Kombinatoorika talvine sess: mängud

Tartu, 21. detsember 2024

Kahe mängija mängude puhul, kui pole viigivõimalust ega juhuslikkust (näiteks täringuviskeid) on alati ühel või teisel poolel võitev strateegia. Tihti saab seda leida lõpust alustades, märkides kõigepealt ära kõik seisud, mille puhul käigul olija võidab, siis need (kaotavad) seisud, millest saab käia ainult võitvasse seisu, siis need, millest on võimalik käia kaotavasse seisu jne. Kasulik võib olla otsida mingit invarianti või sümmeetriat.

Ülesanded

1. Ruudustikus mõõtmetega $n \times n$ on nurgaruut värvitud mustaks. Hendrik ja Oleg värvivad vaheldumisi ühe ruudu, millel on viimati värvitud ruuduga ühine serv. Sama ruutu uuesti värvida ei tohi. Võidab see, kes teeb viimase käigu.
   a) Kellel on võitev strateegia?
   b) Kellel on võitev strateegia, kui algul on nurgaruudu asemel värvitud nurgaruudu naaberruut?
2. Antud on naturaalarv $N > 2025$. Kaks mängijat mängivad järgmist mängu: igal käigul võib antud arvust lahutada mingi arvu $1, 2, \ldots, 2024$ või jagada antud arvu 2025-ga, võttes täisosa, kui vaja. Võidab see, kes esimesena jõuab nullini. Kumbal mängijal on võitev strateegia?
3. Mängijad A ja B mängivad järgmist mängu: kõigepealt kirjutab mängija A tahvlile järjest n naturaalarvu $a_1, \ldots a_n$. Siis valib ta nende hulgast ühe arvu välja. Seejärel valib mängija B ühe arvu ning asendab selle mängija A poolt valitud arvuga. Seejärel valib mängija A jälle mingi arvu ning B valib jälle ühe arvu ning asendab selle mängija A poolt valitud arvuga. Mängija B võidab, kui pärast lõplikku arvu samme on saavutatud olukord, kus $a_i \leq a_{i+1}$ iga $i = 1, \ldots, n-1$ korral; mängija A võidab, kui mäng jõuab tagasi seisu, mis on juba esinenenud. Kumbal mängijatest on võitev strateegia?
4. Mängijad A ja B mängivad $N \times N$ laual järgmist mängu. Nad käivad kordamööda ning mängija A alustab. Igal käigul mängija värvib ühe ruudu nii, et ühelgi laua diagonaalil poleks kahte värvitud ruutu ja ühtegi ruutu ei tohi värvida kaks korda. Milliste N väärtuste korral on mängijal A võitev strateegia?
5. Anna ja Berta mängivad 2024×2024 ruudustikul maleratsuga järgmist mängu. Anna paneb algul ratsu suvalisse neljast keskmisest ruudust. Seejärel hakkavad nad kordamööda ratsukäike tegema. Esimesena käib Berta, tema võib oma käigul liikuda ainult 2 ruutu horisontaalis ja 1 ruudu vertikaalis (suvalistes suundades). Anna võib liikuda ainult 2 ruutu vertikaalis ja 1 ruudu horisontaalis. Samasse ruutu teist korda astuda ei tohi. Kaotab see, kes enam käia ei saa. Kellel on võitev strateegia?
6. Lõpmatul ruudulisel lehel 2 mängijat märgivad kordamööda ruute, üks kirjutab ruutu X ja teine O. Mängija võidab, kui ta saab oma sümbolit 11 korda järjest kas reas, veerus või diagpnaalselt. Näidata, et teine mängija saab tõkestada esimest mängijat võitmast.
7. Ümmarguse laua ääres istub 2024 tüdrukut, kes mängivad n-kaardilise kaardipakiga järgmist mängu. Algul on kogu kaardipakk ühe tüdruku käes. Igal käigul, kui leidub mõni tüdruk, kellel on vähemalt 2 kaarti, siis üks neist tüdrukutest annab kaardi mõlemale oma kõrvalistujale. Mäng lõpeb, kui kõigil osavõtjatel on maksimaalselt üks kaart. Missuguste n väärtuste korral on see mäng lõplik?
8. Laual on 2 kuhja tikke, vastavalt m ja n tikuga. 2 mängijat võtavad vaheldumisi kuhjadest tikke. Ühel käigul võib võtta ühest kuhjast sellise arvu tikke, mis jagub teise kuhja tikkude arvuga. Võidab see, kes võtab ühest kuhjast viimase tiku. Milliste m ja n väärtuste korral on alustajal võitev strateegia?
9. Peeter ja Jüri mängivad mängu pluss-miinus. Kõigepealt Jüri valib naturaalarvu n. Tahvlil on algul arv $s = 1$. Igal käigul Peeter valib mingi reaalarvu x nii, et $0 \leq x \leq s$. Seejärel Jüri valib kas pluss või miinus ning kirjutab tahvlile s asemele vastavalt kas $s + x$ või $s - x$. Jüri peab valima mängu jooksul täpselt $n+1$ korda pluss ja n korda miinus; pärast $2n+1$ käiku mäng lõppeb. Peeter võidab, kui mängu lõpul on tahvlil arv $s \geq 2$, muidu võidab Jüri. Kumbal mängijal on võitev strateegia?
10. Laual on reas 88 karpi $B_1, \ldots, B_{88}$ ning piiramatul hulgal kivikesi. Alice valib n kivikest ning jagab need suvaliselt karpidesse. Ühel käigul
    a) Bob valib täisarvu k, $1 \leq k \leq 87$ ning jagab karbid kahte rühma $B_1, \ldots, B_k$ ja $B_{k+1}, \ldots, B_{88}$;
    b) Alice lisab ühe rühma igasse karpi ühe kivi ning võtab teise rühma igast karbist ühe kivi.
    Bob võidab, kui mingil hetkel saab mõni karp tühjaks. Leida vähim n, mille puhul Alice saab võita.