmale

Talvine õppesessioon

Martin Rahe

21.12.2024

Invariandid

Invariandiks nimetame ülesandes vaadeldava objekti mingit sellist omadust, mis teisendamiste käigus ei muutu. Levinuimateks invariantideks kombinatoorikaülesannetes on vaadeldavate objektide mingid algebralised omadused, näiteks paarsus ja summa.

Tavaliselt on ülesandes invariandi otsimine kasulik, kui on tarvis tõestada, et mingi protsessi tulemusena saavutatav olukord vastab piiravatele tingimustele. Sinna hulka kuuluvad ka ülesanded, kus on tarvis tõestada, et ülesandes vaadeldav lõpptulemus ei ole saavutatav.

Ülesanne 1

Tahvlil on arvud $1, 2, \ldots, 2000$. Tahvlilt kustutatakse samm-sammult kaks arvu ja kummagi asemel kirjutatakse nende arvude aritmeetiline keskmine. Kas mingi lõpliku arvu selliste sammude järel võivad tahvlil olla arvud $1000, 1000, \ldots, 1000$?

Ülesanne 2

Tahvlile kirjutatakse ritta arvud $1, 2, \ldots, 2024$. Edasi tegutsetakse nii, et igal sammul kustutatakse rea algusest kaks arvu ära ja kirjutatakse nende korrutis rea lõppu juurde. Milline arv jääb lõpuks ainsana tahvlile?

Ülesanne 3

Rahaautomaat annab raha peeneks vahetades iga mündi asemele alati viis münti. Kas selle automaadi abil on võimalik ühte metallmünti vahetada 26-ks mündiks?

Ülesanne 4

Tahvlile on kirjutatud arvud 4, 5 ja 6. Ühe sammuga võib valida kaks tahvlil olevat arvu, olgu need a ja b, kustutada need ning asemele kirjutada arvud $0{,}6a - 0{,}8b$ ja $0{,}8a + 0{,}6b$. Kas lõpliku arvu selliste sammude järel võivad tahvlil olla arvud 1, 6 ja 6?

Värvimine

Värvimine kujutab endast ühte invariandi liiki. Värvimine osutub tihti kasulikuks ülesannetes, kus esinevad korrapäraselt grupeeritavad objektid ja on tarvis tõestada, et mingi lõppolukord ei ole saavutatav. Paljud värvimisega lahenduvad ülesanded on sõnastatud ruudustikku kasutades.

Ülesanne 5

a) Malelauast lõigatakse välja üks nurgaruut. Kas järelejäänud osa on võimalik tükeldada 2×1 tükkideks?

b) Malelauast lõigatakse välja kaks teineteise vastas asuvat nurgaruutu. Kas järelejäänud osa on võimalik tükeldada 2×1 tükkideks?

Ülesanne 6

Lõpmatul malelaual paiknevad 1337 maleratsut. Tõesta, et nende hulgast on võimalik välja valida 666 sellist, millest ükski pole teise tule all.

Ülesanne 7

5×5 ruudustiku igal ruudul istub üks konn. Teatud ühel ja samal hetkel hüppab iga konn naaberruudule, mis omas esialgsega ühist serva. Tõesta, et pärast hüppamist jääb ruudustikku vähemalt üks tühi ruut.

Mängud

Mängudeteemalised kombinatoorikaülesanded on üldjuhul püstitatud kahe mängija vastasseisuna ning ülesande sisuks on leida, kummal mängijal leidub võitev strateegia (suudab võita sõltumata vastase käikudest). Reeglina taanduvad sellised ülesanded võitvate ja kaotavate seisude tuvastamisele, mis omakorda taandub invariandi leidmisele.

Ülesanne 8

Tünnis on 2023 õuna. Hendrik ja Artur võtavad vaheldumisi tünnist õunu, kusjuures korraga võib võtta ühe kuni kolm õuna ning esimesena võtab õunu Hendrik. Kes mängijatest saab alati tagada endale võimaluse võtta tünnist viimane õun?

Ülesanne 9

Topeltmale: tavalised malemängu reeglid, kuid ühe käigu ajal tuleb liigutada oma nuppe kaks korda (justkui oleks kaks tavalise male käiku). Tõesta, et alustaval mängijal leidub mittekaotav strateegia.

Ülesanded

Ülesanne 10

Ringjoonel asub 12 lampi. Alguses üks neist põleb, ülejäänud ei põle. Ühe sammuga saab muuta suvalise kahe kõrvutiasetseva lambi olekud. Kas mingi arvu selliste sammude rakendamisel on võimalik saavutada olukord, kus ringjoonel põleb

a) täpselt iga neljas lamp?

b) täpselt iga kuues lamp?

Ülesanne 11

Kas mängulauda 10×10 saab lõigata

a) ristkülikuteks 1×4?

b) neljast ühikruudust koosnevateks L-kujulisteks kujunditeks?

c) neljast ühikruudust koosnevateks T-kujulisteks kujunditeks?

Ülesanne 12

Ervin ja Kaarel mängivad järgmist mängu: laual on hunnik kivikesi, mida mängijad vaheldumisi tehtavate käikudega võtma hakkavad. Oma käigu ajal tohib mängija võtta hunnikust ära 2 kuni 15 kivikest. Võidab mängija, kes võtab viimase kivikese. Kummal mängijal leidub võitev strateegia, kui kuhjas on alguses

a) 2023 kivikest?

b) 2024 kivikest?

c) 2025 kivikest?

Ülesanne 13

Madis ja Mattias asetavad kordamööda ühesendiseid münte ruudukujulisele lauale küljepikkusega 1 meeter nii, et ükski kaks münti ei kattu omavahel. Esimesena paneb lauale mündi Madis. Kaotab mängija, kes enam münti asetada ei saa. Kas ühel mängijal õnnestub võita vastase mistahes vastumängu korral? Kui jah, siis kummal? Kõik mündid on mõõtmetelt identsed.

Ülesanne 14

Tahvlile on kirjutatud arvud $1, 2, 3, \ldots, 100$. Igal sammul valib Juku mingid kaks arvu a ja b, kustutab need ja kirjutab nende asemele arvu $ab + a + b$. Leia kõik võimalused, milline arv võib jääda viimasena tahvlile.

Ülesanne 15 (Piirkonnavoor 2023, 9-4)

Artur ja Bronislav mängivad malelaual mõõtmetega 8×9 järgmist mängu. Mängu alguses on Arturi ratsu malelaua vasakul alumisel nurgaruudul ning Bronislavi ratsu paremal ülemisel nurgaruudul. Edasi hakkavad nad kordamööda tegema oma ratsudega malekäike (ratsu saab käia parajasti nendele ruutudele, mis asuvad temast horisontaalis ühe ja vertikaalis kahe ruudu või horisontaalis kahe ja vertikaalis ühe ruudu kaugusel), seejuures Artur alustab. Bronislav võidab, kui mõlema mängija ratsud satuvad korraga ühele ja samale ruudule (ükskõik kumma mängija käigu tulemusel). Kas Bronislavil on võimalik tagada võit sõltumata Arturi vastumängust?

Ülesanne 16 (Lõppvoor 2023, 9-4)

Mänguriba laiusega 1 on jaotatud ühikruutudeks. Juku ja Miku asetavad kordamööda ühekaupa mänguriba ruutudele nuppe. Käia tohib igale ruudule, välja arvatud neile, millel või millega ühist külge omaval ruudul juba on nupp. Alustab Juku ning mängija, kes ei saa enam käiku teha, on kaotanud. Tõesta, et alati, kui mänguriba pikkuse k korral leidub Mikul võitev strateegia, leidub mänguriba pikkuste $k+1$, $k+2$ ja $k+3$ korral võitev strateegia Jukul.

Ülesanne 17

Õpetaja kirjutab tahvlile 2024-kohalise arvu $999\ldots9$. Esimene õpilane lahutab selle arvu kahe 1-st suurema teguri a ja b korrutiseks ning kustutab siis tahvlil oleva arvu ja kirjutab selle asemele kaks sellist arvu a' ja b', et $|a-a'| = 2$ ja $|b-b'| = 2$.

Teine õpilane valib ühe tahvlil olevatest arvudest, lahutab selle arvu kahe 1-st suurema teguri c ja d korrutiseks ning kustutab siis valitud arvu tahvlilt ja kirjutab selle asemele kaks sellist arvu c' ja d', et $|c-c'| = 2$ ja $|d-d'| = 2$.

Kolmas õpilane valib omakorda ühe tahvlil olevatest arvudest ning asendab selle sama reegli kohaselt kahe uue arvuga, jne. Kas on võimalik, et pärast seda, kui mingi arv õpilasi on käinud tahvli juures, on kõik tahvlil olevad arvud võrdsed 9-ga?

Ülesanne 18

Kas 2023×2023 malelauda saab katta 4×1 klotsidega nii, et ainult malelaua keskmine ruut jääb katmata? Aga 2025×2025? (Eeldame, et iga klots katab täpselt neli malelaua ruutu ning klotsid omavahel ei kattu.)

Ülesanne 19

Ruudustik mõõtmetega 5×5 kaetakse kaheksa nurgikuga (kolmest ühikruudust koosnev kujund) nii, et üks ruut jääb vabaks. Tee kindlaks kõik ruudustiku ruudud, mis võivad pärast katmist vabaks jääda.