

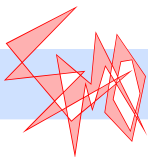
Piirkonnavor 2025

Ülesanded	1	Grade 8	27
7. klass	1	Grade 10	28
8. klass	3	Grade 11	29
9. klass	5		
7. klass	7	Lahendused	30
8. klass	8	7. klass	30
9. klass	9	8. klass	32
10. klass	10	9. klass	35
11. klass	11	7. klass	37
12. klass	12	8. klass	41
		9. klass	44
Ülesanded vene keeles	13	10. klass	48
7 класс	13	11. klass	54
8 класс	15	12. klass	61
9 класс	17		
7 класс	19	Põhikooli hindamisjuhised	68
8 класс	20	Üldjuhend	68
9 класс	21	7. klass	70
10 класс	22	8. klass	71
11 класс	23	9. klass	72
12 класс	24	7. klass	73
		8. klass	75
Ülesanded inglise keeles	25	9. klass	77
Grade 8	25		

Võistluskomplekti valmimisse panustasid:

Aleksei Ganyukov
Maksim Ivanov
Raul Kangro
Urve Kangro
Evely Kirsiaed

Oleg Košik
Härmel Nestra
Marko Tsengov
Hendrik Vija
Jan Villemson



Eesti 72. matemaatikaolümpiaad

29. jaanuar 2025

Piirkonnavor

7. klass

I osa. Lahendamisaega on 30 minutit.

Sellele lehele kirjuta ainult vastused, lahendamiseks võid kasutada lisapaberit.

Iga ülesande õige ja lihtsustatud kujul vastus on väärt 2 punkti.

Elektronilised ega kirjalikud abivahendid ei ole lubatud.

Kood

1. Arvuta:

$$7 \cdot 6 : \left(1 + \frac{2}{3 - \frac{4}{5}} \right) = \dots\dots\dots$$

2. Olgu a , b , c , d ja e sellised erinevad naturaalarvud, et on tõene võrdus $a \cdot b \cdot c \cdot d \cdot e = 2025$. Leia summa $a + b + c + d + e$.

.....

3. Võistkonnas on 4 mängijat, kelle keskmine vanus on 25 aastat. Kui võistkonnas noorima mängija asemel oleks 35-aastane mängija, siis oleks mängijate keskmine vanus 28 aastat. Kui vana on võistkonna noorim mängija?

.....

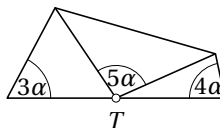
4. Kui palju on kokku selliseid numbrite paare (x, y) , mille korral kuuekohaline arv $20x25y$ jagub nii arvuga 3 kui ka arvuga 5?

.....

5. Ruudu $ABCD$ küljel CD valitakse punkt E nii, et murdjoone ADE pikkus on 20 cm ja murdjoone BCE pikkus on 25 cm. Leia ruudu $ABCD$ pindala.

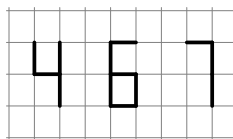
.....

6. Joonisel on kolm võrdhaarset kolmnurka. Iga kolmnurga tipunurk asub tipu T juures ning need kolm tipunurka moodustavad kokku sirgnurga. Kolme joonisel märgitud nurga suurus on 3α , 4α ja 5α . Leia α .

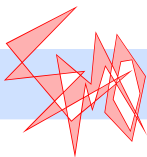


.....

7. Võrdseteks ristkülikuteks jaotatud paberilehele kirjutatakse numbrid 4, 6 ja 7 joonisel näidatud viisil. Numbrite 4 ja 6 kirjutamiseks vajalike lõikude kogupikkused on vastavalt 13 cm ja 18 cm. Leia numbriga 7 kirjutamiseks vajalike lõikude kogupikkus.



.....



Eesti 72. matemaatikaolümpiaad

29. jaanuar 2025

Piirkonnavoore

8. klass

I osa. Lahendamisaega on 30 minutit.

Sellele lehele kirjuta ainult vastused, lahendamiseks võid kasutada lisapaberit.

Iga ülesande õige ja lihtsustatud kujul vastus on väärt 2 punkti.

Elektroonilised ega kirjalikud abivahendid ei ole lubatud.

Kood

1. Arvuta:

$$\frac{1}{2} : \frac{2}{3} : \frac{3}{4} : \frac{4}{5} : \frac{5}{6} : \frac{6}{7} : \frac{7}{8} = \dots\dots\dots$$

2. Kui palju on erinevaid võimalusi asendada arvus 2025 üks number mõne muu numbriga nii, et saadud neljakohaline arv ei jaguks arvuga 3?

.....

3. Võistkonnas on kolm mängijat, kelle vanused suhtuvad nagu 4 : 5 : 6. Nende mängijate keskmine vanus on 30 aastat. Kui vana on selle võistkonna noorim mängija?

.....

4. Muutujate a , b ja c väärtused on sellised erinevad naturaalarvud, et kehtib võrdus $a^2 \cdot b^2 \cdot c^2 = 2025$. Leia summa $a + b + c$ suurim võimalik väärtus.

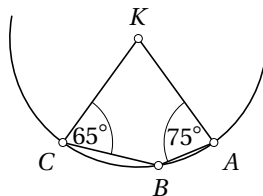
.....

5. Ristküliku $ABCD$ ümbermõõt on 60 cm. Pikemal küljel CD valitakse selline punkt E , et lõigu DE pikkus on 8 cm. Murdjoon ADE on 3 korda lühem kui murdjoon $ABCE$. Leia ristküliku $ABCD$ pindala.

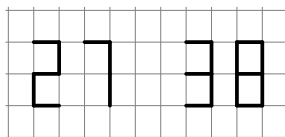
.....

6. Ringjoonel keskpunktiga K valitakse punktid A , B ja C selles järjestuses nii, et $\angle KAB = 75^\circ$ ja $\angle BCK = 65^\circ$. Leia nurga CKA suurus.

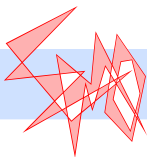
.....



7. Võrdseteks ristkülikuteks jaotatud paberilehele kirjutatakse arvud 27 ja 38 joonisel näidatud viisil. Arvu 27 kirjutamiseks vajalike lõikude kogupikkus on 27 cm. Leia arvu 38 kirjutamiseks vajalike lõikude kogupikkus.



.....



Eesti 72. matemaatikaolümpiaad

29. jaanuar 2025

Piirkonnavoore

9. klass

I osa. Lahendamisaega on 30 minutit.

Sellele lehele kirjuta ainult vastused, lahendamiseks võid kasutada lisapaberit.

Iga ülesande õige ja lihtsustatud kujul vastus on väärt 2 punkti.

Elektroonilised ega kirjalikud abivahendid ei ole lubatud.

Kood

1. Arvuta:

$$\frac{3636 \cdot 4545}{909^2} = \dots\dots\dots$$

2. Korrutis $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10$ jagatakse arvuga 2025. Leia jagatise viimane number.

.....

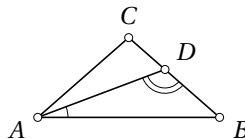
3. Võistkonnas on viis mängijat, kelle vanused on kõik erinevad. Kahe noori-
ma mängija keskmine vanus on 20 aastat ja ülejäänud mängijate keskmine
vanus on 25 aastat. Leia suurim võimalik selle võistkonna vanima mängija
vanus. Mängijate vanuseid arvestatakse täisaastates.

.....

4. Arvus 2025 on täpselt kaks numbrit 2, ülejäänud numbrid on erinevad. Kui
palju on sama omadusega arvust 2025 väiksemaid neljakohalisi naturaalar-
ve?

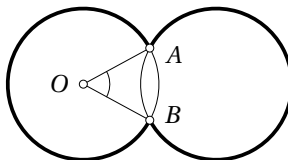
.....

5. Võrdhaarses kolmnurgas ABC alusega AB on tõmmatud nurgapoolitaja AD . On teada, et nurk ADB on 6 korda suurem kui nurk BAD . Leia nurga ACB suurus.



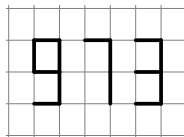
.....

6. Kaks võrdset ringjoont raadiusega 5 cm lõikuvad punktides A ja B . Ühe ringjoone keskpunkt on O . Leia kesknurga AOB suurus, kui jämeda joone pikkus on 17π cm.

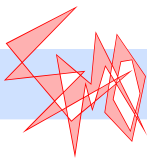


.....

7. Võrdseteks ristkülikuteks jaotatud paberilehele kirjutatakse arv 973 joonisel näidatud viisil. Selle arvu kirjutamiseks vajalike lõikude kogupikkus on 973 mm. Leia numbriga 9 kirjutamiseks vajalike lõikude kogupikkus.



.....



Eesti 72. matemaatikaolümpiaad

29. jaanuar 2025

Piirkonnavoor

7. klass

II osa. Lahendamisaega on 3 tundi.

Ülesannete lahendused kirjuta eraldi lehele.

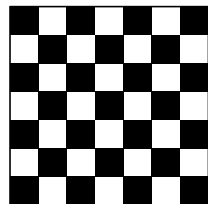
Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti. Ainult vastusest ei piisa!

Elektroonilised ega kirjalikud abivahendid ei ole lubatud.

1. Kommipakis on ainult punased, kollased, sinised ja rohelised kommid. Kolmandik kõigist kommidest on punased. Neljandik ülejäänud kommidest on kollased. Siniseid komme on pakis 1,5 korda rohkem kui rohelisi. Mitu kommi on selles pakis kokku, kui punaseid komme on seal 60 võrra rohkem kui rohelisi?
2. Nimetame naturaalarvu *imeilusaks*, kui ta on viiekohaline ja tema numbrite summa jagub arvuga 7.

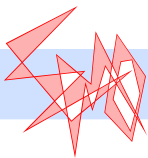
Leia suurim selline imeilus arv, millele mingi neljakohalise arvu liitmisel saame summaks samuti imeilusa arvu.

3. Joonisel on ruudustik mõõtmetega 7×7 , mille ühikruudud on värvitud malekorras mustaks ja valgeks. Sellest ruudustikust tuleb välja lõigata kujund, mis koosneb tervetest ühikruutudest, ei lagune osadeks ega sisalda auke. Selles kujundis peab olema 2 korda rohkem valgeid ühikruute kui musti. Leia suurima väljalõikamiseks sobiva kujundi pindala.



4. Tabelis on 2 rida ja 2025 veergu. Esimese rea lahtritesse kirjutatakse arvud 2, 3, 4 ja 6, seejärel jälle arvud 2, 3, 4 ja 6, siis jälle samad arvud jne. Teise rea lahtritesse kirjutatakse järjestikused naturaalarvud alates arvust 7. Mitu veergu, mille lahtrites olevate arvude summa jagub arvuga 10, on selles tabelis?

2	3	4	6	2	3	4	6	2	---
7	8	9	10	11	12	13	14	15	---



Eesti 72. matemaatikaolümpiaad

29. jaanuar 2025

Piirkonnavoor

8. klass

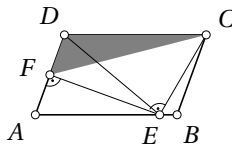
II osa. Lahendamisaega on 3 tundi.

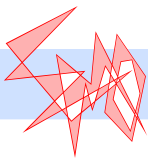
Ülesannete lahendused kirjuta eraldi lehele.

Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti. Ainult vastusest ei piisa!

Elektroonilised ega kirjalikud abivahendid ei ole lubatud.

1. Kirjutises $ABC + DEF = GHI$ asendatakse erinevad tähed erinevate numbritega nii, et tekiks tõene võrdus, kus liidetavad ja summa on kolmekohalised arvud. Milline number ei vasta ühelegi tähele, kui lisaks on teada, et $A + E = 8$, $F \cdot I = 8$ ja $G - B = 8$?
2. Praegu näitab kell 8:25. Millist aega näitab kell, kui esmakordselt pärast praegust hetke on tunni- ja minutiosuti vaheline nurk 15° võrra suurem kui praegu?
3. Tahvlile kirjutatakse 20 järjestikust naturaalarvu. Seejärel kustutatakse neist üks arv nii, et järelejäänud arvude summa on 2025. Leia kustutatav arv.
4. Rööpküliliku $ABCD$ pikemal küljel AB valitakse selline punkt E , et $\angle CED = 90^\circ$, $\angle ADE = 2\angle CDE$ ja $\angle DCE = 3\angle BCE$. Punktist E tõmmatakse küljele AD ristlõik EF . Leia kolmnurga CDF pindala, kui kolmnurga CDE pindala on 24 cm^2 .





Eesti 72. matemaatikaolümpiaad

29. jaanuar 2025

Piirkonnavoor

9. klass

II osa. Lahendamisaega on 4 tundi.

Ülesannete lahendused kirjuta eraldi lehele.

Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti. Ainult vastusest ei piisa!

Elektroonilised ega kirjalikud abivahendid ei ole lubatud.

1. Nimetame positiivset täisarvu *eriliseks*, kui tema numbrite vahele saab panna ühe võrdusmärgi ja null või enam plussmärki nii, et tekib tõene võrdus. Näiteks arv 3210123 on eriline, sest temast on võimalik saada tõene võrdus $3 + 2 + 10 = 12 + 3$.

- a) Kas 2024-kohaline arv 101010...10 on eriline?
b) Kas 2025-kohaline arv 101010...101 on eriline?

(Mõlemas arvus esineb 10 täpselt 1012 korda, b-osas on arvu lõpus veel üks number 1.)

2. Leia kõik mittenegatiivsete täisarvude paarid (n, m) , mis rahuldavad tingimust

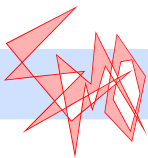
$$1 + 6n - n^2 = m^2.$$

3. Kolmnurkade ABC ja $A'B'C'$ kohta on teada järgmised kolm fakti:

- 1) $\angle ABC = \angle A'B'C'$ või $\angle ABC = 180^\circ - \angle A'B'C'$;
2) $\angle BCA = \angle B'C'A'$ või $\angle BCA = 180^\circ - \angle B'C'A'$;
3) $\angle CAB = \angle C'A'B'$ või $\angle CAB = 180^\circ - \angle C'A'B'$.

Kas võib kindlalt väita, et kolmnurgad ABC ja $A'B'C'$ on sarnased?

4. Tahvlile on kirjutatud numbrid 202520252025. Anna ja Bert mängivad mängu, kus igal käigul kustutab mängija ühe tahvil olevatest numbritest ja kirjutab asemele mõne sellise numbriga, mis on kustutatud numbrist väiksem. Anna alustab ja käike tehakse kordamööda. Kaotab mängija, kes enam ei saa käiku teha (kõik numbrid on muutunud nullideks). Kumb mängija saab võita vastase iga vastumängu korral?



Eesti 72. matemaatikaolümpiaad

29. jaanuar 2025

Piirkonnavoor

10. klass

Lahendamisaega on 5 tundi.

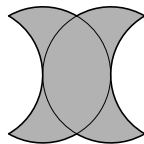
Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti.

Elektroonilised ega kirjalikud abivahendid ei ole lubatud.

1. Järjesta arvud $7\sqrt{5}$, $11\sqrt{2}$ ja $9\sqrt{3}$ kasvavalt.
2. Ruutvõrrandil $ax^2 + bx + c = 0$ on kaks reaalarvulist lahendit, mille korrutis on 3. Sellel võrrandil vahetatakse ruutliikme kordaja ja vabaliige omavahel. Leia saadud võrrandi lahendite korrutis.
3. Leia kõik positiivsete täisarvude kolmikud (x, y, z) , mis rahuldavad võrrandit

$$xyz + 17xy + xz + 4yz + 17x + 68y + 4z = 2025.$$

4. Saapad ja jope maksid enne hinnatõusu kokku 300 eurot. Pärast hinnatõusu maksavad saapad endisest 10 kuni 20 protsenti rohkem, jope aga endisest 30 kuni 40 protsenti rohkem. Pärast hinnatõusu on jope saabastest kallim 70 kuni 90 euro võrra. Leia madalaim ja kõrgeim neil tingimustel võimalik saabaste hind enne hinnatõusu.
5. Joonisel kujutatud x-täht koosneb neljast ringjoone kaarest, mis kahekaupa puutuvad kaarte keskpunktides ja kahekaupa omavad kaht ühist otspunkti. Kaks pikemat kaart on ühepikkused ja 2 korda pikemad kahest lühemast kaarest. Kõik kaared on raadiusega 1. Leia x-tähe poolt kaetava ala (joonisel halliks värvitud) pindala.



6. Juku kirjutab 5×5 ruudustiku igasse ühikruutu mingi positiivse reaalarvu nii, et vasakus alumises nurgaruudus on 1, paremas ülemises nurgaruudus on 2025 ning igas 2×2 ruudus on nurkapidi kokkupuutuvatesse ühikruutudes kirjutatud arvude korrutised võrdsed. Leia ruudustiku alumisse paremasse nurgaruutu ja ülemisse vasakusse nurgaruutu kirjutatud arvude korrutis.



Eesti 72. matemaatikaolümpiaad

29. jaanuar 2025

Piirkonnavoor

11. klass

Lahendamisaega on 5 tundi.

Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti.

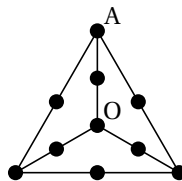
Elektroonilised ega kirjalikud abivahendid ei ole lubatud.

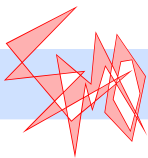
1. Kumb arvudest $9\sqrt{5}$ ja $8 + 7\sqrt{3}$ on suurem?
2. Jukul on mängulaud mõõtmetega 10×10 , mis on jaotatud ühikruutudeks. Juku soovib mängida mängu, mida saab mängida mistahes ruudustikul mõõtmetega $m \times n$, kus $m \geq 2$ ja $n \geq 2$. Mitmel viisil on Jukul võimalik välja valida mängulaua osa, millel oma mängu mängida?
3. Leia kõik neljakohalised naturaalarvud n , mille kahest esimesest numbrist ja kahest viimasest numbrist (järjestust muutmata) moodustatud kahekoohaliste arvude summa ruut võrdub arvuga n .
4. Leia kõik reaalarvude kolmikud (x, y, z) , mis rahuldavad võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} x + y = z, \\ y^2 + z^2 = x^2, \\ z^3 + x^3 = y^3. \end{cases}$$

5. Leia kõik positiivsed täisarvud n , mille korral leidub tasandil kumer n -nurk järgmiste omadustega:
 - 1) leiduvad kaks sisenurka, mis on erinevate suurustega α ja β ;
 - 2) iga sisenurk on kas suurusega α või suurusega β ;
 - 3) suurusega α sisenurkade summa ja suurusega β sisenurkade summa on võrdsed.

6. Joonisel on linna X trammiliinide võrgustik, mille liine märgivad sirglõigud ja peatusi mummukesed. Juku ja tema sõbrad mängivad kullimängu, kus on üks põgeneja ja vähemalt üks püüdja. Igal käigul otsustavad kõik mängijad üheaegselt, kas jääda paigale või liikuda trammiga ühe peatuse võrra mööda mingit liini mingis suunas. Pärast käiku saavad kõik teada, mida teised otsustasid ja kus nad asuvad. Kui pärast käiku on vähemalt üks püüdja põgenejaga samas peatuses, siis on põgeneja kinni püütud. Põgeneja alustab peatuses A ning püüdjad alustavad peatuses O. Leia vähim püüdjate arv, mille korral on püüdjatel võimalik põgeneja lõpliku arvu käikudega tabada sõltumata põgeneja liikumisest.





Eesti 72. matemaatikaolümpiaad

29. jaanuar 2025

Piirkonnavoor

12. klass

Lahendamisaega on 5 tundi.

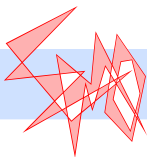
Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti.

Elektroonilised ega kirjalikud abivahendid ei ole lubatud.

1. Arvuta summa

$$\frac{1}{\sqrt{1+\sqrt{2}}} + \frac{1}{\sqrt{2+\sqrt{3}}} + \frac{1}{\sqrt{3+\sqrt{4}}} + \frac{1}{\sqrt{4+\sqrt{5}}} + \frac{1}{\sqrt{5+\sqrt{6}}} + \frac{1}{\sqrt{6+\sqrt{7}}} + \frac{1}{\sqrt{7+\sqrt{8}}} + \frac{1}{\sqrt{8+\sqrt{9}}}.$$

- Kolmnurga ABC pindala avaldub kujul $S = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{4}$, kus a , b ja c on vastavalt külgede BC , CA ja AB pikkused. Leia nurga ACB suurus.
- Positiivsed täisarvud a , b , c ja d on sellised, et $a > b > c > d$, arvud $a + b$ ja $c + d$ jaguvad mõlemad 2-ga, arvud $a - c$ ja $b - d$ jaguvad mõlemad 3-ga ning arvud $a \cdot d$ ja $b \cdot c$ jaguvad mõlemad 5-ga. Leia vähim võimalik arvude a , b , c ja d summa.
- Jukul on kolm tahvlit šokolaadi, igaüks massiga 60 g. Esimesel päeval murrab Juku esimese šokolaaditahvli kolmeks tükiks, mille massid on mingi aritmeetilise jada järjestikused liikmed, ja sööb neist tükkidest kaks ära. Teisel päeval murrab Juku teise šokolaaditahvli niisama rasketeks tükkideks nagu esimesel päeval esimese tahvli ja sööb saadud kolmest tükist kaks ära. Kolmandal päeval murrab Juku kolmanda šokolaaditahvli niisama rasketeks tükkideks nagu eelmistel päevadel eelmised tahvlid ja sööb saadud kolmest tükist kaks ära. Neljandal päeval sööb Juku ära kõik esimesel kolmel päeval järele jäänud tükid. Nii sööb Juku kõigil neljal päeval ühepalju šokolaadi. Leia šokolaaditahvli kolmeks tükiks murdmisel tekkinud suurima tüki mass.
- Kolmnurga kahe kõrguse pikkused on 3 cm ja 6 cm. Leia kõik võimalused, milline saab olla kolmnurga kolmanda kõrguse pikkus.
- Kooli kergejõustikuvõistluste 100 meetri jooksu poolfinaalides osaleb kokku 12 jooksjat. Nad loositakse kolme 4-liikmelisse gruppi, nii et kõik gruppidesse jagunemise võimalused on võrdtõenäolised. Seejärel jookseb iga grupp ühe jooksu. Finaali pääseb 4 jooksjat: iga jooksu võitja ja lisaks ka kiireim kõigist neist jooksjatest, kes oma jooksu ei võida. Leia tõenäosus, et finaali pääsevad need jooksjad, kes saavad 4 kiireimat aega. (Eeldame, et ükski kaks jooksjat ei saa täpselt sama aega ja et iga jooksja saavutab kindla aja sõltumata grupist, milles ta jookseb.)



72-я Олимпиада Эстонии по математике

29 января 2025 г.

Региональный тур

7 класс

I часть. *Время, отводимое для решения: 30 минут.*

На этом листке написать только ответы, для решения можно использовать дополнительную бумагу.

Верный и в упрощённом виде ответ каждой задачи даёт 2 балла.

Вспомогательные письменные материалы или электронные приборы не разрешены.

Вспомогательные письменные материалы или электронные приборы не разрешены.

Код

1. Вычислить:

$$7 \cdot 6 : \left(1 + \frac{2}{3 - \frac{4}{5}} \right) = \dots\dots\dots$$

2. Пусть a , b , c , d и e такие различные натуральные числа, что действует равенство $a \cdot b \cdot c \cdot d \cdot e = 2025$. Найти сумму $a + b + c + d + e$.

.....

3. В команде всего 4 игрока, средний возраст которых равен 25 годам. Если бы вместо самого младшего игрока в команде был 35-летний игрок, то средний возраст игроков команды был бы равен 28 годам. Сколько лет самому младшему игроку этой команды?

.....

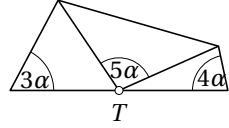
4. Сколько всего таких пар цифр (x, y) , при которых шестизначное число $\overline{20x25y}$ делится как на число 3, так и на число 5?

.....

5. На стороне CD квадрата $ABCD$ выбрана такая точка E , что длина дробной линии ADE равна 20 см, а длина дробной линии BCE равна 25 см. Найти площадь квадрата $ABCD$.

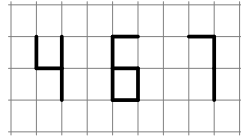
.....

6. На рисунке изображены три равнобедренных треугольника. Угол при вершине каждого треугольника лежит в точке T , и эти три угла при вершинах образуют вместе развёрнутый угол. Величины трёх обозначенных на рисунке углов равны 3α , 4α и 5α . Найти α .

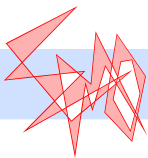


.....

7. На листке бумаги, который поделён на равные прямоугольники, записали цифры 4, 6 и 7 так, как показано на рисунке. Общие длины отрезков, необходимых для записи цифр 4 и 6, равны соответственно 13 см и 18 см. Найти общую длину отрезков, необходимых для записи цифры 7.



.....



72-я Олимпиада Эстонии по математике

29 января 2025 г.

Региональный тур

8 класс

1 часть. *Время, отводимое для решения: 30 минут.*

На этом листке написать только ответы, для решения можно использовать дополнительную бумагу.

Верный и в упрощённом виде ответ каждой задачи даёт 2 балла.

Вспомогательные письменные материалы или электронные приборы не разрешены.

Код

1. Вычислить:

$$\frac{1}{2} : \frac{2}{3} : \frac{3}{4} : \frac{4}{5} : \frac{5}{6} : \frac{6}{7} : \frac{7}{8} = \dots\dots\dots$$

2. Сколько всего различных возможностей для замены одной цифры числа 2025 на какую-то другую цифру так, чтобы полученное четырёхзначное число не делилось на число 3?

.....

3. В команде всего три игрока, возрасты которых относятся как 4 : 5 : 6. Средний возраст этих игроков равен 30 годам. Сколько лет самому младшему игроку этой команды?

.....

4. Значениями неизвестных a , b и c являются такие различные натуральные числа, что действует равенство $a^2 \cdot b^2 \cdot c^2 = 2025$. Найти наибольшее возможное значение суммы $a + b + c$.

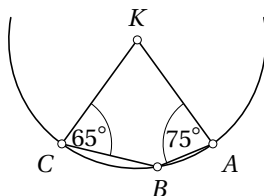
.....

5. Периметр прямоугольника $ABCD$ равен 60 см. На его большей стороне CD выбрана такая точка E , что длина отрезка DE равна 8 см. Дробная линия ADE в 3 раза короче дробной линии $ABCE$. Найти площадь прямоугольника $ABCD$.

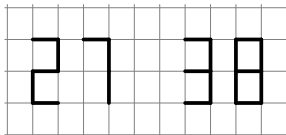
.....

6. На окружности с центром K выбраны в указанном порядке точки A , B и C так, что $\angle KAB = 75^\circ$ и $\angle BCK = 65^\circ$. Найти величину угла CKA .

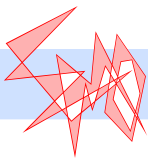
.....



7. На листке бумаги, который поделён на равные прямоугольники, записали числа 27 и 38 так, как показано на рисунке. Общая длина отрезков, необходимых для записи числа 27, равна 27 см. Найти общую длину отрезков, необходимых для записи числа 38.



.....



72-я Олимпиада Эстонии по математике

29 января 2025 г.

Региональный тур

9 класс

I часть. *Время, отводимое для решения: 30 минут.*

На этом листке написать только ответы, для решения можно использовать дополнительную бумагу.

Верный и в упрощённом виде ответ каждой задачи даёт 2 балла.

Вспомогательные письменные материалы или электронные приборы не разрешены.

Код

1. Вычислить:

$$\frac{3636 \cdot 4545}{909^2} = \dots\dots\dots$$

2. Произведение $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10$ делится на число 2025. Найти последнюю цифру частного.

.....

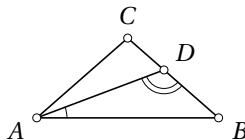
3. В команде всего пять игроков разного возраста. Средний возраст двух самых младших игроков команды равен 20 годам, а средний возраст оставшихся игроков команды равен 25 годам. Найти наибольший возможный возраст самого старшего игрока этой команды. Возрасты игроков берутся в целых годах.

.....

4. В числе 2025 ровно две цифры 2, а другие цифры различны. Сколько всего четырёхзначных натуральных чисел, которые меньше числа 2025 и имеют такое же свойство?

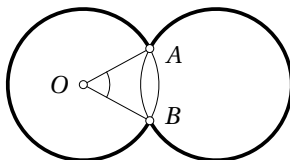
.....

5. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AB проведена биссектриса AD . Известно, что угол ADB в 6 раз больше угла BAD . Найти величину угла ACB .



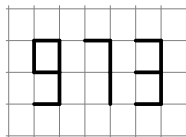
.....

6. Две равные окружности с радиусом 5 см пересекаются в точках A и B . Точка O является центром одной из окружностей. Найти величину центрального угла AOB , если длина жирной линии равна 17π см.

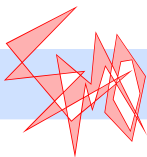


.....

7. На листке бумаги, который поделён на равные прямоугольники, записали число 973 так, как показано на рисунке. Общая длина отрезков, необходимых для записи этого числа, равна 973 мм. Найти общую длину отрезков, необходимых для записи цифры 9.



.....



72-я Олимпиада Эстонии по математике

29 января 2025 г.

Региональный тур

7 класс

II часть. *Время, отводимое для решения: 3 часа.*

Решения задач написать на отдельном листе.

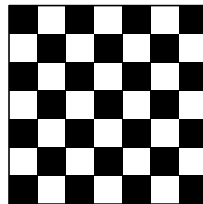
Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи даёт 7 баллов. Написать только ответ недостаточно!

Вспомогательные письменные материалы или электронные приборы не разрешены.

1. В упаковке только красные, жёлтые, синие и зелёные конфеты. Треть всех конфет — красные. Четверть оставшихся конфет — жёлтые. Синих конфет в упаковке в 1,5 раза больше, чем зелёных. Сколько всего в упаковке конфет, если красных в ней на 60 штук больше, чем зелёных?
2. Назовём натуральное число *замечательным*, если оно является пятизначным, а сумма его цифр делится на 7.

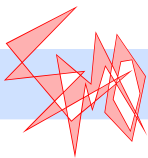
Найти наибольшее такое замечательное число, при прибавлении к которому некоторого четырёхзначного числа результат тоже будет замечательным числом.

3. На рисунке изображена квадратная сетка размером 7×7 , клетки которой окрашены в шахматном порядке в чёрный и белый цвета. Из этой сетки нужно вырезать фигуру, которая состоит из целых клеток, не распадается на части и не содержит отверстий. Белых клеток в этой фигуре должно быть в 2 раза больше, чем чёрных. Найти наибольшую возможную площадь подходящей для вырезания фигуры.



4. В таблице 2 строки и 2025 столбцов. В ячейки первой строки записывают числа 2, 3, 4 и 6, затем снова числа 2, 3, 4 и 6, затем ещё раз те самые же числа и т.д. В ячейки второй строки записывают последовательные натуральные числа, начиная с числа 7. Сколько в этой таблице столбцов, сумма чисел в ячейках которых делится на 10?

2	3	4	6	2	3	4	6	2	---
7	8	9	10	11	12	13	14	15	---



72-я Олимпиада Эстонии по математике

29 января 2025 г.

Региональный тур

8 класс

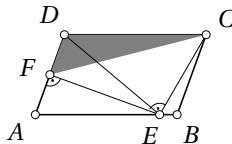
II часть. *Время, отводимое для решения: 3 часа.*

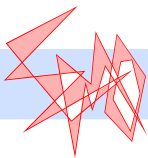
Решения задач написать на отдельном листе.

Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи даёт 7 баллов. Написать только ответ недостаточно!

Вспомогательные письменные материалы или электронные приборы не разрешены.

1. В записи $ABC + DEF = GHI$ разные буквы заменяются разными цифрами так, чтобы получилось верное равенство, в котором слагаемые и сумма являются трёхзначными числами. Какая цифра не соответствует ни одной из букв, если также известно, что $A + E = 8$, $F \cdot I = 8$ и $G - B = 8$?
2. В данный момент часы показывают 8:25. Какое время покажут часы, когда в первый раз после данного момента угол между часовой и минутной стрелками будет на 15° больше, чем сейчас?
3. На доску записывают 20 последовательных натуральных чисел. После этого одно из этих чисел стирают таким образом, что сумма оставшихся чисел равна 2025. Найти число, которое было стёрто.
4. На более длинной стороне AB параллелограмма $ABCD$ выбирается такая точка E , что $\angle CED = 90^\circ$, $\angle ADE = 2\angle CDE$ и $\angle DCE = 3\angle BCE$. Из точки E к стороне AD опускается перпендикуляр EF . Найти площадь треугольника CDF , если площадь треугольника CDE равна 24 см^2 .





72-я Олимпиада Эстонии по математике

29 января 2025 г.

Региональный тур

9 класс

II часть. *Время, отводимое для решения: 4 часа.*

Решения задач написать на отдельном листе.

Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи даёт 7 баллов. Написать только ответ недостаточно!

Вспомогательные письменные материалы или электронные приборы не разрешены.

1. Назовём положительное целое число *особенным*, если между его цифрами можно поставить один знак равенства и ноль или более знаков сложения так, чтобы получилось верное равенство. Например, число 3210123 является особенным, так как из него возможно получить верное равенство $3 + 2 + 10 = 12 + 3$.
- а) Является ли 2024-значное число 101010...10 особенным?
б) Является ли 2025-значное число 101010...101 особенным?
(В обоих числах 10 встречается ровно 1012 раз, а в пункте б в конце числа стоит еще одна цифра 1.)

2. Найти все пары неотрицательных целых чисел (n, m) , удовлетворяющие условию

$$1 + 6n - n^2 = m^2.$$

3. О треугольниках ABC и $A'B'C'$ известны следующие три факта:

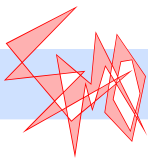
1) $\angle ABC = \angle A'B'C'$ или $\angle ABC = 180^\circ - \angle A'B'C'$;

2) $\angle BCA = \angle B'C'A'$ или $\angle BCA = 180^\circ - \angle B'C'A'$;

3) $\angle CAB = \angle C'A'B'$ или $\angle CAB = 180^\circ - \angle C'A'B'$.

Можно ли смело утверждать, что треугольники ABC и $A'B'C'$ подобны?

4. На доске записаны цифры 202520252025. Аня и Боря играют в игру, в которой каждый ход игрок стирает одну из цифр на доске и записывает вместо неё какую-то цифру, меньшую стёртой цифры. Аня ходит первой, а ходы выполняются по очереди. Проигрывает игрок, который больше не может сделать ход (все цифры стали нулями). Кто из игроков сможет выиграть при любой контригре соперника?



72-я Олимпиада Эстонии по математике

29 января 2025 г.

Региональный тур

10 класс

Время, отводимое для решения: 5 часов.

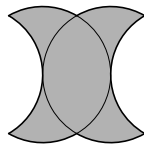
Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи даёт 7 баллов.

Вспомогательные письменные материалы или электронные приборы не разрешены.

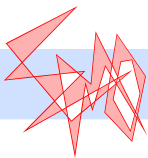
1. Расположи числа $7\sqrt{5}$, $11\sqrt{2}$ и $9\sqrt{3}$ в порядке возрастания.
2. У квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ два действительных решения, произведение которых равно 3. В этом уравнении меняют местами коэффициенты при квадратичном и свободном членах. Найти произведение решений нового уравнения.
3. Найти все тройки положительных целых чисел (x, y, z) , удовлетворяющие условию

$$xyz + 17xy + xz + 4yz + 17x + 68y + 4z = 2025.$$

4. Сапоги и куртка стоили вместе 300 евро до повышения цен. После повышения цен сапоги стали дороже на величину от 10 до 20 процентов от первоначальной стоимости, а куртка на величину от 30 до 40 процентов от первоначальной стоимости. После повышения цен куртка дороже сапог на величину от 70 до 90 евро. Найти наименьшее и наибольшее при этих условиях возможное значение цены сапог до повышения цен.
5. Показанная на рисунке буква «х» состоит из четырёх дуг окружности, которые попарно касаются друг друга в серединах дуг и попарно имеют по два общих конца. Две более длинные дуги равной длины и в 2 раза длиннее двух коротких дуг. Все дуги имеют радиус 1. Найти площадь области, покрытой буквой «х» (на рисунке закрашена в тёмный цвет).



6. Юра записывает в каждую клетку квадратной сетки размером 5×5 какое-то положительное действительное число так, что в левом нижнем углу записано 1, в правом верхнем углу — 2025, а в каждом квадрате 2×2 произведения чисел в клетках, соприкасающихся углами, равны. Найти произведение чисел, записанных в нижнем правом и верхнем левом углах сетки.



72-я Олимпиада Эстонии по математике

29 января 2025 г.

Региональный тур

11 класс

Время, отводимое для решения: 5 часов.

Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи даёт 7 баллов.

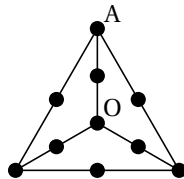
Вспомогательные письменные материалы или электронные приборы не разрешены.

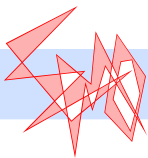
1. Какое из чисел $9\sqrt{5}$ и $8 + 7\sqrt{3}$ больше?
2. У Юры имеется игровое поле размером 10×10 , которое разделено на единичные квадраты. Он хочет сыграть в игру, которую можно проводить на любой квадратной сетке размером $m \times n$, где $m \geq 2$ и $n \geq 2$. Сколькими разными способами Юра может выбрать на своём поле область, подходящую для игры?
3. Найти все четырёхзначные натуральные числа n , для которых квадрат суммы двух двузначных чисел, составленных из первых двух и последних двух цифр числа n (без изменения порядка), равен числу n .
4. Найти все тройки действительных чисел (x, y, z) , которые удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} x + y = z, \\ y^2 + z^2 = x^2, \\ z^3 + x^3 = y^3. \end{cases}$$

5. Найти все положительные целые числа n , для которых на плоскости существует выпуклый n -угольник со следующими свойствами:
 - 1) существуют два внутренних угла разной величины, α и β ;
 - 2) каждый внутренний угол либо величины α , либо величины β ;
 - 3) сумма внутренних углов величины α равна сумме внутренних углов величины β .

6. На рисунке изображена сеть трамвайных линий города Х, где линии обозначены прямыми отрезками, а остановки — кружочками. Юра и его друзья играют в салки, где есть один убегающий и по крайней мере один ловящий. На каждом ходу все игроки одновременно решают, оставаться на месте или, воспользовавшись трамваем, переместиться на одну остановку по какому-либо маршруту в выбранном направлении. После каждого хода все узнают, какое решение приняли другие игроки и где они находятся. Если после хода хотя бы один ловящий оказывается на той же остановке, что и убегающий, то убегающий считается пойманным. Убегающий начинает с остановки А, а ловящие — с остановки О. Найти минимальное количество ловящих, при котором они смогут поймать убегающего за конечное число ходов, независимо от его передвижений.





72-я Олимпиада Эстонии по математике

29 января 2025 г.

Региональный тур

12 класс

Время, отводимое для решения: 5 часов.

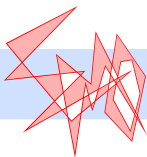
Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи даёт 7 баллов.

Вспомогательные письменные материалы или электронные приборы не разрешены.

1. Вычислить сумму

$$\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{6}} + \frac{1}{\sqrt{6}+\sqrt{7}} + \frac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{8}} + \frac{1}{\sqrt{8}+\sqrt{9}}.$$

2. Площадь треугольника ABC выражается формулой $S = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{4}$, где a , b и c — длины сторон BC , CA и AB , соответственно. Найти величину угла ACB .
3. Положительные целые числа a , b , c и d таковы, что $a > b > c > d$, числа $a + b$ и $c + d$ оба делятся на 2, числа $a - c$ и $b - d$ оба делятся на 3, а числа $a \cdot d$ и $b \cdot c$ оба делятся на 5. Найти наименьшую возможную сумму чисел a , b , c и d .
4. У Юры есть три плитки шоколада, каждая массой 60 г. В первый день Юра ломает первую плитку шоколада на три части, массы которых являются последовательными членами некоторой арифметической прогрессии, и съедает из этих кусочков два. Во второй день Юра ломает вторую плитку шоколада на такие же по массе части, как и в первый день, и съедает из полученных трёх кусочков два. В третий день Юра ломает третью плитку шоколада на такие же по массе части, как в предыдущие дни, и съедает из полученных трёх кусочков два. В четвёртый день Юра съедает все кусочки, оставшиеся за предыдущие три дня. При этом Юра съедает одинаковое количество шоколада в каждый из четырёх дней. Найти массу самого большого кусочка, получившегося при разломе плитки на три части.
5. Длины двух высот треугольника равны 3 см и 6 см. Найти все возможности, какой длины может быть третья высота треугольника.
6. В полуфиналах школьных соревнований по лёгкой атлетике на дистанции 100 метров всего участвуют 12 бегунов. Их случайным образом распределяют на три группы по 4 человека, при этом все варианты распределения равновероятны. Затем каждая группа участвует в одном забеге. В финал выходят 4 бегуна: победитель каждого забега и самый быстрый из тех, кто не выиграл свой забег. Найти вероятность того, что в финал выйдут бегуны, показавшие 4 лучших времени. (Предположим, что никакие два бегуна не показывают одинаковое время и что каждый бегун показывает фиксированное время, независимое от того, в какую группу он попал.)



Estonian Mathematical Olympiad No. 72

January 29, 2025

Regional round

Grade 8

Part I. Working time: 30 minutes.

Please write only answers here. An additional piece of paper is provided for solving.

A correct answer in simplified form to each question is worth 2 points.

Written materials or electronic devices are not permitted.

Code

1. Calculate:

$$\frac{1}{2} : \frac{2}{3} : \frac{3}{4} : \frac{4}{5} : \frac{5}{6} : \frac{6}{7} : \frac{7}{8} = \dots\dots\dots$$

2. How many ways are there to replace one digit in the number 2025 with another digit and obtain a four-digit number not divisible by 3?

.....

3. A team consists of three players whose ages are in the ratio 4 : 5 : 6. Their average age is 30 years. How old is the youngest player in this team?

.....

4. The values of variables a , b and c are distinct natural numbers such that the equality $a^2 \cdot b^2 \cdot c^2 = 2025$ holds. Find the largest possible value of the sum $a + b + c$.

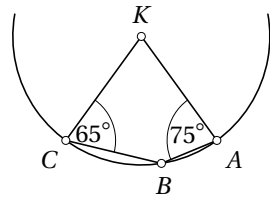
.....

5. The perimeter of a rectangle $ABCD$ is 60 cm. A point E is chosen on the longer side CD such that the length of the line segment DE is 8 cm. The broken line ADE is 3 times shorter than the broken line $ABCE$. Find the area of the rectangle $ABCD$.

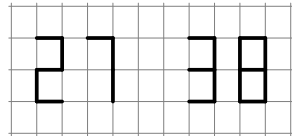
.....

6. Points A , B and C lie on a circle with centre K in the given order in such a way that $\angle KAB = 75^\circ$ and $\angle BCK = 65^\circ$. Find the size of the angle CKA .

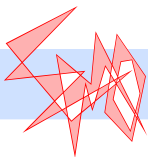
.....



7. On a sheet of paper that is split into equal rectangles, numbers 27 and 38 are written as shown in the diagram. The total length of the line segments needed for writing the number 27 is 27 cm. Find the total length of the line segments needed for writing the number 38.



.....



Estonian Mathematical Olympiad No. 72

January 29, 2025

Regional round

Grade 8

Part II. Working time: 3 hours.

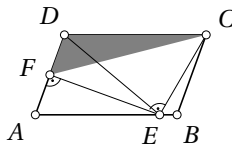
Please write your solutions to a separate paper.

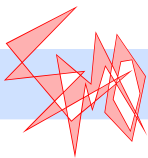
A correct and sufficiently explained solution to each problem is worth 7 points.

Just the answer is not enough!

Written materials or electronic devices are not permitted.

1. In the writing $ABC + DEF = GHI$, distinct letters are replaced with distinct digits in such a way that it becomes a true equality with three-digit numbers as the addends and the sum. Which digit does not correspond to any of the letters, if it is given that $A + E = 8$, $F \cdot I = 8$ and $G - B = 8$?
2. It is 8:25 right now. What time will the angle between the hour hand and the minute hand be 15° larger than now for the first time since now?
3. On a blackboard, 20 consecutive natural numbers are written. Then one of them is erased so that the sum of all remaining numbers is 2025. Find the erased number.
4. A point E is chosen on the longer side AB of a parallelogram $ABCD$ in such a way that $\angle CED = 90^\circ$, $\angle ADE = 2\angle CDE$ and $\angle DCE = 3\angle BCE$. The perpendicular drawn from the point E to the side AD is EF . Find the area of the triangle CDF , provided that the area of the triangle CDE is 24 cm^2 .





Estonian Mathematical Olympiad No. 72

January 29, 2025

Regional round

Grade 10

Working time: 5 hours.

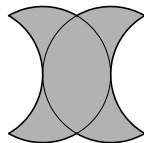
A correct and sufficiently explained solution to each problem is worth 7 points.

Written materials or electronic devices are not permitted.

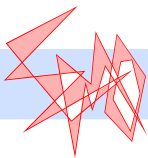
1. Put the numbers $7\sqrt{5}$, $11\sqrt{2}$ and $9\sqrt{3}$ in ascending order.
2. The quadratic equation $ax^2 + bx + c = 0$ has two real solutions whose product is 3. One swaps the leading coefficient and the constant term. Find the product of the solutions of the obtained equation.
3. Find all triples (x, y, z) of positive integers which satisfy the equation

$$xyz + 17xy + xz + 4yz + 17x + 68y + 4z = 2025.$$

4. Before a price increase, a pair of boots and a jacket cost 300 euros in total. After the price increase, the pair of boots costs 10 to 20 percent more than before and the jacket costs 30 to 40 percent more than before. After the price increase, the jacket costs 70 to 90 euros more than the pair of boots. Find the lowest and the highest possible price of the pair of boots before the price increase under these conditions.
5. The letter x in the figure has been formed out of four circle arcs. Two pairs of these arcs each possess two common endpoints and two pairs of these arcs touch in the midpoints of the arcs. Two longer arcs are of the same length which is twice the length of each of the shorter arcs. All arcs have radius 1. Find the area of the letter x (coloured grey in the figure).



6. Johnny writes a positive real number into every cell of a 5×5 table in such a way that the cell in the bottom left corner contains 1, the cell in the top right corner contains 2025, and in every 2×2 square, products of the numbers written in the pairs of cells meeting cornerwise are equal. Find the product of the numbers written in the cells in the bottom right and top left corners.



Estonian Mathematical Olympiad No. 72

January 29, 2025

Regional round

Grade 11

Working time: 5 hours.

A correct and sufficiently explained solution to each problem is worth 7 points.

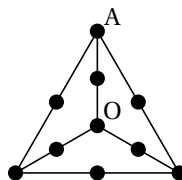
Written materials or electronic devices are not permitted.

1. Which of the numbers $9\sqrt{5}$ and $8 + 7\sqrt{3}$ is larger?
2. Johnny has a game board of dimensions 10×10 split into unit squares. Johnny wishes to play a game which can be played on any grid of dimensions $m \times n$ where $m \geq 2$ and $n \geq 2$. How many ways can Johnny choose a section of his game board where to play his game in?
3. Find all four-digit natural numbers n that are equal to the square of the sum of the two-digit number consisting of the first two digits of n and the two-digit number consisting of the last two digits of n (maintaining the order of digits).
4. Find all triples (x, y, z) of real numbers satisfying the system of equations

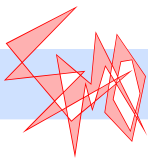
$$\begin{cases} x + y = z, \\ y^2 + z^2 = x^2, \\ z^3 + x^3 = y^3. \end{cases}$$

5. Find all positive integers n for which there exists a convex n -gon on the plane with the following properties:
 - 1) some two interior angles have distinct sizes α and β ;
 - 2) each interior angle is of size either α or β ;
 - 3) the sum of interior angles of size α equals the sum of interior angles of size β .

6. In the diagram, there are all tramway lines of city X, the straight lines depicting the lines and the bubbles depicting the stops. Johnny and his friends play a chase game involving at least one chaser and exactly one escaper. In each move, all players decide simultaneously whether to stay still or move one stop along any line in any direction.



After the move, all players learn what the others decided and where they are. If at least one chaser is at the same stop as the escaper then the escaper is caught. The escaper starts at stop A and all chasers start at stop O. Find the least number of chasers sufficient for catching the escaper in a finite number of moves, regardless of the decisions made by the escaper.



Eesti 72. matemaatikaolümpiaad

29. jaanuar 2025

Piirkonnavoor

7. klass

I osa vastused

- 22.
- 33.
- 23 aastat.
- 7.
- 225 cm^2 .
- 20° .
- 9,5 cm.

Lahendused

1.

$$\begin{aligned}7 \cdot 6 : \left(1 + \frac{2}{3 - \frac{4}{5}}\right) &= 42 : \left(1 + \frac{2}{\frac{15-4}{5}}\right) = 42 : \left(1 + \frac{10}{11}\right) = 42 : \frac{11+10}{11} = \\ &= 42 \cdot \frac{11}{21} = 2 \cdot 11 = 22.\end{aligned}$$

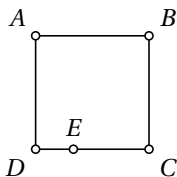
2. Algteguriteks lahutamine annab $2025 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5$. Need 6 algtegurit tuleb jaotada arvude a, b, c, d, e vahel nii, et kõik 5 arvu oleksid erinevad. Ilmselt peab mõnesse neist arvudest minema vähemalt 2 algtegurit. Vaatame erinevaid juhtusid.

- Kui mõnesse arvu läheks 3 või enam algtegurit, siis tuleb ülejäänud kuni 3 algtegurit jaotada ülejäänud 4 arvu vahel, mis tähendab, et vähemalt üks arv jääks ilma ühegi algtegurita ehk peaks võrduma arvuga 1. Kuna arvud peavad olema erinevad, siis ei saa mitut arvu 1 olla. Järelikult peab ülejäänud 3 arvu igauks sisaldama täpselt ühe algteguri. Kuid meil on kasutada ainult 2 erinevat algtegurit. Vastuolu näitab, et igauks arvudest a, b, c, d, e sisaldab ülimalt 2 algtegurit.
- Kui arve, mis sisaldavad 2 algtegurit, oleks 3, siis ülejäänud 2 arvu oleksid võrdsed arvuga 1, mis pole võimalik.
- Kui arve, mis sisaldavad 2 algtegurit, on 2, siis ülejäänud 3 arvu peavad olema 1, 3 ja 5. Seega esimese kahe arvu moodustamiseks on kasutada algtegurid 3, 3, 3, 5. Ainus võimalus nad kahekaupa kokku panna nii, et korrutised oleksid erinevad, on $3 \cdot 3$ ja $3 \cdot 5$. Seega a, b, c, d, e on 1, 3, 5, 9, 15 mingis järjestuses, mis annab $a + b + c + d + e = 33$.

- Kui arve, mis sisaldavad 2 algtegurit, oleks 1, siis jääks vähemalt kaks algtegurit 3 üle, mistõttu ülejäänud arvude seas esineks arv 3 korduvalt. Vastuolu näitab, et ka see juht pole võimalik.

Kokkuvõttes on $a + b + c + d + e = 33$ ainus võimalus.

3. Kuna 4 mängija keskmine vanus on 25 aastat, siis nende mängijate vanuste summa on $4 \cdot 25$ ehk 100 aastat. Kui noorima mängija vanus oleks 35 aastat, siis oleks mängijate keskmine vanus 28 aastat, mis teeks vanuste summaks $4 \cdot 28$ ehk 112 aastat. Seega noorima mängija vanuse muutmine kasvataks vanuste summat $112 - 100$ ehk 12 aasta võrra. Järelikult noorima mängija vanus on $35 - 12$ ehk 23 aastat.
4. Number y saab olla kas 0 või 5, et arv jaguks 5-ga. Kui $y = 0$, siis x saab olla 0, 3, 6 või 9, et arvu ristsumma ja seega ka arv ise jaguks 3-ga. Kui $y = 5$, siis analoogselt saab x olla 1, 4 või 7. Kokku saame 4 + 3 ehk 7 võimalust.
5. Murdjoonte ADE ja BCE pikkuste summa on 45 cm. Need kaks murdjoont aga moodustavad kokku parajasti ruudu kolm külge (joonis 1). Seega ruudu küljepikkus on 15 cm ja pindala 225 cm^2 .



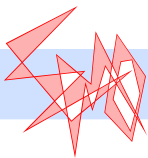
Joonis 1

6. Kolmnurgas, mille alusnurga suurus on 3α , on tipunurga suurus $180^\circ - 6\alpha$. Kolmnurgas, mille alusnurga suurus on 4α , on tipunurga suurus $180^\circ - 8\alpha$. Kuna kolm tipunurka moodustavad kokku sirgnurka, siis

$$(180^\circ - 6\alpha) + 5\alpha + (180^\circ - 8\alpha) = 180^\circ,$$

millest $9\alpha = 180^\circ$ ehk $\alpha = 20^\circ$.

7. Numbri 4 kirjutamisel tõmmatakse 1 horisontaalne lõik ja 3 vertikaalset lõiku, numbri 6 kirjutamisel 3 horisontaalset lõiku ja 3 vertikaalset lõiku. Seega numbri 6 kirjutamisel tõmmatakse 2 horisontaalset lõiku rohkem ja vertikaalseid lõike samapalju kui numbri 4 kirjutamisel. Seega 2 horisontaalse lõigu kogupikkus on 5 cm, mis teeb horisontaalse lõigu pikkuseks 2,5 cm. Järelikult 3 vertikaalse lõigu kogupikkus on 10,5 cm, mis teeb vertikaalse lõigu pikkuseks 3,5 cm. Numbri 7 kirjutamiseks tõmmatakse 1 horisontaalne lõik ja 2 vertikaalset lõiku, mille kogupikkus on 9,5 cm.



Eesti 72. matemaatikaolümpiaad

29. jaanuar 2025

Piirkonnavoor

8. klass

I osa vastused

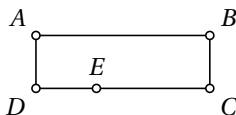
- 2.
- 26.
- 24 aastat.
- 19.
- 161 cm^2 .
- 80° .
- 40,5 cm.

Lahendused

- $$\frac{1}{2} : \frac{2}{3} : \frac{3}{4} : \frac{4}{5} : \frac{5}{6} : \frac{6}{7} : \frac{7}{8} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{7}{6} \cdot \frac{8}{7} = \frac{1}{2} \cdot \frac{8}{2} = \frac{8}{4} = 2.$$
- Kuna arv 2025 jagub arvuga 3, siis asendamiseks sobivad parajasti need numbrid, mis annavad jagamisel arvuga 3 jäägiks midagi muud kui asendatav number. Esimese numbri 2 asendamiseks sobivad numbrid 1, 3, 4, 6, 7, 9. Teise numbri 2 asendamiseks sobib lisaks number 0. Samad numbrid sobivad numbri 5 asendamiseks. Numbri 0 asendamiseks sobivad numbrid 1, 2, 4, 5, 7, 8. Kokku on $6 + 7 + 7 + 6$ ehk 26 võimalust.
- Olgu kolme mängija vanused $4x$, $5x$ ja $6x$ aastat. Kuna nende mängijate keskmine vanus on 30 aastat, siis $\frac{4x + 5x + 6x}{3} = 30$, kust $15x = 90$ ehk $x = 6$. Seega noorima mängija vanus on $4 \cdot 6$ ehk 24 aastat.
- Algteguriteks lahutamine annab $2025 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5$. Need algtegurid tuleb jaotada kahe ühesuguse teguri kaupa arvude a^2 , b^2 ja c^2 vahel nii, et kõik 3 arvu oleksid erinevad. Vaatame erinevaid juhtusid.
 - Kui mõni arvudest sisaldaks kõik algtegurid, siis ülejäänud oleksid võrdsed arvuga 1, mis pole lubatud.
 - Kui mõni arvudest sisaldab kaks paari algtegureid, siis need paarid saavad olla kas $3 \cdot 3, 3 \cdot 3$ või $3 \cdot 3, 5 \cdot 5$. See arv oleks siis vastavalt 81 või 225. Ülejäänud kaks arvu oleksid vastavalt 25 ja 1 või 9 ja 1. Muutujate a , b ja c väärtused oleksid kas 9, 5 ja 1 või 15, 3 ja 1, mis teeb avaldise $a + b + c$ väärtuseks vastavalt 15 või 19. Suurem neist on 19.
 - Kui ükski arvudest ei sisalda kaht paari algtegureid, siis oleksid kaks arvu võrdset 3 \cdot 3, mis pole lubatud.

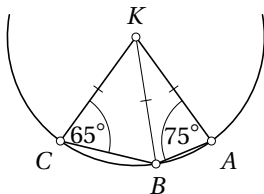
Seega $a + b + c$ suurim võimalik väärtus on 19.

5. Murdjooned ADE ja $ABCE$ katavad ühtekokku ristküliku $ABCD$ kõik küljed (joonis 2). Seega on nende murdjoonte pikkuste summa võrdne ümbermõõduga 60 cm. Kuna murdjoon ADE on 3 korda lühem kui murdjoon $ABCE$, siis murdjoonte ADE ja $ABCE$ pikkused moodustavad ristküliku $ABCD$ ümbermõõdust vastavalt $\frac{1}{4}$ ja $\frac{3}{4}$, mis teeb nende pikkusteks vastavalt 15 cm ja 45 cm. Murdjoon ADE aga koosneb ristküliku lühemast küljest AD ja lõigust DE pikkusega 8 cm. Seega lühem külg on pikkusega 7 cm. Pikem külg peab siis olema pikkusega 23 cm. Küljepikkustest leiame ristküliku pindala 161 cm^2 .

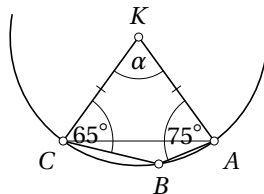


Joonis 2

6. *Lahendus 1.* Kuna punktid A, B, C asuvad ringjoonel keskpunktiga K , siis $|KA| = |KB| = |KC|$ (joonis 3). Võrdhaarsest kolmnurgast KAB saame $\angle KBA = \angle KAB = 75^\circ$, võrdhaarsest kolmnurgast KBC samamoodi $\angle KBC = \angle KCB = 65^\circ$. Seega $\angle ABC = \angle 75^\circ + 65^\circ = 140^\circ$. Nelinurgast $KABC$ saame nüüd $\angle CKA = 360^\circ - 75^\circ - 65^\circ - 140^\circ = 80^\circ$.



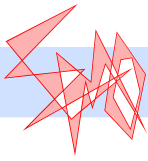
Joonis 3



Joonis 4

Lahendus 2. Tähistame $\angle CKA = \alpha$. Samale kõõlule AC toetuva keskja piirdenurga vahelise seose põhjal peab kehtima kas $\angle ABC = \frac{1}{2}\alpha$ või $\angle ABC = 180^\circ - \frac{1}{2}\alpha$. Esimesel juhul saame nelinurga $KABC$ sisenurkadest võrrandi $75^\circ + 65^\circ + (360^\circ - \alpha) + \frac{1}{2}\alpha = 360^\circ$, kust $\frac{1}{2}\alpha = 140^\circ$ ehk $\alpha = 280^\circ$, mis pole võimalik. Teisel juhul (joonis 4) saame analoogselt võrrandi $75^\circ + 65^\circ + \alpha + \left(180^\circ - \frac{1}{2}\alpha\right) = 360^\circ$, kust $\frac{1}{2}\alpha = 40^\circ$ ehk $\alpha = 80^\circ$.

7. Arvu 27 kirjutamisel tõmmatakse kokku 4 horisontaalset lõiku ja 4 vertikaalset lõiku. Arvu 38 kirjutamisel tõmmatakse kokku 6 horisontaalset lõiku ja 6 vertikaalset lõiku. Seega on arvu 38 kirjutamisel tõmmatavate lõikude kogupikkus 1,5 korda suurem kui arvu 27 kirjutamisel. Kuna arvu 27 kirjutamisel tõmmatavate lõikude kogupikkus on 27 cm, siis arvu 38 kirjutamisel tõmmatavate lõikude kogupikkus on $1,5 \cdot 27$ cm ehk 40,5 cm.



Eesti 72. matemaatikaolümpiaad

29. jaanuar 2025

Piirkonnavor

9. klass

I osa vastused

- 20.
- 2.
- 30 aastat.
- 28.
- 100° .
- 54° ehk $\frac{3}{10}\pi$.
- 417 mm.

Lahendused

1.

$$\frac{3636 \cdot 4545}{909^2} = \frac{(4 \cdot 909) \cdot (5 \cdot 909)}{909 \cdot 909} = 4 \cdot 5 = 20.$$

2. Algteguriteks lahutamisel saame $2025 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5$. Taandades kõik 2025 algtegurid, saame

$$\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10}{2025} = 1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 4 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 1 \cdot 2 = 2 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 2.$$

Korrutiseks saadava arvu viimane number on 2.

3. Kuna kahe noorima mängija keskmine vanus on 20 aastat ning mängijate vanused on erinevad ja neid arvestatakse täisaastates, siis vanuselt neljanda mängija vähim võimalik vanus on 21 aastat. Samuti leiame, et vanuselt kolmanda mängija suurim võimalik vanus on 24 aastat. Seega vanuselt kolmanda mängija vanus võib olla 24, 23 või 22 aastat.

- Kui vanuselt kolmanda mängija vanus on 24 aastat, siis vanuselt teise ja vanima mängija vanused peavad olema vastavalt 25 ja 26 aastat.
- Kui vanuselt kolmanda mängija vanus on 23 aastat, siis vanuselt teise ja vanima mängija vanused võivad olla kas 25 ja 27 või 24 ja 28 aastat.
- Kui vanuselt kolmanda mängija vanus on 22 aastat, siis arvestades, et mida noorem on vanuselt teine mängija, seda vanem on vanim mängija, saame vanuselt teise mängija vähimaks võimalikuks vanuseks 23 aastat ja vanima mängija suurimaks võimalikuks vanuseks 30 aastat.

Seega vanima mängija suurim võimalik vanus on 30 aastat.

4. Kui otsitav neljakohaline arv algab numbriga 2, siis peab sajaliste number olema 0. Teine number 2 saab esineda kas kümnelistes või ühelistes. Kui number 2 on kümnelistes, siis ühelistes saab olla kas 4, 3 või 1, kokku 3 võimalust. Kui number 2 on ühelistes, siis kümnelistes saab olla vaid 1, kokku 1 võimalus. Seega niisuguseid võimalusi on kokku $3 + 1$ ehk 4.

Otsitav neljakohaline arv saab alata veel ka numbriga 1. Siis on 3 võimalust valida järgud, kus paiknevad numbrid 2: sajalistes ja kümnelistes; sajalistes ja ühelistes; kümnelistes ja ühelistes. Sõltumata sellest valikust saab järelejäänud numbrikohal olla üks kasutamata 8 numbrist. Seega niisuguseid võimalusi on kokku $3 \cdot 8$ ehk 24.

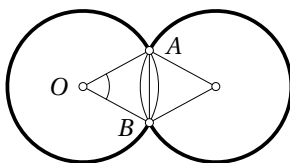
Kokku saame $4 + 24$ ehk 28 võimalust.

5. Olgu $\angle BAD = \alpha$. Ülesande tingimuste põhjal $\angle ABC = \angle BAC = 2\alpha$ ja $\angle ADB = 6\alpha$. Kolmnurga ABD sisenurkadest saame võrrandi

$$\alpha + 6\alpha + 2\alpha = 180^\circ$$

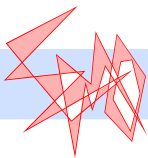
ehk $9\alpha = 180^\circ$, kust $\alpha = 20^\circ$. Järelikult $\angle ABC = \angle BAC = 2 \cdot 20^\circ = 40^\circ$ ja $\angle ACB = 180^\circ - 2 \cdot 40^\circ = 100^\circ$.

6. Moodustagu kesknurk AOB täispöördest osa x . Siis jämeda joone osa ringjoonel keskpunktiga O moodustab ringjoonest osa $1 - x$. Et selle ringjoone pikkus on 10π cm, siis jämeda joonega tõmmatud osa pikkus sel ringjoonel on $(1 - x) \cdot 10\pi$ cm. Teisel ringjoonel on jämeda joonega tõmmatud osa niisama pikk, sest ringjooned on võrdsed ning kõõlu AB pikkus on sama (joonis 5). Seega eelnevalt leitud jämeda joone osa pikkus on $\frac{17}{2}\pi$ cm. Saame võrrandi $(1 - x) \cdot 10\pi = \frac{17}{2}\pi$, kust $x = \frac{3}{20}$. Seega $\angle AOB = \frac{3}{20} \cdot 360^\circ = 54^\circ$.



Joonis 5

7. Numbriga 9 kirjutamisel tõmmatakse 3 horisontaalset ja 3 vertikaalset lõiku, numbriga 7 kirjutamisel 1 horisontaalne lõik ja 2 vertikaalset lõiku ning numbriga 3 kirjutamisel tõmmatakse 3 horisontaalset ja 2 vertikaalset lõiku. Seega tõmmatakse arvu 973 kirjutamisel kokku 7 horisontaalset ja 7 vertikaalset lõiku, mille kogupikkus on ülesande tingimuse põhjal 973 mm. Numbriga 9 kirjutamisel tõmmatud 3 horisontaalset ja 3 vertikaalset lõiku moodustavad kogupikkusest $\frac{3}{7}$, mis teeb 417 mm.



II osa lahendused

1. (Maksim Ivanov)

Kommipakis on ainult punased, kollased, sinised ja rohelised kommid. Kolmandik kõigist kommidest on punased. Neljandik ülejäänud kommidest on kollased. Siniseid komme on pakis 1,5 korda rohkem kui rohelisi. Mitu kommi on selles pakis kokku, kui punaseid komme on seal 60 võrra rohkem kui rohelisi?

Vastus: 450.

Lahendus. Olgu kommide arv x . Siis $\frac{1}{3}x$ kommi on punased ja $\frac{2}{3}x$ kommi mingit muud värvi. Viimastest $\frac{1}{4}$ on kollased, mis tähendab, et kollaste kommide arv on $\frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3}x$ ehk $\frac{1}{6}x$. Punaste ja kollaste kommide koguarv on $\frac{1}{3}x + \frac{1}{6}x$ ehk $\frac{1}{2}x$. Seega ka siniste ja roheliste kommide koguarv on $\frac{1}{2}x$. Rohelisi komme on 60 võrra vähem kui punaseid ehk $\frac{1}{3}x - 60$. Siniseid komme on järelikult $\frac{3}{2} \cdot \left(\frac{1}{3}x - 60\right)$ ehk $\frac{1}{2}x - 90$. Kuna siniste ja roheliste kommide koguarv on $\frac{1}{2}x$ ja siniseid on $\frac{1}{2}x - 90$, siis rohelisi komme peab olema 90. Nüüd saame punaste kommide arvuks $90 + 60$ ehk 150. Kogu paki kommide arv on järelikult $3 \cdot 150$ ehk 450.

2. (Maksim Ivanov)

Nimetame naturaalarvu *imeilusaks*, kui ta on viiekohaline ja tema numbrite summa jagub arvuga 7.

Leia suurim selline imeilus arv, millele mingi neljakohalise arvu liitmisel saame summaks samuti imeilusa arvu.

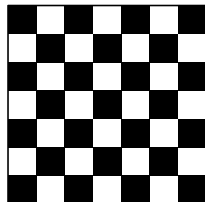
Vastus: 98990.

Lahendus. Suurim viiekohaline arv on 99999, mille numbrite summa 45 annab jagamisel arvuga 7 jäägi 3. Järelikult vähendades üheliste numbrit 3 võrra, saame suurima imeilusa arvu 99996.

Arv, millele neljakohalise arvu liitmisel saame imeilusa arvu, on sellest vähemalt 1000 võrra väiksem ehk ülimalt 98996. Selle arvu numbrite summa 41 annab jagamisel arvuga 7 jäägi 6. Vähendades üheliste numbrit 6 võrra, saame arvu 98990, mis on suurim imeilus arv, mis pole suurem arvust 98996. Kuna arvule 98990 neljakohalise arvu 1006 liitmisel saame imeilusa arvu 99996, siis 98990 ongi otsitav arv.

3. (Maksim Ivanov)

Joonisel on ruudustik mõõtmetega 7×7 , mille ühikruudud on värvitud malekorras mustaks ja valgeks. Sellest ruudustikust tuleb välja lõigata kujund, mis koosneb tervetest ühikruutudest, ei lagune osadeks ega sisalda auke. Selles kujundis peab olema 2 korda rohkem valgeid ühikruute kui musti. Leia suurima väljalõikamiseks sobiva kujundi pindala.

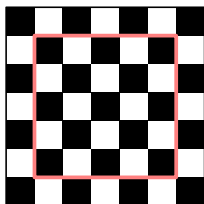


Vastus: 33.

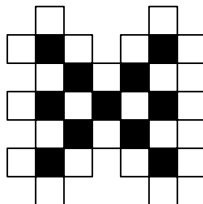
Lahendus. Ruudustikul on kokku 49 ühikruutu, neist 25 on mustad ja 24 valged. Kuna väljalõigatavas kujundis peab olema 2 korda rohkem valgeid ühikruute kui musti, siis mustade ühikruutude arv selles kujundis ei saa olla suurem kui $\frac{24}{2}$ ehk 12.

Kui mustade ühikruutude arv väljalõigatavas kujundis oleks 12, siis peaks väljalõigatav kujund sisaldama kõik valged ühikruudud. Aga et kujundis ei oleks auke, peab kujund sisaldama kõik sellised mustad ühikruudud, mida kõigist neljast küljest piirab valge ühikruut. Sellised on kõik mustad ühikruudud 5×5 alal, mis ei piirne ruudustiku ühegi servaga (joonisel 6 ümbritsetud jämeda punase joonega). Sel alal on aga kokku 13 musta ühikruutu. Vastuolu näitab, et mustade ühikruutude arv väljalõigatavas kujundis ei saa olla 12.

Üks väljalõikamiseks sobiv kujund, milles on 11 musta ja 22 valget ruutu, on näidatud joonisel 7. Suurim võimalik väljalõikamiseks sobiva kujundi pindala võrdub selle kujundi pindalaga 33.



Joonis 6



Joonis 7

4. (Maksim Ivanov)

Tabelis on 2 rida ja 2025 veergu. Esimese rea lahtritesse kirjutatakse arvud 2, 3, 4 ja 6, seejärel jälle arvud 2, 3, 4 ja 6, siis jälle samad arvud jne. Teise rea lahtritesse kirjutatakse järjestikused naturaalarvud alates arvust 7. Mitu veergu, mille lahtrites olevate arvude summa jagub arvuga 10, on selles tabelis?

2	3	4	6	2	3	4	6	2	...
7	8	9	10	11	12	13	14	15	...

Vastus: 101.

Lahendus 1. Summa jagub arvuga 10 parajasti siis, kui tema viimane number on 0. Viimane number sõltub ainult liidetavate viimastest numbritest. Esimese rea arv kordub iga 4 lahtri järel, teise rea arvu viimane number kordub iga 10 lahtri järel. Kuna 20 on arvude 4 ja 10 ühiskordne, siis summa viimane number kordub iga 20 veeru järel.

Arvutame välja 20 esimese summa viimased numbrid (alloleva tabeli kolmandas reas; teise rea arvudest on lihtsuse mõttes kümnelised ära jäetud):

2	3	4	6	2	3	4	6	2	3	4	6	2	3	4	6	2	3	4	6
7	8	9	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1	2	3	4	5	6
9	1	3	6	3	5	7	0	7	9	1	4	1	3	5	8	5	7	9	2

Seega igas 20 järjestikuses veerus tekib täpselt 1 summa, mis jagub arvuga 10. Tabeli esimese 2020 veeru seas on järelikult $\frac{2020}{20}$ ehk 101 sellist, kus summa jagub arvuga 10. Lisaks on tabelis veel 5 veergu, milles summa viimased numbrid on samad nagu 5 esimeses veerus. Kuna neis viimane number 0 ei esine, siis on kogu tabelis kokku 101 veergu, mille lahtrites olevate arvude summa jagub arvuga 10.

Lahendus 2. Jaotame veerud 4-kaupa rühmadesse alates esimesest (joonisel 8 siniste püstjoontega eraldatud). Esimese rea arvud on kõigis rühmades ühesugused. Teise rea arvud on igas järgmises rühmas 4 võrra suuremad, nii et paaritud ja paarisarvud vahelduvad, alustades paaritu arvuga. Kuna esimeses, teises ja kolmandas veerus on üks paaris ja üks paaritu arv, siis nii on

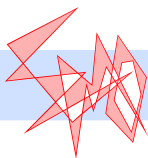
2	3	4	6		2	3	4	6		2	...
7	8	9	10		11	12	13	14		15	...

Joonis 8

ka iga järgmise veerurühma esimeses kolmes veerus. Sellised veerud annavad summaks paaritu arvu, mis ei saa jaguda paarisarvuga 10. Seega piisab uurida rühmade neljandaid veerge. Esimese rühma neljanda veeru arvude summa on 16 ja kuna esimese rea arvud on kõigis vaadeldavais veergudes samad, siis suureneb summa igas järgnevas rühmas 4 võrra. Need summad on

$$16, 20, 24, 28, 32, 36, 40, 44, \dots$$

Arvuga 10 jaguv summa esineb tsükliliselt, kus tsükli pikkus on 5. Täpsemalt nähtub neist summadest, et veerurühmades järjekorranumbritega 2, 7, 12, ... esineb üks arvuga 10 jaguv arv ja teistes ei esine. Esimesed 2020 veergu jagunevad $\frac{2020}{4}$ ehk 505 rühma ja neist seega $\frac{505}{5}$ ehk 101 rühmas esineb üks arvuga 10 jaguv arv. Järgnevas veerurühmas järjekorranumbriga 506 ega ka ülejäävas üksikus veerus sellist summat ei teki. Järelikult on kogu tabelis kokku 101 veergu, milles olevate arvude summa jagub arvuga 10.



II osa lahendused

1. (Maksim Ivanov)

Kirjutises $ABC + DEF = GHI$ asendatakse erinevad tähed erinevate numbritega nii, et tekiks tõene võrdus, kus liidetavad ja summa on kolmekohalised arvud. Milline number ei vasta ühelegi tähele, kui lisaks on teada, et $A + E = 8$, $F \cdot I = 8$ ja $G - B = 8$?

Vastus: 0.

Lahendus 1. Lihtsuse mõttes nimetame võrdust $ABC + DEF = GHI$ edaspidi põhivõrduseks.

Võrdus $G - B = 8$ annab võimalused $G = 8, B = 0$ ja $G = 9, B = 1$. Juhul $G = 8, B = 0$ aga järelduks põhivõrduse sajaliste järgust, et $A + D = 8$, sest kümnelistest saaks ülekanne tekkida vaid juhul $E = 9$, mis on vastuolus võrdusega $A + E = 8$. Kuid ka $A + D = 8$ on vastuolus võrdusega $A + E = 8$, sest D ja E ei saa olla sama number. Seega ainus võimalus on $G = 9, B = 1$. Kuna $B = 1$, siis $F \neq 1, I \neq 1$. Järelikult annab võrdus $F \cdot I = 8$ vaid võimalused $F = 2, I = 4$ ja $F = 4, I = 2$. Juhul $F = 2, I = 4$ aga saaksime põhivõrduse üheliste järgust $C = 2$, mis ei sobi, sest C ja F ei saa olla sama number. Seega ainus võimalus on $F = 4, I = 2$.

Nüüd saame põhivõrduse ühelistest $C = 8$ ja kuna tekib ülekanne, siis kümnelistest $B + E + 1 = H$ ehk $E + 2 = H$. Kuna numbrid 1, 2, 4, 8, 9 on kasutatud, siis jäävad sõelale võimalused $E = 3, H = 5$ ja $E = 5, H = 7$. Juhul $E = 3, H = 5$ saaksime võrdusest $A + E = 8$, et $A = 5$, mis ei sobi, sest A ja H ei saa olla sama number. Seega ainus võimalus on $E = 5, H = 7$. Võrdusest $A + E = 8$ saame nüüd $A = 3$ ning lõpuks saame põhivõrdusest $D = 6$. Kasutamata jääb number 0.

Lahendus 2. Nagu lahenduses 1 toome sisse põhivõrduse mõiste.

Näitame, et ühtki tähte ei asendata numbriga 0. See on selge põhivõrduse arvude sajaliste A, D, G korral. Võrduse $F \cdot I = 8$ tõttu ei saa ka F ja I võrduda nulliga. Samuti ei saa nulliga võrduda C , sest juhul $C = 0$ oleks põhivõrduse ühelistes F ja I võrdsed. Jäävad läbi uurida põhivõrduse kümnelistes esinevad tähed.

- Kui oleks $B = 0$, siis võrdusest $G - B = 8$ saaksime $G = 8$. Põhivõrduse sajalistest aga $A + D = 8$, sest kümnelistest saaks ülekanne tekkida vaid juhul $E = 9$, mis on vastuolus võrdusega $A + E = 8$. Kuid ka $A + D = 8$ on vastuolus võrdusega $A + E = 8$, sest D ja E ei saa olla sama number.

- Kui oleks $E = 0$, siis võrdus $A + E = 8$ annaks $A = 8$. Põhivõrduse sajalistest saaksime ainsa võimalusena $D = 1$, $G = 9$. Kuna aga võrdus $G - B = 8$ annaks ka $B = 1$, siis D ja B oleksid sama number, vastuolu.
- Kui oleks $H = 0$, siis põhivõrduse kümnelistest saame $B + E = 9$ või $B + E = 10$ (vastavalt sellele, kas ühelistest tekib ülekanne või mitte). Koos võrdusega $G - B = 8$ annavad need vastavalt kas $G + E = 17$ või $G + E = 18$. Kuid võrdusest $A + E = 8$ tulenevalt $E \neq 9$ ja $E \neq 8$, sest $A \neq 0$. Seega $E \leq 7$ ja kumbki võrdustest $G + E = 17$ ja $G + E = 18$ ei saa kehtida.

Seega number 0 peab jääma kasutamata.

2. (Maksim Ivanov)

Praegu näitab kell 8:25. Millist aega näitab kell, kui esmakordselt pärast praegust hetke on tunni- ja minutiosuti vaheline nurk 15° võrra suurem kui praegu?

Vastus: 9:05.

Lahendus. Kuna 12 tunniga teeb minutiosuti 12 täisringi ja tunniosuti 1 täisringi samas suunas, muutub nurk tunni- ja minutiosuti vahel selle aja jooksul $11 \cdot 360^\circ$ võrra. Seega tunnis muutub nurk tunni- ja minutiosuti vahel $\frac{11}{12} \cdot 360^\circ$ ehk 330° võrra.

Kui kell näitab 8:00, siis on nurk tunniosutist minutiosutini vastupäeva mõõdetuna 240° ja see on vähenemas. Kui kell on 8:25, on möödunud 25 minutit ehk $\frac{5}{12}$ tundi, mistõttu nurk on $240^\circ - \frac{5}{12} \cdot 330^\circ$ ehk $102,5^\circ$. Edasi nurk tunni- ja minutiosuti vahel väheneb nullini ja hakkab uuesti kasvama. Seega hetkeks, kui esmakordselt on tunni- ja minutiosuti vaheline nurk 15° võrra suurem, on nurk tunni- ja minutiosuti vahel muutunud $2 \cdot 102,5^\circ + 15^\circ$ ehk 220° võrra. See moodustab $\frac{2}{3}$ tunni jooksul toimuvast nurga muutusest.

Seega vaadeldavaks hetkeks on möödunud $\frac{2}{3}$ tundi ehk 40 minutit. Kell näitab siis 9:05.

3. (Maksim Ivanov)

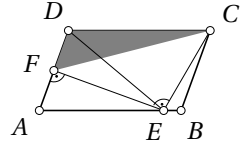
Tahvlile kirjutatakse 20 järjestikust naturaalarvu. Seejärel kustutatakse neist üks arv nii, et järelejäänud arvude summa on 2025. Leia kustutatav arv.

Vastus: 105.

Lahendus. Olgu need 20 järjestikust naturaalarvu $n, n + 1, \dots, n + 19$. Nende summa on $20n + (1 + 2 + \dots + 19)$ ehk $20n + 190$. Olgu kustutatav arv $n + x$, kus $x = 0, 1, \dots, 19$. Siis $(20n + 190) - (n + x) = 2025$ ehk $19n = 1835 + x$. Kuna arv $19n$ jagub arvuga 19, siis ka arv $1835 + x$ peab jaguma arvuga 19. Et aga $1835 = 96 \cdot 19 + 11$, siis x peab jagamisel arvuga 19 andma jäägi 8. Tehtud valikute tõttu on see võimalik vaid juhul $x = 8$. See annab $19n = 97 \cdot 19$ ehk $n = 97$. Seega kustutatav arv on $97 + 8$ ehk 105.

4. (Maksim Ivanov)

Rööpküliku $ABCD$ pikemal küljel AB valitakse sel-
line punkt E , et $\angle CED = 90^\circ$, $\angle ADE = 2\angle CDE$
ja $\angle DCE = 3\angle BCE$. Punktist E tõmmatakse külje-
le AD ristlõik EF . Leia kolmnurga CDF pindala, kui
kolmnurga CDE pindala on 24 cm^2 .



Vastus: 12 cm^2 .

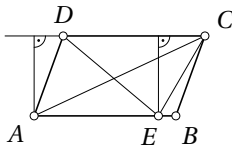
Lahendus. Olgu $\angle BCE = \alpha$. Siis $\angle DCE = 3\alpha$ ja $\angle CDE = 90^\circ - 3\alpha$, mistõttu
 $\angle ADE = 2(90^\circ - 3\alpha) = 180^\circ - 6\alpha$. Seega $\angle BCD = \angle BCE + \angle DCE = 4\alpha$ ja
 $\angle CDA = \angle CDE + \angle ADE = 270^\circ - 9\alpha$. Kuna BCD ja CDA on rööpküliku
lähisnurgad, siis $4\alpha + (270^\circ - 9\alpha) = 180^\circ$, kust $5\alpha = 90^\circ$ ehk $\alpha = 18^\circ$.

Sellest tulenevalt $\angle ADE = 180^\circ - 6 \cdot 18^\circ = 72^\circ$, samas aga ka

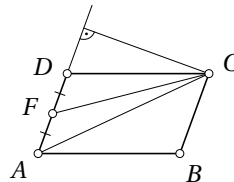
$$\angle DAE = \angle DAB = \angle BCD = 4 \cdot 18^\circ = 72^\circ.$$

Järelikult kolmnurk ADE on võrdhaarne tipunurgaga E juures, mistõttu ti-
pust E küljele AD tõmmatud ristlõik EF poolitab külje AD .

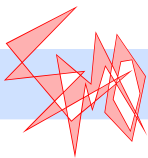
Kolmnurga CDE pindala võrdub kolmnurga CDA pindalaga, sest mõle-
mal kolmnurgal on alus CD ja sellele joonestatud kõrgus sama (joonis 9).
Seega kolmnurga CDA pindala on 24 cm^2 . Eelneva põhjal aga moodustab
kolmnurga CDF pindala poole kolmnurga CDA pindalast, sest kõrgused on
ühised, alus aga poole lühem (joonis 10). Järelikult kolmnurga CDF pindala
on $\frac{1}{2} \cdot 24 \text{ cm}^2$ ehk 12 cm^2 .



Joonis 9



Joonis 10



II osa lahendused

1. (Aleksei Ganyukov)

Nimetame positiivset täisarvu *eriliseks*, kui tema numbrite vahele saab panna ühe võrdusmärgi ja null või enam plussmärki nii, et tekib tõene võrdus. Näiteks arv 3210123 on eriline, sest temast on võimalik saada tõene võrdus $3 + 2 + 10 = 12 + 3$.

a) Kas 2024-kohaline arv 101010...10 on eriline?

b) Kas 2025-kohaline arv 101010...101 on eriline?

(Mõlemas arvus esineb 10 täpselt 1012 korda, b-osas on arvu lõpus veel üks number 1.)

Vastus: a) jah; b) jah.

Lahendus 1.

a) Kuna 2024-kohalises arvus on paarisarv numbreid, siis saame panna täpselt keskele võrdusmärgi. Võrduse mõlemale poole jääb sama 1012-kohaline arv, mistõttu võrdus on tõene. Seega antud arv on eriline.

b) Paneme antud 2025-kohalise arvu esimese 913 numbri järele võrdusmärgi. Vasaku poole jaotame liidetavateks kujul

$$101 + 0 + \underbrace{1010 \dots 10}_{908 \text{ numbrit}} + 1.$$

Paremasse poolde jääb 2025 – 913 ehk 1112 numbrit. Jaotame need liidetavateks kujul

$$0 + \underbrace{1010 \dots 10}_{908 \text{ numbrit}} + \underbrace{1 + 0 + 1 + 0 + \dots + 1 + 0 + 1}_{203 \text{ liidetavat}}.$$

Kuna kummalgi pool võrdusmärki on 908-kohalised liidetavad võrdsed ning nii vasaku poole ülejäänud kahe nullist erineva liidetava summa kui ka parema poole ülejäänud nullist erinevate liidetavate summa on 102, siis võrdus on tõene. Järelikult antud arv on eriline.

Lahendus 2.

a) Paneme 1012 numbri järele võrdusmärgi, siis ka paremale poole jääb 1012 numbrit. Paneme võrduse kummalgi pool iga kahe järjestikuse numbri vahele plussi. Siis kummalgi pool oleva avaldise väärtus on 506, võrdus on tõene. Seega antud arv on eriline.

- b) Paneme 1004 numbri järele võrdusmärgi. Vasakul pool paneme plussi iga kahe järjestikuse numbri vahele, välja arvatud kaks esimest, saades

$$10 + \underbrace{1 + 0 + 1 + 0 + \dots + 1 + 0}_{1002 \text{ numbrit}}.$$

Siis vasakul pool oleva avaldise väärtus on $10 + 501$ ehk 511 . Paremale poole jääb $2025 - 1004$ ehk 1021 numbrit. Pannes paremal pool plussi iga kahe järjestikuse numbri vahele, on ka paremal pool oleva avaldise väärtus 511 . Võrdus on tõene. Seega antud arv on eriline.

Märkus. Ülesande kummalegi osale leidub palju muid lahendusi.

2. (Härmel Nestra)

Leia kõik mittenegatiivsete täisarvude paarid (n, m) , mis rahuldavad tingimust

$$1 + 6n - n^2 = m^2.$$

Vastus: $(0, 1)$, $(2, 3)$, $(4, 3)$, $(6, 1)$.

Lahendus 1. Antud võrrand on samaväärne võrrandiga

$$n^2 - 6n + (m^2 - 1) = 0.$$

Käsitledes seda ruutvõrrandina n suhtes, saame

$$n = 3 \pm \sqrt{9 - (m^2 - 1)} = 3 \pm \sqrt{10 - m^2}.$$

Et n oleks täisarv, peab $\sqrt{10 - m^2}$ olema täisarv. See on nii juhul $m^2 = 1$ ja $m^2 = 9$ ehk vastavalt $m = 1$ ja $m = 3$. Kui $m = 1$, siis $n = 0$ või $n = 6$, kui aga $m = 3$, siis $n = 2$ või $n = 4$.

Lahendus 2. Arvutame välja võrrandi vasaku poole väärtuse muutuja n väikeste väärtuste korral:

$$\frac{n}{1 + 6n - n^2} \left| \begin{array}{cccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 6 & 9 & 10 & 9 & 6 & 1 \end{array} \right.$$

Näeme, et vasaku poole väärtus on täisruut juhtudel $n = 0$, $n = 2$, $n = 4$ ja $n = 6$. Vastavalt sobib $m = 1$, $m = 3$, $m = 3$ ja $m = 1$.

Vasaku poole saab ümber kirjutada kujul $1 - n(n-6)$. Kui $n > 6$, siis n ja $n-6$ on mõlemad positiivsed täisarvud, seega ka korrutis $n(n-6)$ on positiivne täisarv, kusjuures $n > 6$ tõttu on see korrutis suurem kui 1 . Järelikult võrrandi vasak pool on negatiivne ega saa võrduda mingi arvu ruuduga. Seega rohkem lahendeid võrrandil pole.

3. (Härmel Nestra)

Kolmnurkade ABC ja $A'B'C'$ kohta on teada järgmised kolm fakti:

- 1) $\angle ABC = \angle A'B'C'$ või $\angle ABC = 180^\circ - \angle A'B'C'$;
- 2) $\angle BCA = \angle B'C'A'$ või $\angle BCA = 180^\circ - \angle B'C'A'$;
- 3) $\angle CAB = \angle C'A'B'$ või $\angle CAB = 180^\circ - \angle C'A'B'$.

Kas võib kindlalt väita, et kolmnurgad ABC ja $A'B'C'$ on sarnased?

Vastus: jah.

Lahendus. Tähistame $\angle CAB = \alpha$, $\angle ABC = \beta$, $\angle BCA = \gamma$ ja analoogiliselt $\angle C'A'B' = \alpha'$, $\angle A'B'C' = \beta'$, $\angle B'C'A' = \gamma'$. Vaatame läbi juhud selle alusel, mitme nurga suurused kolmnurkades ABC ja $A'B'C'$ vastavalt ühtivad.

- Oletame, et ühtivaid nurki on 0 ehk $\alpha = 180^\circ - \alpha'$, $\beta = 180^\circ - \beta'$, $\gamma = 180^\circ - \gamma'$. Siis

$$\begin{aligned} 180^\circ &= \alpha + \beta + \gamma = \\ &= (180^\circ - \alpha') + (180^\circ - \beta') + (180^\circ - \gamma') = \\ &= 540^\circ - (\alpha' + \beta' + \gamma') = 540^\circ - 180^\circ = 360^\circ, \end{aligned}$$

vastuolu.

- Oletame, et ühtivaid nurki on 1. Üldisust kitsendamata $\alpha = \alpha'$ ning $\beta = 180^\circ - \beta'$, $\gamma = 180^\circ - \gamma'$. Siis

$$\begin{aligned} 180^\circ &= \alpha + \beta + \gamma = \\ &= \alpha' + (180^\circ - \beta') + (180^\circ - \gamma') = \\ &= 360^\circ + \alpha' - (\beta' + \gamma') = 360^\circ + \alpha' - (180^\circ - \alpha') = 180^\circ + 2\alpha'. \end{aligned}$$

Seega $\alpha' = 0^\circ$, mis pole võimalik.

- Oletame, et ühtivaid nurki on 2 või 3. Siis tunnuse NN põhjal on kolmnurgad ABC ja $A'B'C'$ sarnased.

Kuna kõigil võimalikel juhtudel on kolmnurgad ABC ja $A'B'C'$ sarnased, siis võib seda tõepoolest kindlalt väita.

Märkus. Ülesande väitest tuleneb, et kui kahe kolmnurga nurgad on suunatud nurkadena vastavalt võrdsed, siis need kolmnurgad on sarnased.

4. (Hendrik Vija)

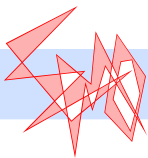
Tahvlile on kirjutatud numbrid 202520252025. Anna ja Bert mängivad mängu, kus igal käigul kustutab mängija ühe tahvil olevatest numbritest ja kirjutab asemele mõne sellise numbriga, mis on kustutatud numbrist väiksem. Anna alustab ja käike tehakse kordamööda. Kaotab mängija, kes enam ei saa käiku teha (kõik numbrid on muutunud nullideks). Kumb mängija saab võita vastase iga vastumängu korral?

Vastus: Anna.

Lahendus. Asendagu Anna oma esimesel käigul viimase numbriga nulliga. See tähendab, et pärast Anna esimest käiku on tahvlil numbrid 202520252020. Näitame, et siis Anna saab võita sõltumata Berdi vastumängust. Selleks paneme tähele, et kõiki nullist erinevaid numbreid on tahvlil paarisarv koopiasid. Seega kui Bert vähendab oma käigul mistahes numbrit kuitahes palju, saab Anna alati valida teise koopia samast numbrist ning vähendada seda samapalju. Sedasi saab Anna alati oma käigu sooritada ning pärast Anna käiku on jälle igat nullist erinevat numbrit tahvlil paarisarv koopiasid. Kuna tahvlil olevad numbrid saavad ainult väheneda, peab mäng millalgi lõppema, ning kuna Anna saab alati oma käigu sooritada, siis järelikult jääb käigupuudusse kindlasti Bert ehk Anna võidab.

Märkus. Ainsad võimalused Annale garanteerida võit ongi asendada esimesel käigul mõni number 5 numbriga 0. Kõik muud avakäigud võimaldavad Berdil saavutada olukorra, kus seis paarisarvu koopiatega igast nullist erinevast numbrist tekib hoopis pärast Berdi käiku, ja võita järgnevalt Anna käike kopeerides ise. Tõepoolest:

- kui Anna asendab avakäigul numbriga 5 mõne nullist erineva numbriga, siis asendab Bert selle numbriga nulliga;
- kui Anna asendab avakäigul numbriga 2 nulliga, siis asendab Bert numbriga 5 numbriga 2;
- kui Anna asendab avakäigul numbriga 2 numbriga 1, siis asendab Bert samas nelikus numbriga 5 numbriga 3, misjärel kui Anna asendab samas nelikus mõne numbriga nulliga, saab Bert vastata sama neliku kahe nullist erineva numbriga võrdsustamisega, kui aga Anna võrdsustab kaks nullist erinevat numbrit, saab Bert asendada sama neliku järelejäänud nullist erineva numbriga nulliga (kui Anna teeb käigu mõnes teises nelikus, kopeerib Bert tema käiku kolmandas nelikus).

**Lahendused****1. (Jan Villemson)**

Järjesta arvud $7\sqrt{5}$, $11\sqrt{2}$ ja $9\sqrt{3}$ kasvavalt.

Vastus: $11\sqrt{2} < 9\sqrt{3} < 7\sqrt{5}$.

Lahendus. Kuna $7\sqrt{5} = \sqrt{7^2 \cdot 5} = \sqrt{245}$, $11\sqrt{2} = \sqrt{11^2 \cdot 2} = \sqrt{242}$ ja $9\sqrt{3} = \sqrt{9^2 \cdot 3} = \sqrt{243}$, siis $11\sqrt{2} < 9\sqrt{3} < 7\sqrt{5}$.

2. (Härmel Nestra)

Ruutvõrrandil $ax^2 + bx + c = 0$ on kaks reaalarvulist lahendit, mille korrutis on 3. Sellel võrrandil vahetatakse ruutliikme kordaja ja vabaliige omavahel. Leia saadud võrrandi lahendite korrutis.

Vastus: $\frac{1}{3}$.

Lahendus 1. Ruutvõrrandil $ax^2 + bx + c = 0$ on samad lahendid nagu taandatud ruutvõrrandil $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$. Viète'i valemite põhjal võrdub taandatud ruutvõrrandi lahendite korrutis vabaliikmega $\frac{c}{a}$. Seega $\frac{c}{a} = 3$, millest muuhulgas tuleneb $c \neq 0$. Kuna eelduse põhjal on ruutvõrrandil kaks reaalarvulist lahendit, siis $b^2 - 4ac > 0$.

Ruutliikme kordaja ja vabaliikme vahetamisel tekib võrrand $cx^2 + bx + a = 0$. Kuna $c \neq 0$, siis tegu on ruutvõrrandiga, ja kuna $b^2 - 4ca = b^2 - 4ac > 0$, siis on ka sel ruutvõrrandil kaks reaalarvulist lahendit. Need on samad mis taandatud ruutvõrrandil $x^2 + \frac{b}{c}x + \frac{a}{c} = 0$, mistõttu nende lahendite korrutis on $\frac{a}{c}$. Kuna $\frac{c}{a} = 3$, siis $\frac{a}{c} = \frac{1}{3}$.

Lahendus 2. Ruutvõrrandi $ax^2 + bx + c = 0$ lahendid on $\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ ja $\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$. Ülesande tingimuste põhjal

$$\begin{aligned} 3 &= \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \cdot \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \\ &= \frac{(-b - \sqrt{b^2 - 4ac}) \cdot (-b + \sqrt{b^2 - 4ac})}{4a^2} = \\ &= \frac{(-b)^2 - (\sqrt{b^2 - 4ac})^2}{4a^2} = \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}. \end{aligned}$$

Seega $c \neq 0$.

Ruutliikme kordaja ja vabaliikme vahetamisel tekib võrrand $cx^2 + bx + a = 0$.

Kuna $c \neq 0$, siis tegu on ruutvõrrandiga, mille lahendid on $\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ca}}{2c}$

ja $\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ca}}{2c}$. Paneme tähele, et $b^2 - 4ca = b^2 - 4ac$, mistõttu on kumbki lahend saadav algse võrrandi vastava märgiga lahendist korrutamisel teguriga $\frac{a}{c}$. Kuna algse võrrandi lahendid on erinevad, siis järelikult on ka uue võrrandi lahendid erinevad. Lahendite korrutamisel esineb tegur $\frac{a}{c}$ kaks korda, mistõttu uue võrrandi lahendite korrutis on $3 \cdot \left(\frac{a}{c}\right)^2$. Kuna $\frac{c}{a} = 3$, siis $\frac{a}{c} = \frac{1}{3}$, mistõttu $3 \cdot \left(\frac{a}{c}\right)^2 = 3 \cdot \frac{1}{9} = \frac{1}{3}$.

3. (Urve Kangro)

Leia kõik positiivsete täisarvude kolmikud (x, y, z) , mis rahuldavad võrrandit

$$xyz + 17xy + xz + 4yz + 17x + 68y + 4z = 2025.$$

Vastus: $(3, 12, 6)$, $(9, 6, 6)$.

Lahendus. Kui võrrandi vasakule poole liita 68, siis saadav avaldis tegurdub kui $(x + 4)(y + 1)(z + 17)$. Paremale poole 68 liitmisel saame arvu 2093, mis tegurdub kui $7 \cdot 13 \cdot 23$. Seega taandub ülesanne võrrandi

$$(x + 4)(y + 1)(z + 17) = 7 \cdot 13 \cdot 23$$

lahendamisele positiivsetes täisarvudes. Kõik selle võrrandi vasaku poole tegurid on suuremad 1-st, mistõttu $x + 4$, $y + 1$ ja $z + 17$ peavad olema 7, 13 ja 23 mingis järjestuses. Ilmselt saab $z + 17$ olla ainult 23, mistõttu $z = 6$. Ülejäänud muutujatele saame kaks võimalust $x + 4 = 7$, $y + 1 = 13$ ja $x + 4 = 13$, $y + 1 = 7$, kust vastavalt $x = 3$, $y = 12$ ja $x = 9$, $y = 6$.

Märkus. Lahenduse esimese sammu peale saab tulla, kui näiteks tuua kõigepealt kõigist muutujat x sisaldavatest liikmetest x sulgude ette ja panna tähele, et ülejäänud on sulgudesse jääva avaldisega väga sarnane.

4. (Maksim Ivanov)

Saapad ja jope maksid enne hinnatõusu kokku 300 eurot. Pärast hinnatõusu maksavad saapad endisest 10 kuni 20 protsenti rohkem, jope aga endisest 30 kuni 40 protsenti rohkem. Pärast hinnatõusu on jope saabastest kallim 70 kuni 90 euro võrra. Leia madalaim ja kõrgeim neil tingimustel võimalik saabaste hind enne hinnatõusu.

Vastus: madalaim 120 eurot, kõrgeim 140 eurot.

Lahendus. Olgu saabaste hind enne hinnatõusu x eurot. Siis jope hind enne hinnatõusu on $300 - x$ eurot.

Olgu pärast hinnatõusu saabaste hind y eurot ja jope hind z eurot. Ülesande tingimuste põhjal kehtivad võrratused

$$\begin{aligned} 1,1x &\leq y \leq 1,2x, \\ 1,3(300 - x) &\leq z \leq 1,4(300 - x), \\ 70 &\leq z - y \leq 90. \end{aligned}$$

Ühelt poolt saame

$$90 \geq z - y \geq 1,3(300 - x) - 1,2x = 390 - 2,5x,$$

kust $2,5x \geq 390 - 90 = 300$ ja seega $x \geq 120$. Seejuures kui $x = 120$, $y = 1,2x = 144$ ja $z = 1,3(300 - x) = 234$, siis $z - y = 90$ ja kõik tingimused on täidetud. Seega madalaim võimalik saabaste hind enne hinnatõusu on 120 eurot.

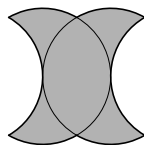
Teisalt saame

$$70 \leq z - y \leq 1,4(300 - x) - 1,1x = 420 - 2,5x,$$

kust $2,5x \leq 420 - 70 = 350$ ja seega $x \leq 140$. Seejuures kui $x = 140$, $y = 1,1x = 154$ ja $z = 1,4(300 - x) = 224$, siis $z - y = 70$ ja kõik tingimused on täidetud. Seega kõrgeim võimalik saabaste hind enne hinnatõusu on 140 eurot.

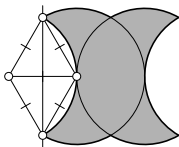
5. (Härmel Nestra)

Joonisel kujutatud x -täht koosneb neljast ringjoone kaarest, mis kahekaupa puutuvad kaarte keskpunktides ja kahekaupa omavad kaht ühist otspunkti. Kaks pikemat kaart on ühepikkused ja 2 korda pikemad kahest lühemast kaarest. Kõik kaared on raadiusega 1. Leia x -tähe poolt kaetava ala (joonisel halliks värvitud) pindala.

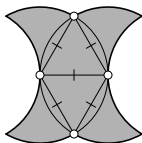


Vastus: $\frac{3}{2}\sqrt{3}$.

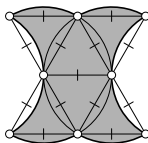
Lahendus. Kuna kaared on võrdse raadiusega, siis 2 korda pikem kaart saab olla samade otspunktidega ainult siis, kui ta on lühema kaare täiend ringjooneks või selle peegeldus. Seega lühema kaare pikkus on $\frac{1}{3}$ ja pikema kaare pikkus $\frac{2}{3}$ ringjoonest, katavad nad vastavalt kesknurgad suurusega 120° ja 240° . Lühema kaare keskpunkt jaotab vastava kesknurga kaheks kesknurgaks suurusega 60° . Nende kesknurkade haarade lõikepunktid kaarega ja



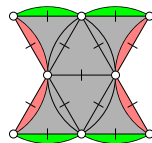
Joonis 11



Joonis 12



Joonis 13



Joonis 14

kesknurga tipp määravad võrdkülgset kolmnurkad (joonis 11). Kaks võrdkülgset kolmnurka moodustavad rombi, mille diagonaalid on risti ja poolitavad teineteist. Seega kaare otspunkte läbiv sirge poolitab raadiuse, mis ühendab ringjoone keskpunkti ja kaare keskpunkti. Kuna pikem ringjoone kaar, millel on vaadeldava lühema kaarega ühised otspunktid, on lühema kaare täiendi peegeldus, siis ka selle ringjoone keskpunkt on vaadeldava ringjoone keskpunkti peegeldus neid otspunkte ühendavast sirgest. Eelneva põhjal on see punkt lühema kaare keskpunktis.

Seega kummagi lühema kaare keskpunkt on kahe pikema kaare lõikepunktide kaugusel 1 ning ka lühemate kaarte keskpunktide omavaheline kaugus on 1 (joonis 12). Seega ka need neli punkti määravad kaks võrdkülgset kolmnurka. Sellest tuleneb, et kahe pikema kaare lõikepunkti ja kaare otspunkti vaheline pikema kaare osa katab samuti kesknurga suurusega 60° .

Vaatleme joonisel 13 näidatud 6 kolmnurka. Eelnevast tulenevalt on tegu võrdkülgsete kolmnurkadega, mille küljepikkus on 1. Iga kolmnurga pindala on $\frac{1}{4}\sqrt{3}$, mistõttu kõigi 6 kolmnurga kogupindala on $\frac{6}{4}\sqrt{3}$ ehk $\frac{3}{2}\sqrt{3}$. Jääb märgata, et x-tähe pindala on sama mis 6 kolmnurga kogupindala, sest x-tähe saab 6 kolmnurgast 4 ühesuguse „kuukese“ ümbertõstmisel (joonis 14).

6. (Hendrik Vija)

Juku kirjutab 5×5 ruudustiku igasse ühikruutu mingi positiivse reaalarvu nii, et vasakus alumises nurgaruudus on 1, paremas ülemises nurgaruudus on 2025 ning igas 2×2 ruudus on nurkapidi kokkupuutuvatesse ühikruutudesse kirjutatud arvude korrutised võrdsed. Leia ruudustiku alumisse paremasse nurgaruutu ja ülemisse vasakusse nurgaruutu kirjutatud arvude korrutis.

Vastus: 2025.

Lahendus 1. Vaatleme suvalist 2×2 ruutu. Olgu tema alumises reas vasakult paremale arvud a ja b ning olgu tema vasakus ülemises lahtris arv ka , kus k on mingi reaalarvuline kordaja (viimane eeldus ei kitsenda üldisust, sest mistahes positiivse reaalarvu saab esitada kujul ka). Siis vasaku ülemise ja parema alumise lahtri arvude korrutis on kab , mistõttu ka ülejäanud kahe

lahtri arvude korrutis peab olema kab . Seega paremas ülemises lahtris on arv kb . Järelikult iga 2×2 ruudu ülemise rea arvud saadakse sama ruudu alumise rea arvude korrutamisel mingi ühe ja sama teguriga.

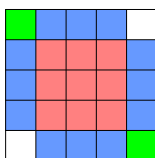
Nihutades 2×2 ruutu ühiku võrra paremale, näeme samamoodi, et ka järgmises veerus on ülemise rea arv saadav alumises reas olevast arvust sama teguriga läbikorrutamisel. Samamoodi saame jätkata viimase veeruni, kus samuti peab ülemine arv olema saadav alumisest arvust sama teguriga läbikorrutamisel.

Vaatleme suvalist kaht järjestikust rida. Olgu alumise rea esimeses ja viimases lahtris vastavalt arvud c ja d . Eelneva põhjal on ülemise rea esimeses ja viimases lahtris vastavalt arvud kc ja kd , kus k on mingi reaalarv. Nihutades vaadeldavat kahte rida ühiku võrra üles, näeme, et ka alt lugedes järgmise rea esimeses ja viimases lahtris on arvud vastavalt kujul kc ja kd , kus k on mingi reaalarv. Samamoodi jätkates näeme, et kogu ruudustiku ülemise rea esimeses ja viimases lahtris on arvud vastavalt kujul kc ja kd , kus k on mingi reaalarv.

Olgu kogu ruudustiku vasakus ülemises nurgaruudus arv m ja paremas alumises nurgaruudus arv n . Kuna vasakus alumises nurgaruudus on arv 1, siis eelneva põhjal peab paremas ülemises nurgaruudus olema otsitav arv mn . Paremas ülemises nurgaruudus on ülesande tingimuste põhjal aga arv 2025.

Lahendus 2. Värvime ruudustiku äärel, kuid mitte nurgas asuvad ühikruudud siniseks, ruudustiku äärtest eemal olevad ühikruudud punaseks ning vasaku ülemise nurgaruudu ja parema alumise nurgaruudu roheliseks (joonis 15). Olgu sinistes ühikruutudes olevate arvude korrutis a ja punastes ühikruutudes olevate arvude korrutis b ; rohelistes ühikruutudes olevate arvude korrutis on otsitav x .

Kirjutame kõigi 2×2 ruutude jaoks välja ülesande tingimuse, et nurkapidi kokkupuutuvates ühikruutudes olevate arvude korrutised on võrdsed, kusjuures iga võrduse vasakule poole kirjutame vastava 2×2 ruudu vasaku alumise ühikruudu ja parema ülemise ühikruudu arvude korrutise ning paremale poole ülejäänud kahe ühikruudu arvude korrutise. Korrutame kõigi nende võrduste vastavad pooled. Paneme tähele, et sinistes ühikruutudes olevad arvud esinevad mõlemal võrduse pool tegurina täpselt ühe korra, pu-



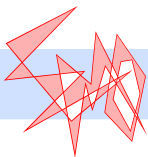
Joonis 15

nastes ühikruutudes olevad arvud aga esinevad mõlemal võrduse pool tegurina täpselt kaks korda. Lisaks esinevad võrduse vasakul pool tegurina 1 ja 2025, paremal pool aga rohelistesse ühikruutudesse kirjutatud arvud. Seega on saadud võrdus kujul

$$2025ab^2 = xab^2,$$

kust suurusega ab^2 läbi jagades saame $x = 2025$.

Märkus. Lahenduse seisukohalt pole oluline, et ruudustik täidetakse positiivsete arvudega. Need võivad olla mistahes nullist erinevad arvud.



Lahendused

1. (Jan Villemson)

Kumb arvudest $9\sqrt{5}$ ja $8 + 7\sqrt{3}$ on suurem?

Vastus: esimene.

Lahendus. Positiivsete arvude $9\sqrt{5}$ ja $8 + 7\sqrt{3}$ suurusvahekord on sama mis nende ruutudel. Esimese arvu ruut on $9^2 \cdot 5$ ehk 405, teise arvu ruut on $8^2 + 2 \cdot 8 \cdot 7\sqrt{3} + 7^2 \cdot 3$ ehk $211 + 112\sqrt{3}$. Arvude 405 ja $211 + 112\sqrt{3}$ suurusvahekord on sama mis 211 võrra väiksematel arvudel 194 ja $112\sqrt{3}$, nende suurusvahekord aga sama mis 2 korda väiksematel arvudel 97 ja $56\sqrt{3}$. Viimaste suurusvahekord on sama mis nende ruutudel 97^2 ja $56^2 \cdot 3$, mis on vastavalt 9409 ja 9408. Kuna $9409 > 9408$, siis $9\sqrt{5} > 8 + 7\sqrt{3}$.

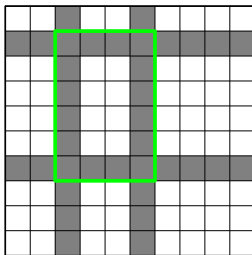
Märkus. Arvuti abil saab leida lähendid $9\sqrt{5} \approx 20,1246$ ja $8 + 7\sqrt{3} \approx 20,1244$.

2. (Hendrik Vija)

Jukul on mängulaud mõõtmetega 10×10 , mis on jaotatud ühikruutudeks. Juku soovib mängida mängu, mida saab mängida mistahes ruudustikul mõõtmetega $m \times n$, kus $m \geq 2$ ja $n \geq 2$. Mitmel viisil on Jukul võimalik välja valida mängulaua osa, millel oma mängu mängida?

Vastus: $(C_{10}^2)^2$ ehk 2025.

Lahendus. Mängulaua osa valimine on samaväärne sellele osale külgedeks olevate kahe rea ja kahe veeru väljavalmisega (joonis 16). Kuna $m \geq 2$ ja $n \geq 2$, on need read ja veerud kindlasti erinevad. Ruudustiku 10 rea hulgast 2 rea valimiseks on C_{10}^2 ehk 45 võimalust ning sama palju võimalusi on ka 2 veeru valimiseks. Kokku on seega 45^2 ehk 2025 võimalust mängulaua osa valimiseks.



Joonis 16

3. (Hendrik Vija)

Leia kõik neljakohalised naturaalarvud n , mille kahest esimesest numbrist ja kahest viimasest numbrist (järjestust muutmata) moodustatud kaheko-
haliste arvude summa ruut võrdub arvuga n .

Vastus: 2025, 3025.

Lahendus 1. Tähistame esimesest kahest numbrist moodustuva arvu kui x ja ülejäänud kahest numbrist moodustuva arvu kui y . Siis saame ülesande tingimuse kirjutada kujul

$$100x + y = (x + y)^2,$$

mille saab lihtsate teisendustega viia kujule

$$99x = (x + y)(x + y - 1).$$

Siit näeme, et 99 peab olema arvu $(x + y)(x + y - 1)$ tegur. Kuna $99 = 9 \cdot 11$ (kusjuures 9 ja 11 on mõlemad algarvuastmed) ning $x + y$ ja $x + y - 1$ kui järjestikused täisarvud on ühistegurita, siis peab kumbki arvudest 9 ja 11 olema teguriks täpselt ühele neist. Arvestades, et ülesande tingimuse põhjal on $(x + y)^2$ neljakohaline arv, millest tulenevalt $32 \leq x + y \leq 99$, saame järgmised neli varianti.

- Kui 9 on $x + y$ tegur ja 11 on $x + y$ tegur, siis 99 on $x + y$ tegur. Ainus sobiv variant vahemikus on $x + y = 99$. Siis $(x + y)^2 = 9801$, mis ei rahulda ülesande tingimusi, sest kahest viimasest numbrist ei moodustu kaheko-
halist arvu.
- Kui 9 on $x + y$ tegur ja 11 on $x + y - 1$ tegur, siis ainus sobiv variant vahemikus $32 \leq x + y \leq 99$ on $x + y = 45$. Siis $(x + y)^2 = 2025$, mis rahuldab ülesande tingimusi.
- Kui 9 on $x + y - 1$ tegur ja 11 on $x + y$ tegur, siis ainus sobiv variant vahemikus $32 \leq x + y \leq 99$ on $x + y = 55$. Siis $(x + y)^2 = 3025$, mis rahuldab ülesande tingimusi.
- Kui 9 on $x + y - 1$ tegur ja 11 on $x + y - 1$ tegur, siis 99 on $x + y - 1$ tegur. Vahemikus $32 \leq x + y \leq 99$ sobivat varianti ei leidu.

Seega ainsad sobivad variandid on 2025 ja 3025.

Lahendus 2. Selleks, et arvu ruut oleks neljakohaline, peab see arv olema kaheko-
haline ja vähemalt 32. Kõrvale võib jätta arvud 40, 50, 60, 70, 80, 90, sest nende ruudud lõpevad kahe nulliga, millest ei moodustu kaheko-
halist arvu. Samal põhjusel võib kõrvale jätta arvud 47, 48, 49, 51, 52, 53, mille ruudud on vastavalt 2209, 2304, 2401, 2601, 2704, 2809. Ka 95 ja suuremad arvud võib kõrvale jätta, sest nende ruut on suurem kui 9000 ja liites 9-ga algavale kaheko-
halisele arvule teise kaheko-
halise arvu, on tulemus kolmekohaline.

Ülejäänud arvud vaatame läbi järgnevas tabelis ja leiame täpselt kaks sobivat varianti $2025 = (20 + 25)^2$ ja $3025 = (30 + 25)^2$:

$32^2 = 1024; 10 + 24 \neq 32$	$66^2 = 4356; 43 + 56 \neq 66$
$33^2 = 1089; 10 + 89 \neq 33$	$67^2 = 4489; 44 + 89 \neq 67$
$34^2 = 1156; 11 + 56 \neq 34$	$68^2 = 4624; 46 + 24 \neq 68$
$35^2 = 1225; 12 + 25 \neq 35$	$69^2 = 4761; 47 + 61 \neq 69$
$36^2 = 1296; 12 + 96 \neq 36$	$71^2 = 5041; 50 + 41 \neq 71$
$37^2 = 1369; 13 + 69 \neq 37$	$72^2 = 5184; 51 + 84 \neq 72$
$38^2 = 1444; 14 + 44 \neq 38$	$73^2 = 5329; 53 + 29 \neq 73$
$39^2 = 1521; 15 + 21 \neq 39$	$74^2 = 5476; 54 + 76 \neq 74$
$41^2 = 1681; 16 + 81 \neq 41$	$75^2 = 5625; 56 + 25 \neq 75$
$42^2 = 1764; 17 + 64 \neq 42$	$76^2 = 5776; 57 + 76 \neq 76$
$43^2 = 1849; 18 + 49 \neq 43$	$77^2 = 5929; 59 + 29 \neq 77$
$44^2 = 1936; 19 + 36 \neq 44$	$78^2 = 6084; 60 + 84 \neq 78$
$45^2 = 2025; 20 + 25 = 45$	$79^2 = 6241; 62 + 41 \neq 79$
$46^2 = 2116; 21 + 16 \neq 46$	$81^2 = 6561; 65 + 61 \neq 81$
$54^2 = 2916; 29 + 16 \neq 54$	$82^2 = 6724; 67 + 24 \neq 82$
$55^2 = 3025; 30 + 25 = 55$	$83^2 = 6889; 68 + 89 \neq 83$
$56^2 = 3136; 31 + 36 \neq 56$	$84^2 = 7056; 70 + 56 \neq 84$
$57^2 = 3249; 32 + 49 \neq 57$	$85^2 = 7225; 72 + 25 \neq 85$
$58^2 = 3364; 33 + 64 \neq 58$	$86^2 = 7396; 73 + 96 \neq 86$
$59^2 = 3481; 34 + 81 \neq 59$	$87^2 = 7569; 75 + 69 \neq 87$
$61^2 = 3721; 37 + 21 \neq 61$	$88^2 = 7744; 77 + 44 \neq 88$
$62^2 = 3844; 38 + 44 \neq 62$	$89^2 = 7921; 79 + 21 \neq 89$
$63^2 = 3969; 39 + 69 \neq 63$	$91^2 = 8281; 82 + 81 \neq 91$
$64^2 = 4096; 40 + 96 \neq 64$	$92^2 = 8464; 84 + 64 \neq 92$
$65^2 = 4225; 42 + 25 \neq 65$	$93^2 = 8649; 86 + 49 \neq 93$
	$94^2 = 8836; 88 + 36 \neq 94$

4. (Härmel Nestra)

Leia kõik reaalarvude kolmikud (x, y, z) , mis rahuldavad võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} x + y = z, \\ y^2 + z^2 = x^2, \\ z^3 + x^3 = y^3. \end{cases}$$

Vastus: $(0, 0, 0)$.

Lahendus 1. Tõstes esimese võrrandi pooled ruutu ja avades vasakul sulud, saame

$$x^2 + 2xy + y^2 = z^2. \quad (1)$$

Asendades z^2 seosest (1) algse süsteemi teise võrrandisse, saame pärast sarnaste liikmete koondamist võrrandi $2xy + 2y^2 = 0$, mis on samaväärne võrrandiga $y(x+y) = 0$. Kuna algse süsteemi esimese võrrandi põhjal $x + y = z$, siis $yz = 0$, millest tulenevalt $y = 0$ või $z = 0$.

- Kui $y = 0$, siis algse süsteemi esimese võrrandi põhjal $x = z$. Asendades $y = 0$ ja $x = z$ kolmandasse võrrandisse, saame $z^3 + z^3 = 0$ ehk $2z^3 = 0$, kust ainsa võimalusena $z = 0$. Seega $x = y = z = 0$.
- Kui $z = 0$, siis algse süsteemi esimese võrrandi põhjal $x = -y$. Asendades $z = 0$ ja $x = -y$ kolmandasse võrrandisse, saame $(-y)^3 = y^3$. Kuna $(-y)^3 = -y^3$, siis järeldub siit $2y^3 = 0$, kust $y = 0$. Seega jällegi $x = y = z = 0$.

Kokkuvõttes näeme, et ainus võimalus on $x = y = z = 0$.

Lahendus 2. Tõstes esimese võrrandi pooled kuupi ja avades vasakul sulud, saame

$$x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 = z^3. \quad (2)$$

Asendades z^3 seosest (2) algse süsteemi kolmandasse võrrandisse, saame pärast sarnaste liikmete koondamist võrrandi $2x^3 + 3x^2y + 3xy^2 = 0$, mis on samaväärne võrrandiga $x(2x^2 + 3xy + 3y^2) = 0$. Seega $x = 0$ või $2x^2 + 3xy + 3y^2 = 0$.

- Kui $x = 0$, siis algse süsteemi teine võrrand omandab kuju $y^2 + z^2 = 0$. See on võimalik vaid juhul $y = z = 0$. Seega $x = y = z = 0$.
- Kui $2x^2 + 3xy + 3y^2 = 0$, siis vaatleme seda seost ruutvõrrandina x suhtes. Saame $D = (3y)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 3y^2 = -15y^2 \leq 0$, kuid lahendite leidumiseks peab olema $D \geq 0$. Seega ainus võimalus on $D = 0$ ehk $-15y^2 = 0$, kust $y = 0$. Seosest $2x^2 + 3xy + 3y^2 = 0$ saame nüüd ka $x = 0$ ning lõpuks algse süsteemi esimesest võrrandist $z = 0$. Seega $x = y = z = 0$.

Kokkuvõttes on ainus võimalus $x = y = z = 0$.

5. (Härmel Nestra)

Leia kõik positiivsed täisarvud n , mille korral leidub tasandil kumer n -nurk järgmiste omadustega:

- 1) leiduvad kaks sisenurka, mis on erinevate suurustega α ja β ;
- 2) iga sisenurk on kas suurusega α või suurusega β ;
- 3) suurusega α sisenurkade summa ja suurusega β sisenurkade summa on võrdsed.

Vastus: kõik paaritud 1-st suuremad täisarvud.

Lahendus. Olgu vaadeldavas n -nurgas k sisenurka suurusega α . Tingimuse 2 põhjal siis leidub $n - k$ sisenurka suurusega β .

Teame, et $k\alpha + (n - k)\beta = (n - 2) \cdot 180^\circ$. Tingimusest 3 seega

$$k\alpha = (n - k)\beta = (n - 2) \cdot 90^\circ.$$

Järelikult $\alpha = \frac{(n - 2) \cdot 90^\circ}{k}$ ja $\beta = \frac{(n - 2) \cdot 90^\circ}{n - k}$. Tingimuse 1 põhjal $\alpha \neq \beta$, niisiis $k \neq n - k$ ehk $2k \neq n$.

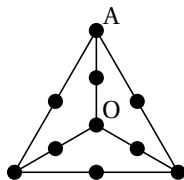
Samuti teame, et kumera hulknurga kõik sisenurgad on väiksemad kui 180° .

Seega $\frac{(n - 2) \cdot 90^\circ}{k} < 180^\circ$, millest tulenevalt $2k > n - 2$. Üldisust kitsendama võib aga eeldada, et $2k < n$ (vastasel korral vahetame α ja β rollid). Kokkuvõttes on ainus võimalus $2k = n - 1$. Kuna $n - 1$ on sellest tulenevalt paarisarv, peab n olema paaritu.

Iga 1-st suurema paaritu täisarvu n jaoks saame konstrueerida n -nurga, milles on $\frac{n - 1}{2}$ sisenurka suurusega $\frac{(n - 2) \cdot 180^\circ}{n - 1}$ ja $\frac{n + 1}{2}$ sisenurka suurusega $\frac{(n - 2) \cdot 180^\circ}{n + 1}$. Sellega on kõik ülesande tingimused täidetud.

6. (Hendrik Vija)

Joonisel on linna X trammiliinide võrgustik, mille liine märgivad sirglõigud ja peatusi mummukesed. Juku ja tema sõbrad mängivad kullimängu, kus on üks põgeneja ja vähemalt üks püüdja. Igal käigul otsustavad kõik mängijad üheaegselt, kas jääda paigale või liikuda trammiga ühe peatuse võrra mööda mingit liini mingis suunas. Pärast käiku saavad kõik teada, mida teised otsustasid ja kus nad asuvad. Kui pärast käiku on vähemalt üks püüdja põgenejaga samas peatuses, siis on põgeneja kinni püütud. Põgeneja alustab peatuses A ning püüdjad alustavad peatuses O. Leia vähim püüdjate arv, mille korral on püüdjatel võimalik põgeneja lõpliku arvu käikudega tabada sõltumata põgeneja liikumisest.

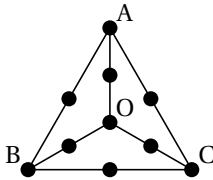


Vastus: 3.

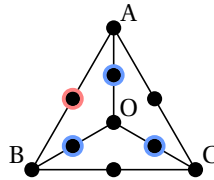
Lahendus. Igast peatusest on võimalik ühe peatuse võrra liikudes jõuda vähemalt kahte erinevasse peatusse. Seega on põgenejal sõltumata asukohast igal käigul vähemalt kolm võimalust, kus oma käik lõpetada: lisaks vähemalt kahele naaberpeatusele ka sama peatus ise. Kahe püüdja korral jääb üks neist peatustest alati vabaks, mistõttu nad ei saa garanteerida põgeneja kinnipüüdmist.

Nüüd tõestame, et kolmest püüdjast kindlasti piisab. Tähistame teised lõpppeatused tähtedega B ja C (joonis 17). Liikugu kolm püüdjat esimesel käigul vastavalt lõpppeatuste A, B ja C suunas. Siis on kolm võimalust:

- Kui põgeneja liigub esimesel käigul peatuse O suunas, siis on ta kinni püütud.

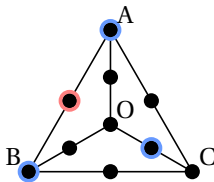


Joonis 17

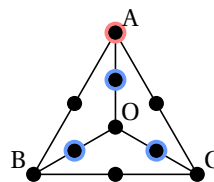


Joonis 18

- Kui põgeneja liigub esimesel käigul mõne teise lõpppeatuse suunas – üldisust kitsendamata olgu see peatus B (joonis 18; siin ja edaspidi tähistavad sinised ringid püüdjate asukohti ja punane ring põgeneja asukohta) –, siis liikugu lõpppeatuste A ja B suunas liikunud püüdjad teisel käigul samas suunas edasi, jõudes neisse peatustesse kohale, ning jäägu kolmas püüdja paigale. Sellisel juhul, kui põgeneja teisel käigul liigub, on ta nüüd kinni püütud. Vastasel juhul on ta nüüd kahe püüdja vahel „kinni“ (joonis 19).

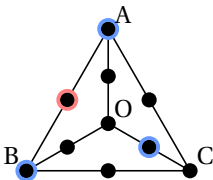


Joonis 19

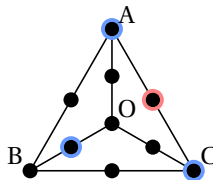


Joonis 20

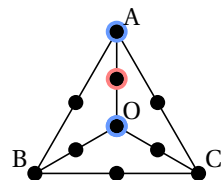
- Kui põgeneja jääb esimesel käigul paigale (joonis 20), siis liikugu jaama A suunas liikunud püüdja teisel käigul veel ühe peatuse edasi ning jäägu ülejäänud kaks püüdjat paigale. Kui põgeneja jääb taaskord paigale, siis on ta kinni püütud. Kui põgeneja liigub, siis teeb ta seda peatuse B, C või O suunas. Igaühel neist on ühe peatuse kaugusel püüdja. Liikugu see püüdja kolmandal käigul sinna peatusesse, mille suunas põgeneja teisel käigul liikus, ja jäägu teised püüdjad paigale. Kui siis põgeneja



Joonis 21



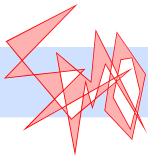
Joonis 22



Joonis 23

kolmandal käigul liigub, on ta nüüd kinni püütud. Vastasel juhul on ta nüüd kahe püüdja vahel „kinni“ (joonised 21–23 kujutavad kõiki võimalikke olukordi pärast kolmandat käiku).

Jääb märgata, et kui põgeneja on kahe püüdja vahel kinni, siis piisab, kui need kaks püüdjat jäävad paigale ja kolmas liigub lõpliku arvu käikudega sellesse jaama, kus põgeneja asub. Nii püütakse põgeneja kindlalt kinni.

**Lahendused****1. (Urve Kangro)**

Arvuta summa

$$\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{6}} + \frac{1}{\sqrt{6}+\sqrt{7}} + \frac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{8}} + \frac{1}{\sqrt{8}+\sqrt{9}}.$$

Vastus: 2.

Lahendus. Paneme tähele, et

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}} &= \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{(\sqrt{n} + \sqrt{n+1})(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})} = \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{(\sqrt{n+1})^2 - (\sqrt{n})^2} = \\ &= \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{(n+1) - n} = \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{1} = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}. \end{aligned}$$

Seega antud summa on võrdne teleskoopsummaga

$$\sqrt{2} - \sqrt{1} + \sqrt{3} - \sqrt{2} + \sqrt{4} - \sqrt{3} + \sqrt{5} - \sqrt{4} + \sqrt{6} - \sqrt{5} + \sqrt{7} - \sqrt{6} + \sqrt{8} - \sqrt{7} + \sqrt{9} - \sqrt{8}.$$

Koondades sarnased liikmed, saame $\sqrt{9} - \sqrt{1}$ ehk $3 - 1$ ehk 2.**2. (Urve Kangro)**

Kolmnurga ABC pindala avaldub kujul $S = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{4}$, kus a , b ja c on vastavalt külgede BC , CA ja AB pikkused. Leia nurga ACB suurus.

Vastus: 45° .Lahendus. Koosinusteoreemi põhjal $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$, kus $\gamma = \angle ACB$.Seega $a^2 - b^2 - c^2 = 2ab \cos \gamma$, nii et ülesande tingimuse põhjal $S = \frac{ab \cos \gamma}{2}$.Samas teame, et $S = \frac{ab \sin \gamma}{2}$. Kokkuvõttes $\cos \gamma = \sin \gamma$, kust $\tan \gamma = 1$ ehk $\gamma = 45^\circ$.**3. (Maksim Ivanov)**

Positiivsed täisarvud a , b , c ja d on sellised, et $a > b > c > d$, arvud $a + b$ ja $c + d$ jaguvad mõlemad 2-ga, arvud $a - c$ ja $b - d$ jaguvad mõlemad 3-ga ning arvud $a \cdot d$ ja $b \cdot c$ jaguvad mõlemad 5-ga. Leia vähim võimalik arvude a , b , c ja d summa.

Vastus: 34.

Lahendus 1. Kuna 5 on algarv, siis a või d jagub 5-ga ning b või c jagub 5-ga. Seega $b \geq 5$ ja $a \geq 10$. Samuti näeme, et kuna $c + d$ peab jaguma 2-ga, siis juht $c = 2, d = 1$ ei sobi, mistõttu $c \geq 3$. Vaatame juhtusid vastavalt sellele, milline on 5-ga jaguv tegur korrutises ad .

- Kui $a = 10$, siis $b = 5$ või $c = 5$. Kuid siis kas $a + b$ ei jagu 2-ga või $a - c$ ei jagu 3-ga, vastuolu.
- Kui $a = 15$, siis $b = 5$ või $b = 10$ või $c = 5$ või $c = 10$. Teisel juhul $a + b$ ei jagu 2-ga ning viimasel kahel juhul $a - c$ ei jagu 3-ga. Seega ainus võimalus on $b = 5$. Et $a - c$ ja $b - d$ jaguksid 3-ga, peab olema $c = 3$ ja $d = 2$. Kuid siis $c + d$ ei jagu 2-ga, vastuolu.
- Kui $a = 20$, siis $b = 5$ või $b = 10$ või $b = 15$ või $c = 5$ või $c = 10$ või $c = 15$. Esimesel ja kolmandal juhul $a + b$ ei jagu 2-ga, kahel viimasel juhul aga $a - c$ ei jagu 3-ga. Seega sõelale jäävad variandid $b = 10$ ja $c = 5$.
 - Kui $c = 5$, siis selleks, et $c + d$ jaguks 2-ga, peab olema kas $d = 3$ või $d = 1$. Kui $d = 3$, siis variant $a = 20, b = 6, c = 5, d = 3$ rahuldab kõiki ülesande tingimusi ja annab vähima summa $a + b + c + d = 34$. Kui $d = 1$, siis $b = 6$ annab vastuolu tingimusega, et $b - d$ jagub 3-ga, ja $b = 7$ tingimusega, et $a + b$ jagub 2-ga. Järelikult $b \geq 8$, mis annab $a + b + c + d \geq 20 + 8 + 5 + 1 = 34$.
 - Kui $b = 10$, siis $a + b + c + d \geq 20 + 10 + 3 + 1 = 34$.
- Kui $a \geq 25$, siis $a + b + c + d \geq 25 + 5 + 3 + 1 = 34$.
- Kui $d = 5$, siis $b \geq 20$ või $c \geq 15$, sest juhtudel $b = 10$ ja $b = 15$ saame vastuolu tingimusega, et $b - d$ jagub 3-ga, ning juhul $c = 10$ tingimusega, et $c + d$ jagub 2-ga. Kui $b \geq 20$, siis $a + b + c + d \geq 21 + 20 + 6 + 5 > 34$, kui aga $c \geq 15$, siis $a + b + c + d \geq 17 + 16 + 15 + 5 > 34$.
- Kui $d \geq 10$, siis $a + b + c + d \geq 13 + 12 + 11 + 10 > 34$.

Seega arvude a, b, c, d vähim võimalik summa on 34.

Lahendus 2. Kuna 5 on algarv, siis a või d jagub 5-ga ning b või c jagub 5-ga. Samuti näeme, et kuna $c + d$ peab jaguma 2-ga ja $c = d = 1$ pole võimalik, siis $c + d \geq 4$. Vaatame juhtusid selle järgi, millised arvud jaguvad 5-ga.

- Kui a ja c jaguvad 5-ga või b ja d jaguvad 5-ga, siis vastavalt $a - c$ või $b - d$ jagub 5-ga. Kuna aga need mõlemad arvud jaguvad 3-ga, siis peab $a - c$ või $b - d$ jaguma arvuga $3 \cdot 5$ ehk 15-ga. Mõlemal juhul $(a - c) + (b - d) \geq 15 + 3 = 18$. Kuna c või d jagub 5-ga, siis $c + d \geq 5 + 1 = 6$. Juht $c + d = 6$ tähendaks, et $c = 5$ ja $d = 1$, kusjuures ka a jagub 5-ga. Siis arvestades $a - c$ ja $b - d$ jaguvust 3-ga, saame $a \geq 20$ ja $b \geq 7$, kust $a + b + c + d \geq 20 + 7 + 6 = 33$. Et aga $a + b + c + d$ on 2-ga jaguvate arvude $a + b$ ja $c + d$ summa, siis $a + b + c + d$ jagub 2-ga, mistõttu $a + b + c + d \geq 34$. Kui $c + d \neq 6$, siis $c + d \geq 8$, sest $c + d$ jagub 2-ga. Saame jällegi $a + b + c + d = (a - c) + (b - d) + 2(c + d) \geq 18 + 2 \cdot 8 = 34$.

- Kui a ja b jaguvad 5-ga või c ja d jaguvad 5-ga, siis vastavalt $a + b$ või $c + d$ jagub 5-ga. Kuna aga need mõlemad arvud jaguvad 2-ga, siis peab $a + b$ või $c + d$ jaguma arvuga $2 \cdot 5$ ehk 10-ga; seejuures ei ole aga $a + b = 10$ ega $c + d = 10$ võimalik, sest $a > b$ ja $c > d$. Seega $a + b \geq 20$ või $c + d \geq 20$. Kui $c + d \geq 20$, siis $a + b + c + d > 20 + 20 = 40 > 34$; samuti kui $a + b \geq 30$, siis $a + b + c + d \geq 30 + 4 = 34$. Seega jääb vaadelda juht, kus $a + b = 20$ ning a ja b jaguvad 5-ga. Siis $a = 15$, $b = 5$ ning tingimus, et $a - c$ ja $b - d$ jaguvad 3-ga, annab $c = 3$ ja $d = 2$. Kuid sel juhul $c + d$ ei jagu 2-ga, vastuolu.

Kokkuvõttes oleme näidanud, et $a + b + c + d \geq 34$. Lihtne on näha, et võttes $a = 20$, $b = 6$, $c = 5$, $d = 3$, on kõik ülesande tingimused rahuldatud ja $a + b + c + d = 34$. Järelikult vähim võimalik arvude a , b , c , d summa on 34.

Lahendus 3. Võttes $a = 20$, $b = 6$, $c = 5$, $d = 3$, on kõik ülesande tingimused täidetud ja $a + b + c + d = 34$. Näitame, et väiksem summa pole võimalik.

Kuna $a - c$ ja $b - d$ jaguvad 3-ga, siis ka nende vahede summa $(a - c) + (b - d)$ jagub 3-ga. Samas $a + b$ ja $c + d$ jaguvad 2-ga, seega nende summade vahe $(a + b) - (c + d)$ jagub 2-ga. Kuna $(a - c) + (b - d) = (a + b) - (c + d)$, siis see arv peab jaguma nii 2-ga kui ka 3-ga ehk kokku 6-ga.

Kuna $a \cdot d$ jagub 5-ga ja 5 on algarv, siis a või d peab jaguma 5-ga. Samuti peab b või c jaguma 5-ga. Vaatame kõik juhud läbi.

- Oletame, et d jagub 5-ga. Kui nüüd b jagub 5-ga, siis $b - d$ jagub nii 3-ga kui ka 5-ga ehk kokku 15-ga. Seega $b - d \geq 15$. Kui aga c jagub 5-ga, siis $c - d$ jagub 5-ga ning $c - d$ jagub ka 2-ga, sest $c - d$ ja $c + d$ on sama paarsusega. Seega $c - d$ jagub 10-ga. Kuna $b - d > c - d$ ja $b - d$ jagub 3-ga, siis $b - d \geq 12$. Et aga $d \geq 5$, siis järeldub sellest $b \geq 5 + 12 = 17$. Seega $a + b + c + d > a + b > 2b \geq 34$.

- Oletame, et a jagub 5-ga. Sarnaselt eelmise juhuga näeme, et $a - c \geq 12$ ja juhul, kui c jagub 5-ga, koguni $a - c \geq 15$. Arvu $(a - c) + (b - d)$ jaguvuse tõttu 6-ga saame, et $(a - c) + (b - d) \geq 18$. Kuna $c + d$ on paaris, siis $c + d \geq 4$, sest $c + d = 2$ annaks $c = d = 1$, mis pole võimalik. Seega $a + b = ((a - c) + (b - d)) + (c + d) \geq 18 + 4 = 22$.

Kui nüüd b jagub 5-ga, siis $a + b$ jagub nii 2-ga kui ka 5-ga ehk kokku 10-ga. Seega $a + b \geq 30$, kust $a + b + c + d \geq 30 + 4 = 34$.

Kui aga c jagub 5-ga, siis eelneva põhjal $a - c \geq 15$. Kuna $c \geq 5$, siis $c + d \geq 6$. Võrdus $c + d = 6$ on võimalik vaid juhul $c = 5$, $d = 1$, kuid sel juhul $b - d > 3$ ja $(a - c) + (b - d) > 15 + 3 = 18$. Jaguvuse tõttu 6-ga peab kehtima $(a - c) + (b - d) \geq 24$, kuid siis $a + b + c + d = ((a - c) + (b - d)) + 2(c + d) \geq 24 + 2 \cdot 6 > 34$. Juhul $c + d > 6$ aga saame paarsuse tõttu $c + d \geq 8$. Sellest tulenevalt $a + b + c + d = ((a - c) + (b - d)) + 2(c + d) \geq 18 + 2 \cdot 8 = 34$.

Kuna kõikidel juhtudel $a + b + c + d \geq 34$, siis väiksem summa pole võimalik.

4. (Härmel Nestra)

Jukul on kolm tahvlit šokolaadi, igäüks massiga 60 g. Esimesel päeval murrab Juku esimese šokolaaditahvli kolmeks tükiks, mille massid on mingi aritmeetilise jada järjestikused liikmed, ja sööb neist tükkidest kaks ära. Teisel päeval murrab Juku teise šokolaaditahvli niisama rasketeks tükkideks nagu esimesel päeval esimese tahvli ja sööb saadud kolmest tükist kaks ära. Kolmandal päeval murrab Juku kolmanda šokolaaditahvli niisama rasketeks tükkideks nagu eelmistel päevadel eelmised tahvlid ja sööb saadud kolmest tükist kaks ära. Neljandal päeval sööb Juku ära kõik esimesel kolmel päeval järele jäänud tükid. Nii sööb Juku kõigil neljal päeval ühepalju šokolaadi. Leia šokolaaditahvli kolmeks tükiks murdmisel tekkinud suurima tüki mass.

Vastus: 25 g.

Lahendus 1. Nelja päevaga sööb Juku kokku 3 tahvlit šokolaadi, mis on kokku 180 g. See teeb iga päev 45 g, sest ta sööb kõigil päevadel ühepalju. Olgu šokolaaditahvli murdmisel tekkinud tükide massid a , $a+d$ ja $a+2d$ grammi; siis $a+(a+d)+(a+2d)=60$ ehk $3a+3d=60$. Sõltuvalt sellest, millised kaks tükki Juku sööb, kehtib kas $a+(a+d)=45$ või $a+(a+2d)=45$ või $(a+d)+(a+2d)=45$; pärast lihtsustamist saame vastavalt $2a+d=45$ või $2a+2d=45$ või $2a+3d=45$. Vaatleme neid kolme juhtu eraldi.

- Olgu $2a+d=45$. Lahutades võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} 3a + 3d = 60, \\ 2a + d = 45 \end{cases}$$

esimesest võrrandist 3-ga korrutatud teise võrrandi, saame $-3a = -75$ ehk $a = 25$. Võrrand $2a+d=45$ annab nüüd $d = -5$. Tükid on seega massiga 25 g, 20 g ja 15 g, millest raskeim on 25 g.

- Olgu $2a+2d=45$. Korrutatades võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} 3a + 3d = 60, \\ 2a + 2d = 45 \end{cases}$$

esimese võrrandi 2-ga ja teise võrrandi 3-ga, saame võrrandite lahutamisel $0 = 2 \cdot 60 - 3 \cdot 45 = -15$. Vastuolu näitab, et see juht pole võimalik.

- Olgu $2a+3d=45$. Lahutades võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} 3a + 3d = 60, \\ 2a + 3d = 45 \end{cases}$$

esimesest võrrandist teise, saame $a = 15$. Võrrand $2a+3d=45$ annab nüüd $d = 5$. Tükid on seega massiga 15 g, 20 g ja 25 g, raskeim on 25 g. Seega kolmest tükist raskeima mass saab olla ainult 25 g.

Lahendus 2. Nelja päevaga sööb Juku kokku 3 tahvlit šokolaadi, mis teeb 180 g. Kuna ta sööb kõigil päevadel ühepalju, siis sööb ta iga päev 45 g šokolaadi. Seega jääb igast esimesel kolmel päeval alustatud šokolaaditahvlit järele tükk massiga 15 g. Kuna šokolaaditahvli kolmeks jaotamisel tekkivate tükide massid on aritmeetilise jada järjestikused liikmed, siis keskmise tüki mass on $\frac{1}{3}$ terve tahvli massist ehk 20 g. Kolmanda tüki mass on järelikult 25 g. See on ka kolmest tükist kõige raskem.

5. (*Hendrik Vija*)

Kolmnurga kahe kõrguse pikkused on 3 cm ja 6 cm. Leia kõik võimalused, milline saab olla kolmnurga kolmanda kõrguse pikkus.

Vastus: kõik pikkused 2 cm ja 6 cm vahel.

Lahendus. Olgu kolmnurga küljepikkused a , b , c ning külgedele tõmmatud kõrgused vastavalt pikkustega h_A , h_B , h_C ; üldisust kitsendamata $h_A = 3$ cm ja $h_B = 6$ cm. Olgu kolmnurga pindala S . Siis $a = \frac{2S}{h_A}$, $b = \frac{2S}{h_B}$ ja $c = \frac{2S}{h_C}$, kusjuures $h_A < h_B$ tõttu $a > b$. Kolmnurga kolmas küljepikkus c peab rahuldama kolmnurgavõrratusi $a - b < c < a + b$ ehk

$$\frac{2S}{h_A} - \frac{2S}{h_B} < \frac{2S}{h_C} < \frac{2S}{h_A} + \frac{2S}{h_B}.$$

Jagades võrratuste pooled suurusega $2S$, saame samaväärsed võrratused

$$\frac{1}{h_A} - \frac{1}{h_B} < \frac{1}{h_C} < \frac{1}{h_A} + \frac{1}{h_B}.$$

Siit saame h_C jaoks tingimused

$$\frac{1}{\frac{1}{h_A} - \frac{1}{h_B}} > h_C > \frac{1}{\frac{1}{h_A} + \frac{1}{h_B}}$$

ehk

$$\frac{h_A h_B}{h_B - h_A} > h_C > \frac{h_A h_B}{h_A + h_B}.$$

Arvestades, et $h_A = 3$ cm ja $h_B = 6$ cm, saame 6 cm $> h_C > 2$ cm. Kuna kolmnurga küljepikkusteks sobivad kõik pikkused, mis rahuldavad kolmnurgavõrratusi, siis on ka kõik kolmanda kõrguse pikkused 2 cm ja 6 cm vahel saavutatavad.

6. (*Hendrik Vija*)

Kooli kergejõustikuvõistluste 100 meetri jooksu poolfinaalides osaleb kokku 12 jooksjat. Nad loositakse kolme 4-liikmelisse gruppi, nii et kõik gruppidesse jagunemise võimalused on võrdtõenäolised. Seejärel jookseb iga grupp

ühe jooksu. Finaali pääseb 4 jooksjat: iga jooksu võitja ja lisaks ka kiireim kõigist neist jooksjatest, kes oma jooksu ei võida. Leia tõenäosus, et finaali pääsevad need jooksjad, kes saavad 4 kiireimat aega. (Eeldame, et ükski kaks jooksjat ei saa täpselt sama aega ja et iga jooksja saavutab kindla aja sõltumata grupist, milles ta jookseb.)

$$\text{Vastus: } \frac{32}{55}.$$

Lahendus 1. Paneme tähele, et see edasipääseja, kes oma jooksu ei võida, on alati 4 kiireima jooksja hulgas, sest temast kiiremad saavad olla vaid jooksude võitjad, keda on kokku vaid 3. Seega pääsevad finaali 4 kiireimat jooksjat parajasti siis, kui iga jooksu võitja on 4 kiireima hulgas. See tingimus on aga samaväärne sellega, et 4 kiireimat jooksjat jaotuvad kolme jooksu vahel niimoodi, et igas jooksus on neid vähemalt üks.

Loendame kõik gruppidesse jagunemise võimalused. Kõiki võimalusi jooksjaid ühekaupa gruppidesse jaotada on kokku $12!$, aga kuna grupisiselt ei ole jooksjate loosimise järjestus oluline, siis kõigi gruppidesse jagunemisi on $\frac{12!}{4! \cdot 4! \cdot 4!}$.

Loendame nüüd kõik soodsad gruppidesse jagunemise võimalused. Selleks, et 4 kiireima jooksja hulgast vähemalt üks oleks igas jooksus esindatud, peab neid ühes jooksus olema kaks ja kahes ülejäänud jooksus üks. Võimalusi valida jooks, milles osaleb kaks jooksjat 4 kiireima hulgast, on 3, nende kahe jooksja valikuks on võimalusi C_4^2 ehk 6 ning lõpuks on 2 võimalust ülejäänud kahe jooksja jaotamiseks kahe jooksu vahel. Seega on 4 kiireima jooksja sobivaks jaotamiseks $3 \cdot 6 \cdot 2$ ehk 36 võimalust. Selles jooksus, kus kaks osalejat on 4 kiireima seas, on 2 osalejat ülejäänud 8 jooksja seast. Kummaski sellises jooksus, kus vaid üks osaleja on 4 kiireima seas, on 3 osalejat ülejäänute seast. Seega on ülejäänud 8 jooksja gruppidesse jaotamiseks $\frac{8!}{2! \cdot 3! \cdot 3!}$ võimalust. Seega on kõigi jooksjate soodsaid gruppidesse jagunemise võimalusi $36 \cdot \frac{8!}{2! \cdot 3! \cdot 3!}$ ehk $\frac{8!}{2!}$.

Kuna

$$\frac{\frac{8!}{2!}}{\frac{12!}{4! \cdot 4! \cdot 4!}} = \frac{8! \cdot 4! \cdot 4! \cdot 4!}{2! \cdot 12!} = \frac{24 \cdot 24 \cdot 24}{2 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12} = \frac{24 \cdot 24}{9 \cdot 10 \cdot 11} = \frac{4 \cdot 8}{5 \cdot 11} = \frac{32}{55},$$

siis otsitav tõenäosus on $\frac{32}{55}$.

Lahendus 2. Nagu lahenduses 1 näeme, et 4 kiireimat jooksjat pääsevad finaali parajasti siis, kui igas poolfinaaljooksus on neid vähemalt üks.

Loendame kõik gruppidesse jagunemise võimalused. Jooksjate valimiseks esimesse jooksu on C_{12}^4 võimalust, seejärel on jooksjate valimiseks teise

jooksu C_8^4 võimalust. Sellega on kõigi jooksjate jagunemine üheselt määratud. Seega on kõiki gruppidesse jagunemise võimalusi kokku $C_{12}^4 \cdot C_8^4$.

Loendame kõik ebasoodsad gruppidesse jagunemise võimalused ehk need, kus mõnes jooksus pole ühtki jooksjat 4 kiireima seast. On 3 võimalust valida jooks, milles pole ühtki jooksjat 4 kiireima seast, seejärel on nende jooksjate valimiseks C_8^4 võimalust ja ülejäänud jooksjate jaotamiseks kahte ülejäänud jooksu samuti C_8^4 võimalust. Kokku saame $3 \cdot C_8^4 \cdot C_8^4$ võimalust. Siin on aga topelt arvestatud võimalused, kus kahes jooksus pole ühtki jooksjat 4 kiireima seast. Loendame need võimalused eraldi. Nende kahe jooksu valimiseks, kus pole ühtki jooksjat 4 kiireima seast, on 3 võimalust. Jooksjate jaotamiseks nendes jooksudes on C_8^4 võimalust. Sellega on kõigi jooksjate jaotus üheselt määratud. Seega võimalusi, kus kahes jooksus pole ühtki jooksjat 4 kiireima seast, on $3 \cdot C_8^4$. Kokkuvõttes on ebasoodsate võimaluste arv $3 \cdot C_8^4 \cdot C_8^4 - 3 \cdot C_8^4$ ehk $3 \cdot C_8^4 \cdot (C_8^4 - 1)$.

Kuna kõiki gruppidesse jagunemise võimalusi on $C_{12}^4 \cdot C_8^4$, siis soodsaid gruppidesse jagunemise võimalusi on järelikult $C_{12}^4 \cdot C_8^4 - 3 \cdot C_8^4 \cdot (C_8^4 - 1)$. Saame

$$\frac{C_{12}^4 \cdot C_8^4 - 3 \cdot C_8^4 \cdot (C_8^4 - 1)}{C_{12}^4 \cdot C_8^4} = 1 - \frac{3 \cdot (C_8^4 - 1)}{C_{12}^4}.$$

Arvutades leiame

$$C_8^4 = \frac{8!}{4! \cdot 4!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 7 \cdot 2 \cdot 5 = 70,$$

$$C_{12}^4 = \frac{12!}{4! \cdot 8!} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 11 \cdot 5 \cdot 9 = 495.$$

Seega

$$1 - \frac{3 \cdot (C_8^4 - 1)}{C_{12}^4} = 1 - \frac{3 \cdot 69}{495} = 1 - \frac{23}{55} = \frac{32}{55},$$

mis on ka otsitav tõenäosus.

Märkus. Kirjutis $n!$ tähistab kõigi positiivsete täisarvude $1, 2, \dots, n$ korrutist.



Lp hindaja!

Käesolevas esitame kõigepealt hindamise üldised põhimõtted ning seejärel järjekorras konkreetsed hindamisjuhised iga ülesande kohta eraldi.

1. Õpilase lahenduseks tuleb esmajoones lugeda see, mida õpilane on ülesande kohta vormistanud puhtandina (sh mustandipaberile selgesti arusaadavalt kirja pandud mõttekäigud, kui need on ametlikult puhtandipaberilt viidatud). Töö mustandi arvestamine või mittearvestamine ülesande lahenduse hulka on hindaja otsustada (või piirkonna hindamiskomisjoni ühine otsus kõigi ülesannete suhtes), kuid see peab toimuma kõigis töödes ühtmoodi.

2. Alljärgnevas on 7.–9. klassi olümpiaadi I osa (testi) ning kõikide ülejäänud üleannete hindamisjuhised esitatud erinevalt.

Testi iga küsimuse jaoks on eraldi loetletud või kirjeldatud vastused, mille eest tuleks anda vastavalt kaks punkti või üks punkt (st vastavaid punkte ühe küsimuse piires *ei tule* liita). Testiülesannete lahendusi õpilased ei pea esitama, vaid kirjutavad ülesannete lehel vastavale punktiirile või ülesande tekstis viidatud kohta ainult vastuse.

Seevastu kõigi teiste ülesannete kohta tuleb esitada täielikud lahendused, ainult vastustest ei piisa. Nende ülesannete lahendused on hindamisjuhistes jaotatud võimalust mööda osadeks (etappideks) ning on näidatud iga osa eest antav punktide arv (st ühe ülesande eest antava punktisumma saamiseks *tuleb* lahenduse erinevate osade eest antud punktid liita).

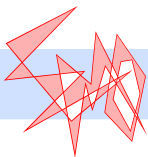
Mõnes skeemis on mõne etapi kirjelduse all („*Sealhulgas:*“ järel) alapunktidena välja toodud konkreetse etapi väiksemate osade eest antavad punktid – need lähevad käiku juhul, kui lahenduse see etapp on ebatäielik või vigane ja selle osa täispunkte seetõttu ei saa anda. Alamosade punktid tuleb omavahel samuti liita.

3. Žürii lahendustes ja käesolevates hindamisjuhistes on ülesannete vastused esitatud enamasti ainult ühel, lihtsaimal või kõige tõenäolisemalt esineval kujul. Hindamisel (sh testid!) tuleb võrdselt õigeks lugeda ka sama vastuse teised mõistlikud esitusviisid – sh taandatud hariliku murruna, segaarvuna, kümnendmurruna, sõnadega välja kirjutatuna –, seejuures ka osana pikemalt (nt täislausega, koos sobiva liigisõnaga või koos selgitustega) antud

vastusest. Juhud, kus ülesande sisu tingib erandeid sellest üldreeglist, on eraldi mainitud vastava ülesande hindamisjuhises.

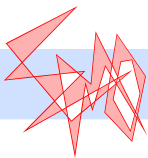
Ühik arvu järel on vastuses vajalik juhul, kui ülesandes on küsitud suurus, mis teatud ühikutes avaldub. Näiteks küsimusele „Kui suur pindala ...?“ saab õige vastus olla „120 cm²“, kuid mitte „120“ (kui ülesande tekstis pole kasutatud ühikuta pikkusi/pindalasisid). Teistes ühikutes väljendatud sama suurus tuleb lugeda õigeks, näiteks vastused „120 cm²“ ja „1,2 dm²“ on samaväärsed. Ühik vastuses ei ole nõutav, kui ülesandes on küsitud kindlate ühikute arvu. Näiteks küsimusele „Mitu ruutsentimeetrit ...?“ antud vastused „120“ ja „120 cm²“ tuleb võrdväärseks lugeda samal alusel nagu küsimusele „Mitu karu ...?“ antud vastused „3“ ja „3 karu“ (vastus koos liigisõnaga). Teistes ühikutes antud vastus tuleb aga lugeda valeks, vastused „120 cm²“ ja „1,2 dm²“ ei ole siin samaväärsed.

4. Mõnede ülesannete kohta, mida saab lahendada mitmel oluliselt erineval viisil, anname eraldi hindamiskeemid erinevate lahendusviiside jaoks. Rõhutame, et iga konkreetset mittetäielikku lahendust tuleb hinnata ainult *ühe* sellise skeemi järgi (selle järgi, mille kohaselt ta saaks kõige rohkem punkte).
5. Enamiku ülesannete korral (v.a testid ja tõestusülesanded) on hindamisjuhiste lõpus eraldi näidatud, mitu punkti anda ainult õige vastuse eest. See hinne on mõeldud juhuks, kui töös on ülesande kohta toodud ainult õige vastus või õige vastus koos mõttekäiguga, mis ei annaks skeemi järgi rohkem punkte kui on ette nähtud õige vastuse eest.
6. Kahtlemata esineb õpilaste töödes ka mõttekäike, mis ei mahu meie poolt pakutud skeemidesse. Selliste lahenduste hindamisel tuleb lähtuda sellest, *kui suur osa* antud ülesandest on õpilasel lahendatud, kasutades lahenduse üksikute osade kaalu määramisel võimaluse korral võrdluseks punktide jaotust meie pakutud hindamiskeemides.
7. *Mistahes* täieliku ja matemaatiliselt korrektse lahenduse eest tuleb igal juhul anda maksimumpunktid, sõltumata selle lahenduse pikkusest või otstarbekusest võrreldes teiste lahendusviisidega.



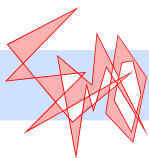
I osa hindamisjuhised

1.
 - Antud õige vastus 22: 2 p
 - Antud õige vastus taandamata murruna (nt $\frac{462}{21}$): 0 p
2.
 - Antud õige vastus 33: 2 p
3.
 - Antud õige vastus 23 a: 2 p
 - Antud vastuseks 23 ilma ühikuta: 1 p
4.
 - Antud õige vastus 7: 2 p
5.
 - Antud õige vastus 225 cm^2 : 2 p
 - Antud vastuseks 225 ilma ühikuta või vale ühikuga: 1 p
6.
 - Antud õige vastus 20° : 2 p
 - Antud vastuseks 20 ilma kraadimärgita: 1 p
7.
 - Antud õige vastus 9,5 cm: 2 p
 - Antud vastuseks 9,5 ilma ühikuta või vale ühikuga: 1 p



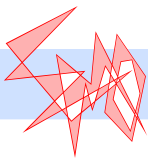
I osa hindamisjuhised

1.
 - Antud õige vastus 2: 2 p
 - Antud õige vastus taandamata murruna (nt $\frac{20160}{10080}$): 0 p
2.
 - Antud õige vastus 26: 2 p
3.
 - Antud õige vastus 24 a: 2 p
 - Antud vastuseks 24 ilma ühikuta: 1 p
4.
 - Antud õige vastus 19: 2 p
5.
 - Antud õige vastus 161 cm^2 : 2 p
 - Antud vastuseks 161 ilma ühikuta või vale ühikuga: 1 p
6.
 - Antud õige vastus 80° : 2 p
 - Antud vastuseks 80 ilma kraadimärgita: 1 p
7.
 - Antud õige vastus 40,5 cm: 2 p
 - Antud vastuseks 40,5 ilma ühikuta või vale ühikuga: 1 p



I osa hindamisjuhised

1.
 - Antud õige vastus 20: 2 p
 - Antud õige vastus taandamata murruna: 0 p
2.
 - Antud õige vastus 2: 2 p
3.
 - Antud õige vastus 30 a: 2 p
 - Antud vastuseks 30 ilma ühikuta: 1 p
4.
 - Antud õige vastus 28: 2 p
5.
 - Antud õige vastus 100° : 2 p
 - Antud vastuseks 100 ilma kraadimärgita: 1 p
6.
 - Antud õige vastus 54° (või $\frac{3}{10}\pi$): 2 p
 - Antud vastuseks 54 ilma kraadimärgita: 1 p
7.
 - Antud õige vastus 417 mm: 2 p
 - Antud vastuseks 417 ilma ühikuta või vale ühikuga: 1 p



II osa hindamisjuhised

1.
 - Põhjendatud, et kollaste kommide arv on $\frac{1}{6}x$ (kus x on kommide koguarv): 1 p
 - Järeldatud, et punaste ja kollaste kommide koguarv (või siniste ja roheliste kommide koguarv) on $\frac{1}{2}x$: 1 p
 - Lahendus lõpule viidud: 5 p
Sealhulgas žürii lahendusega sarnase lähenemise korral:
 - Põhjendatud, et roheliste kommide arv on $\frac{1}{3}x - 60$: 1 p
 - Põhjendatud, et siniste kommide arv on $\frac{1}{2}x - 90$: 1 p
 - Põhjendatud, et roheliste kommide arv on 90: 1 p
 - Nende andmete põhjal leitud kommide koguarv 450: 2 p

Kui õpilase lahendus ei järgi ametlikku lahendust, vaid leiab (mistahes ammendavalt põhjendatud viisil) igat värvi kommide arvud ja seejärel nende arvude summa, siis anda skeemi kolmandas reas ette nähtud 5 punktist kokku 4 punkti igat värvi kommide arvude leidmise eest ja 1 punkt summa korrektse leidmise eest. Seejuures ei pruugi jaotada 4 punkti võrdselt värvide vahel (á 1 punkt), vaid sarnase mõistliku töömahuga osade vahel, millest mõnes võidakse leida mitut värvi kommide arvud ja mõnes ainult kasulikke seoseid.

Ainult õige vastuse (450) eest ilma selgitusteta anda 2 punkti.

2.
 - Leitud suurim imeilus arv 99996 (jääkide abil nagu žürii lahenduses või süstemaatilise läbivaatusega): 2 p
 - Järeldatud, et otsitav arv pole suurem arvust 98996: 2 p
 - Näidatud, et 98990 on suurim imeilus arv, mis pole suurem arvust 98996 (jääkide abil nagu žürii lahenduses või süstemaatilise läbivaatusega): 2 p
 - Põhjendatud, et see arv ongi otsitav: 1 p

Ainult õige vastuse (98990) eest ilma selgitusteta anda 2 punkti.

3.
 - Leitud valgete ühikruutude arv 24: 1 p
 - Põhjendatud, et väljalõigatavas kujundis ei saa olla 24 valget ühikruutu: 2 p

- Toodud näide väljalõikamiseks sobivast kujundist, milles on 11 musta ja 22 valget ühikruutu: 3 p
- Sealhulgas:*
- Väidetud sellise kujundi leidumist ilma põhjendamata: 1 p
- Järeldatud, et suurima väljalõikamiseks sobiva kujundi pindala on 33: 1 p

Ainult õige vastuse (33) eest ilma selgitusteta anda 2 punkti.

4. Anname kaks eraldi skeemi erinevate lahenduste hindamiseks.

Skeem selliste lahenduste jaoks, mille algusjärgus leitakse tabeli mõlemat rida korraga kattev periood (žürii lahendus 1):

- Märgitud, et teise rea arvude viimane number (või jääk jagamisel arvuga 10) kordub iga 10 veeru järel: 2 p
- Põhjendatud, et veeru arvude summa viimane number (või jääk jagamisel arvuga 10) kordub iga 20 veeru järel: 2 p
- Näidatud, et 20 järjestikuse veeru seas leidub täpselt 1 selline, kus arvude summa viimane number (või jääk jagamisel arvuga 10) on 0: 1 p
- Leitud, et esimese (või viimase) 2020 veeru seas leidub 101 sellist, kus arvude summa viimane number (või jääk jagamisel arvuga 10) on 0: 1 p
- Põhjendatud, et see on ka kogu tabeli selliste veergude arv: 1 p

Kui õpilane on kasutanud tsüklit, mille pikkus on suurem kui 20 (see peab siis olema arvu 20 kordne), siis hinnata õpilase kasutatud tsükli pikkusele kohandatud sarnase skeemi järgi.

Skeem selliste lahenduste jaoks, kus veerud jaotatakse rühmadesse 4-kaupa (žürii lahendus 2):

- Jaotatud veerud 4-kaupa rühmadesse ja põhjendatud, et ühegi rühma esimese kolme veeru arvude summad ei jagu arvuga 10: 3 p
- Sealhulgas:*
- Põhjendatud, et iga rühma esimese kolme veeru arvude summad on paaritud: 2 p
- Leitud, et rühmades järjekorranumbriga 2, 7, 12, ... esineb veerg, milles olevate arvude summa jagub arvuga 10, ja teistes mitte: 2 p
- Saadud, et esimese 2020 (või 2024) veeru seas leidub 101 veergu, milles olevate arvude summa jagub arvuga 10: 1 p
- Põhjendatud, et see on ka kogu tabeli selliste veergude arv: 1 p

Kui veerud on jaotatud 4-kaupa rühmadesse, aga mingeid kasulikke samme ei järgne, siis anda skeemi esimese rea järgi 0 punkti.

Ainult õige vastuse (101) eest ilma selgitusteta anda 2 punkti.



II osa hindamisjuhised

1. Anname kaks eraldi skeemi erinevate lahenduste hindamiseks.

Skeem lahendusele, mis leiab kõik numbrid, millega kasutatud tähed asendatakse (žürii lahendus 1):

- Põhjendatud, et $G = 9$ ja $B = 1$ (sh välistatud võimalus, et $G = 8$ ja $E = 0$): 2 p
- Põhjendatud, et $F = 4$ ja $I = 2$ (sh välistatud võimalus, et $F = 2$ ja $I = 4$): 1 p
- Järeldatud, et $C = 8$: 1 p
- Põhjendatud, et $E = 5$ (sh välistatud kõik muud võimalused): 2 p
- Leitud $A = 3$, $D = 6$ ja $H = 7$ ning järeldatud, et 0 jääb kasutamata: 1 p

Skeem lahendusele, mis välistab kõigi numbrite võrdumise nulliga (žürii lahendus 2):

- Välistatud võimalused $A = 0$, $D = 0$, $G = 0$: 1 p
- Välistatud võimalused $F = 0$, $I = 0$: 1 p
- Välistatud võimalus $C = 0$: 1 p
- Välistatud võimalus $B = 0$: 1 p
- Välistatud võimalus $E = 0$: 1 p
- Välistatud võimalus $H = 0$: 1 p
- Järeldatud, et 0 jääb kasutamata: 1 p

Ainult õige vastuse (0) eest ilma selgitusteta anda 2 punkti.

- 2.
- Leitud, et tunni jooksul muutub nurk tunni- ja minutiosuti vahel 330° võrra (või leitud nurga muutus mõne muu ajaühiku jooksul): 1 p
 - Põhjendatud, et kui kell näitab 8:25, siis tunni- ja minutiosuti vaheline nurk on $102,5^\circ$: 2 p
 - Saadud aru, et kuni otsitava ajani nurk muutub $2 \cdot 102,5^\circ$ ja veel 15° võrra: 2 p
 - Leitud, et praegusest ajast otsitava ajani kulub 40 minutit (või $\frac{2}{3}$ tundi): 1 p
 - Leitud küsitud kellaeg 9:05: 1 p

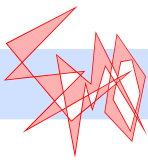
Ainult õige vastuse (9:05) eest ilma selgitusteta anda 2 punkti.

3. ○ Esitatud 20 järjestikust naturaalarvu ühe muutuja kaudu (nt $n, n + 1, \dots, n + 19$): 1 p
- Avaldatud nende arvude summa (nt $20n + 190$): 1 p
- Esitatud väljajäetav arv kujul $n + x$, kus x on uus muutuja, ja lahutatud see arv summast: 1 p
- Saadud võrrand, mis korrektselt väljendab eeldust, et järelejäänud arvude summa on 2025, ja see lihtsustatud: 1 p
- Leitud $1835 = 96 \cdot 19 + 11$: 1 p
- Järeldatud, et $x = 8$ ja $n = 97$: 1 p
- Leitud kustutatud arv 105: 1 p

Ainult õige vastuse (105) eest ilma selgitusteta anda 2 punkti.

4. ○ Korrektselt avaldatud nurkade BCE, DCE, CDE, ADE ja üks nurkadest BCD ja DAB mingi ühe ja sama nurga kaudu: 1 p
- Koostatud lineaarvõrrand, millest saab selle nurga avaldada: 1 p
- Võrrand lahendatud: 1 p
- Põhjendatud, et kolmnurk ADE on võrdhaarne tipunurgaga E juures: 1 p
- Järeldatud, et F on külje AD keskpunkt: 1 p
- Põhjendatud, et kolmnurga CDF pindala on 12 cm^2 : 2 p

Ainult õige vastuse (12 cm^2) eest ilma selgitusteta anda 2 punkti, ühiku puudumise või vale ühiku korral anda 1 punkt.



II osa hindamisjuhised

1. ○ Üheselt mõistetavalt esitatud moodus panna antud 2024-kohalise arvu numbrite vahele võrdusmärk ja plussid vastavalt ülesande tingimustele: 3 p
- Üheselt mõistetavalt esitatud moodus panna antud 2025-kohalise arvu numbrite vahele võrdusmärk ja plussid vastavalt ülesande tingimustele: 4 p

Ainult mõlema osa õige vastuse (jah, jah) eest ilma selgitusteta anda 0 punkti.

2. Anname kaks erinevat skeemi erinevate lähenemistega tööde hindamiseks.

Skeem lahendustele ruutvõrrandi abil (žürii lahendus 1):

- Idee vaadelda antud seost ruutvõrrandina n suhtes: 2 p
- Kirjutatud välja selle ruutvõrrandi lahendid üldkujul (kas üldise või taandatud ruutvõrrandi lahendivalemi põhjal): 1 p
- Märkatud, et n täisarvulisuseks peab $10 - m^2$ olema täisarvu ruut: 2 p
- Sellest lähtuvalt leitud antud võrrandi kõik lahendid: 2 p

Sealhulgas:

- Leitud kas kõik võimalikud m väärtused või ühe m väärtuse korral kõik võimalikud n väärtused: 1 p

Skeem juhtude läbivaatuse kaudu (žürii lahendus 2):

- Arvutatud välja vasaku poole väärtus $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$ jaoks: 2 p
- Sealhulgas:*
- Arvutatud välja neist väärtustest rohkem kui pooled: 1 p
- Leitud kõik lahendid: 1 p
- Ammendavalt põhjendatud, et juhul $n > 6$ on vasaku poole väärtus negatiivne: 3 p

Sealhulgas:

- Teisendatud vasak pool kujule, mis hõlbustab negatiivsuse põhjendamist (nt $1 - n(n - 6)$): 1 p
- Mainitud, et ruut ei saa olla negatiivne, millest järeldatud, et rohkem lahendeid pole: 1 p

Ainult täieliku õige vastuse ((0, 1), (2, 3), (4, 3), (6, 1) suvalises järjestuses) eest ilma selgitusteta anda 1 punkt. Kui vastuses on mõni õige lahend puudu või mõni vale lahend lisaks, siis anda 0 punkti.

- 3.
- Näidatud, et juht, kus kolmnurga $A'B'C'$ ükski nurk pole võrdne kolmnurga ABC vastava nurgaga, pole võimalik: 2 p
 - Näidatud, et juht, kus täpselt üks kolmnurga $A'B'C'$ nurk on võrdne kolmnurga ABC vastava nurgaga, pole võimalik: 3 p
 - Põhjendatud sarnasustunnusele viidates, et ülejäänud juhtudel on kolmnurgad ABC ja $A'B'C'$ sarnased: 2 p
- Sealhulgas:*
- Esitatud see väide ilma sarnasustunnusele viitamata: 1 p

Ainult õige vastuse (jah) eest ilma selgitusteta anda 0 punkti.

- 4.
- Väidetud, et kui Anna asendab avakäigul mõne numbriga 0, siis ta võidab: 1 p
 - Märgitud, et pärast Anna sellist avakäiku on kõiki nullist erinevaid numbreid paarisarv: 2 p
- Sealhulgas:*
- Esitatud idee vaadelda nullist erinevate numbrite arvude paarsust või seda ideed kasutatud: 1 p
 - Kirjeldatud Anna strateegia kopeerida Berdi viimast käiku: 2 p
 - Märgitud, et pärast igat sellist käiku on jälle kõiki nullist erinevaid numbreid paarisarv: 1 p
 - Järeldatud, et käigupuudusse jääb Bert: 1 p

Ainult õige vastuse (Anna) eest ilma selgitusteta anda 0 punkti.