Kombinatoorika
Talvesessioon 2024, vanem rühm

Marko Tsengov

21. detsember 2024. a.

1 Loendame?

Ülesanne 1. Kass A leiab iga hommik aknalaualt täpselt n nummerdatud kuulikest. Et see olukord on juba rutiinseks muutunud, otsustas ta iga päev mõned kuulikesed maha ajada (*keegi* paneb need öö jooksul korda tagasi), seejuures jälgides, et maha aetud kuulikesed poleks samad kui ühelgi eelmisel päeval. Iga päev ajab ta maha vähemalt ühe kuulikese, kuni kõik võimalused on läbi proovitud.

a) Mitmeks päevaks saab nii aega sisustada?

b) Mitu kuulikest kõigi nende päevade peale kokku maha aetakse?

Ülesanne 2 (Algebra II praktikum)**.** Vaatame mitme muutuja polünoome $a_1x_1^2+a_2x_2^2+\cdots+a_nx_n^2$, kus n on positiivne täisarv, $x_1,\ldots,x_n$ erinevad muutujad ja iga $a_1,\ldots a_n$ on kas 0, 1 või -1. Nimetame kaht sellist polünoomi *ekvivalentseks*, kui saame liidetavate järjestust muutes ja/või x_i indekseid „ümber nimetades“ (nummerdades indeksid ümber nii, et iga indeks esineks üks kord). Mitu paarikaupa *mitteekvivalentset* sellist polünoomi fikseeritud n väärtuse korral leidub?

Ülesanne 3 (Mathematics Stack Exchange)**.** Olgu 9 ülesandega kontrolltöö ning 7 õpilast, kes tööd lahendasid. Iga õpilane lahendas vähemalt 4 ülesannet. Näidake, et leidub ülesanne, mille lahendas vähemalt 4 õpilast.

2 ?

Ülesanne 4 (LPV2014 10. klass ül 1)**.** Olgu a ja n positiivsed täisarvud. Tõesta, et

$$\left\lfloor\frac{a}{n}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{a+1}{n}\right\rfloor+\cdots+\left\lfloor\frac{a+n-1}{n}\right\rfloor=a$$

Kus $\lfloor x\rfloor$ tähistab x (alumist) täisosa.

Ülesanne 5 (Sandra materjalid 2021)**.** Tõesta, et kui ruudustikust suurusega $2^n\times 2^n$ on eemaldatud üks ruut, siis on ülejäänud ala võimalik katta kolmeruuduliste L-kujuliste tükkidega nõnda, et tükid ei kattu omavahel ja katavad täpselt kogu ala. (Tükke võib pöörata.)

Ülesanne 6 (MMP)**.** Olgu x selline reaalarv, mille puhul $x+x^{-1}$ on täisarv. Tõesta, et x^n+x^{-n} on täisarv iga naturaalarvu n puhul.

Ülesanne 7 (LPV 2017 9. klass ül 4)**.** Leia kõik positiivsed täisarvud n, mille korral on võimalik ruut jaotada n ruudukujuliseks tükiks.

Ülesanne 8 (LPV2009 12. klass ül 5)**.** Ristkülikukujulisest ruudustikust lõigatakse välja mõned ruudud nii, et koos iga väljalõigatava ruuduga lõigatakse välja ka kõik ruudud, mis asuvad sellest ülalpool samas või mõnes parempoolses veerus ning temast paremal samas reas. Seejärel kirjutatakse igasse järelejäänud ruutu arv, mis näitab, mitu järelejäänud ruutu on kokku temast ülalpool samas veerus ja temast paremal samas reas. Tõesta, et ruute, kuhu kirjutatakse paarisarv, on vähemalt sama palju kui ruute, kuhu kirjutatakse paaritu arv.

3 ???

Ülesanne 9 (BOI 2022 „communication“)**.** Kaks osapoolt — saatja ja vastuvõtja — üritavad saata kauge maa tagant ühesuunalise sõnumi. Sõnumiks on täisarv vahemikust $[1, n]$ ($n \geqslant 3$) ning osapooled on enne läbi arutanud strateegiad, kuidas sõnumeid saata. Praeguses olukorras on kokku lepitud, et saatja saadab sõnumi edastamiseks täpselt 50^{n^n} bitti (1 või 0). Samas teab samu plaane ka pealtkuulaja, kes on ühenduse üle võtnud ja näeb reaalajas, mida saatja saadab. Pealtkuulajal on võimekus suvaline saadetav bitt *asendada* suvalise väärtusega, kuid seda ei saa ta teha kahe järjestikuse biti jaoks. Samuti saab saatja **kohe** peale biti saatmist teada, milline bitt kohale jõudis.

Tõesta, et vastuvõtja ei saa kunagi kindel olla, milline sõnum parajasti saadeti.

Lisa: näidake, et leidub protokoll, mille korral vastuvõtja saab alati tõeselt väita, et saadetud sõnum on üks kahest võimalusest.

Ülesanne 10 (IMO 2015 SL C1 / LVS 2015 V6)**.** Ridamaal on $n \geqslant 1$ linna, mis on kõik ühe tee ääres, järjestatud vasakult paremale. Igas linnas on *buldooser vasakule* (pandud linna vasakusse serva ja suunaga vasakule) ja *buldooser paremale* (pandud linna paremasse serva ja suunaga paremale). Kõigi $2n$ buldooseri suurused on erinevad. Iga kord, kui parem ja vasak buldooser kokku põrkavad, lükkab suurem buldooser väiksema teelt kõrvale. Teisest küljest on aga buldooserite tagumised otsad üpris kaitsetud: kui üks buldooser jõuab teise tagumise otsa juurde, siis lükkab ta selle buldooseri teelt välja, olenemata nende suurustest.

Olgu A ja B kaks linna, kusjuures B asub Ast paremal. Ütleme, et linn A suudab linna B minema lükata, kui buldooser A suudab liikuda linna B, lükates teelt kõrvale kõik buldooserid, mida ta kohtab. Sarnaselt suudab linn B minema lükata linna A, kui ta suudab liikuda linna A, lükates teelt kõrvale kõik buldooserid, mida rännaku jooksul kohtab. Tõesta, et leidub täpselt üks linn, mida ei suuda minema lükata ükski teine linn.

Ülesanne 11 (Reimo Palmi materjalid[1])**.** Olgu $m \leqslant n$. *Ladina ristkülikuks* nimetatakse maatriksit (ruudustikku) mõõtmetega $m \times n$, mille elemendid kuuluvad hulka $\{1, 2, \ldots, n\}$ ning esinevad selle maatriksi igas reas ja igas veerus mitte üle ühe korra. *Ladina ruuduks* nimetatakse ladina ristkülikut, kus $m = n$. Tõestada, et iga ladina ristküliku saab $n - m$ rea lisamise teel täiendada ladina ruuduks.

[1] https://kodu.ut.ee/~reimo_p/kursus/12s/prakt5lah.pdf