Piirkonnavoor 2025

Võistluskomplekti valmimisse panustasid:

Aleksei Ganyukov
Maksim Ivanov
Raul Kangro
Urve Kangro
Evely Kirsiaed
Oleg Košik
Härmel Nestra
Marko Tsengov
Hendrik Vija
Jan Villemson

Eesti 72. matemaatikaolümpiaad

29. jaanuar 2025 Piirkonnavoor **7. klass**

I osa. *Lahendamisaega on 30 minutit.*
Sellele lehele kirjuta ainult vastused, lahendamiseks võid kasutada lisapaberit.
Iga ülesande õige ja lihtsustatud kujul vastus on väärt 2 punkti.
Elektroonilised ega kirjalikud abivahendid ei ole lubatud.

Kood

1. Arvuta:

$$7 \cdot 6 : \left(1 + \frac{2}{3 - \frac{4}{5}}\right) = \dots\dots\dots\dots$$

2. Olgu a, b, c, d ja e sellised erinevad naturaalarvud, et on tõene võrdus $a \cdot b \cdot c \cdot d \cdot e = 2025$. Leia summa $a + b + c + d + e$.

. . . .

3. Võistkonnas on 4 mängijat, kelle keskmine vanus on 25 aastat. Kui võistkonna noorima mängija asemel oleks 35-aastane mängija, siis oleks mängijate keskmine vanus 28 aastat. Kui vana on võistkonna noorim mängija?

. . . .

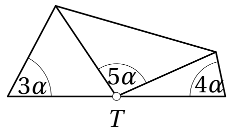
4. Kui palju on kokku selliseid numbrite paare (x, y), mille korral kuuekohaline arv $\overline{20x25y}$ jagub nii arvuga 3 kui ka arvuga 5?

. . . .

5. Ruudu $ABCD$ küljel CD valitakse punkt E nii, et murdjoone ADE pikkus on 20 cm ja murdjoone BCE pikkus on 25 cm. Leia ruudu $ABCD$ pindala.

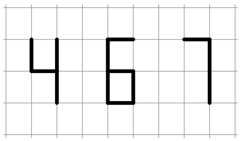
. . . .

6. Joonisel on kolm võrdhaarset kolmnurka. Iga kolmnurga tipunurk asub tipu T juures ning need kolm tipunurka moodustavad kokku sirgnurga. Kolme joonisel märgitud nurga suurused on 3α, 4α ja 5α. Leia α.



. . . .

7. Võrdseteks ristkülikuteks jaotatud paberilehele kirjutatakse numbrid 4, 6 ja 7 joonisel näidatud viisil. Numbrite 4 ja 6 kirjutamiseks vajalike lõikude kogupikkused on vastavalt 13 cm ja 18 cm. Leia numbri 7 kirjutamiseks vajalike lõikude kogupikkus.



. . . .

Eesti 72. matemaatikaolümpiaad

29. jaanuar 2025 | Piirkonnavoor | **8. klass**

I osa. *Lahendamisaega on 30 minutit.*
Sellele lehele kirjuta ainult vastused, lahendamiseks võid kasutada lisapaberit.
Iga ülesande õige ja lihtsustatud kujul vastus on väärt 2 punkti.
Elektroonilised ega kirjalikud abivahendid ei ole lubatud.

Kood

1. Arvuta:

$$\frac{1}{2} : \frac{2}{3} : \frac{3}{4} : \frac{4}{5} : \frac{5}{6} : \frac{6}{7} : \frac{7}{8} = \ldots\ldots\ldots\ldots$$

2. Kui palju on erinevaid võimalusi asendada arvus 2025 üks number mõne muu numbriga nii, et saadud neljakohaline arv ei jaguks arvuga 3?

. . . .

3. Võistkonnas on kolm mängijat, kelle vanused suhtuvad nagu $4 : 5 : 6$. Nende mängijate keskmine vanus on 30 aastat. Kui vana on selle võistkonna noorim mängija?

. . . .

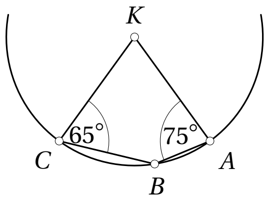
4. Muutujate a, b ja c väärtused on sellised erinevad naturaalarvud, et kehtib võrdus $a^2 \cdot b^2 \cdot c^2 = 2025$. Leia summa $a + b + c$ suurim võimalik väärtus.

. . . .

5. Ristküliku $ABCD$ ümbermõõt on 60 cm. Pikemal küljel CD valitakse selline punkt E, et lõigu DE pikkus on 8 cm. Murdjoon ADE on 3 korda lühem kui murdjoon $ABCE$. Leia ristküliku $ABCD$ pindala.

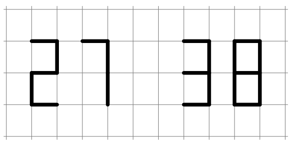
. . . .

6. Ringjoonel keskpunktiga K valitakse punktid A, B ja C selles järjestuses nii, et $\angle KAB = 75^\circ$ ja $\angle BCK = 65^\circ$. Leia nurga CKA suurus.



. . . .

7. Võrdseteks ristkülikuteks jaotatud paberilehele kirjutatakse arvud 27 ja 38 joonisel näidatud viisil. Arvu 27 kirjutamiseks vajalike lõikude kogupikkus on 27 cm. Leia arvu 38 kirjutamiseks vajalike lõikude kogupikkus.



. . . .

Eesti 72. matemaatikaolümpiaad

29. jaanuar 2025 Piirkonnavoor **9. klass**

I osa. *Lahendamisaega on 30 minutit.*
Sellele lehele kirjuta ainult vastused, lahendamiseks võid kasutada lisapaberit.
Iga ülesande õige ja lihtsustatud kujul vastus on väärt 2 punkti.
Elektroonilised ega kirjalikud abivahendid ei ole lubatud.

Kood

1. Arvuta:

$$\frac{3636 \cdot 4545}{909^2} = \ldots\ldots\ldots\ldots$$

2. Korrutis $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10$ jagatakse arvuga 2025. Leia jagatise viimane number.

. . . .

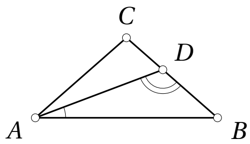
3. Võistkonnas on viis mängijat, kelle vanused on kõik erinevad. Kahe noorima mängija keskmine vanus on 20 aastat ja ülejäänud mängijate keskmine vanus on 25 aastat. Leia suurim võimalik selle võistkonna vanima mängija vanus. Mängijate vanuseid arvestatakse täisaastates.

. . . .

4. Arvus 2025 on täpselt kaks numbrit 2, ülejäänud numbrid on erinevad. Kui palju on sama omadusega arvust 2025 väiksemaid neljakohalisi naturaalarve?

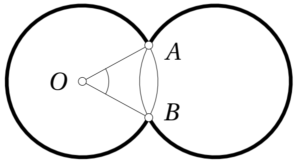
. . . .

5. Võrdhaarses kolmnurgas ABC alusega AB on tõmmatud nurgapoolitaja AD. On teada, et nurk ADB on 6 korda suurem kui nurk BAD. Leia nurga ACB suurus.



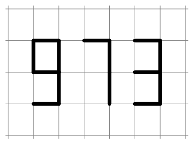
. . . .

6. Kaks võrdset ringjoont raadiusega 5 cm lõikuvad punktides A ja B. Ühe ringjoone keskpunkt on O. Leia kesknurga AOB suurus, kui jämeda joone pikkus on 17π cm.



. . . .

7. Võrdseteks ristkülikuteks jaotatud paberilehele kirjutatakse arv 973 joonisel näidatud viisil. Selle arvu kirjutamiseks vajalike lõikude kogupikkus on 973 mm. Leia numbri 9 kirjutamiseks vajalike lõikude kogupikkus.



. . . .

Eesti 72. matemaatikaolümpiaad

29. jaanuar 2025   Piirkonnavoor   **7. klass**

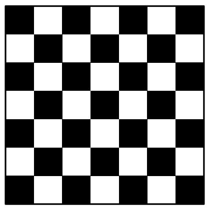
II osa. *Lahendamisaega on 3 tundi.*
Ülesannete lahendused kirjuta eraldi lehele.
Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti. Ainult vastusest ei piisa!
Elektroonilised ega kirjalikud abivahendid ei ole lubatud.

1. Kommipakis on ainult punased, kollased, sinised ja rohelised kommid. Kolmandik kõigist kommidest on punased. Neljandik ülejäänud kommidest on kollased. Siniseid komme on pakis 1,5 korda rohkem kui rohelisi. Mitu kommi on selles pakis kokku, kui punaseid komme on seal 60 võrra rohkem kui rohelisi?

2. Nimetame naturaalarvu *imeilusaks*, kui ta on viiekohaline ja tema numbrite summa jagub arvuga 7.

Leia suurim selline imeilus arv, millele mingi neljakohalise arvu liitmisel saame summaks samuti imeilusa arvu.

3. Joonisel on ruudustik mõõtmetega 7×7, mille ühikruudud on värvitud malekorras mustaks ja valgeks. Sellest ruudustikust tuleb välja lõigata kujund, mis koosneb tervetest ühikruutudest, ei lagune osadeks ega sisalda auke. Selles kujundis peab olema 2 korda rohkem valgeid ühikruute kui musti. Leia suurima väljalõikamiseks sobiva kujundi pindala.



4. Tabelis on 2 rida ja 2025 veergu. Esimese rea lahtritesse kirjutatakse arvud 2, 3, 4 ja 6, seejärel jälle arvud 2, 3, 4 ja 6, siis jälle samad arvud jne. Teise rea lahtritesse kirjutatakse järjestikused naturaalarvud alates arvust 7. Mitu veergu, mille lahtrites olevate arvude summa jagub arvuga 10, on selles tabelis?

2	3	4	6	2	3	4	6	2
7	8	9	10	11	12	13	14	15

Eesti 72. matemaatikaolümpiaad

29. jaanuar 2025 Piirkonnavoor **8. klass**

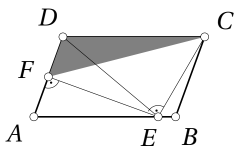
II osa. *Lahendamisaega on 3 tundi.*
Ülesannete lahendused kirjuta eraldi lehele.
Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti. Ainult vastusest ei piisa!
Elektroonilised ega kirjalikud abivahendid ei ole lubatud.

1. Kirjutises $ABC + DEF = GHI$ asendatakse erinevad tähed erinevate numbritega nii, et tekiks tõene võrdus, kus liidetavad ja summa on kolmekohalised arvud. Milline number ei vasta ühelegi tähele, kui lisaks on teada, et $A + E = 8$, $F \cdot I = 8$ ja $G - B = 8$?

2. Praegu näitab kell 8:25. Millist aega näitab kell, kui esmakordselt pärast praegust hetke on tunni- ja minutiosuti vaheline nurk 15° võrra suurem kui praegu?

3. Tahvlile kirjutatakse 20 järjestikust naturaalarvu. Seejärel kustutatakse neist üks arv nii, et järelejäänud arvude summa on 2025. Leia kustutatav arv.

4. Rööpküliku $ABCD$ pikemal küljel AB valitakse selline punkt E, et $\angle CED = 90^\circ$, $\angle ADE = 2\angle CDE$ ja $\angle DCE = 3\angle BCE$. Punktist E tõmmatakse küljele AD ristlõik EF. Leia kolmnurga CDF pindala, kui kolmnurga CDE pindala on 24 cm^2.



Eesti 72. matemaatikaolümpiaad

29. jaanuar 2025 Piirkonnavoor **9. klass**

II osa. *Lahendamisaega on 4 tundi.*
Ülesannete lahendused kirjuta eraldi lehele.
Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti. Ainult vastusest ei piisa!
Elektroonilised ega kirjalikud abivahendid ei ole lubatud.

1. Nimetame positiivset täisarvu *eriliseks*, kui tema numbrite vahele saab panna ühe võrdusmärgi ja null või enam plussmärki nii, et tekib tõene võrdus. Näiteks arv 3210123 on eriline, sest temast on võimalik saada tõene võrdus $3 + 2 + 10 = 12 + 3$.

a) Kas 2024-kohaline arv $101010\ldots10$ on eriline?

b) Kas 2025-kohaline arv $101010\ldots101$ on eriline?

(Mõlemas arvus esineb 10 täpselt 1012 korda, b-osas on arvu lõpus veel üks number 1.)

2. Leia kõik mittenegatiivsete täisarvude paarid (n, m), mis rahuldavad tingimust

$$1 + 6n - n^2 = m^2.$$

3. Kolmnurkade ABC ja $A'B'C'$ kohta on teada järgmised kolm fakti:

1) $\angle ABC = \angle A'B'C'$ või $\angle ABC = 180^\circ - \angle A'B'C'$;

2) $\angle BCA = \angle B'C'A'$ või $\angle BCA = 180^\circ - \angle B'C'A'$;

3) $\angle CAB = \angle C'A'B'$ või $\angle CAB = 180^\circ - \angle C'A'B'$.

Kas võib kindlalt väita, et kolmnurgad ABC ja $A'B'C'$ on sarnased?

4. Tahvlile on kirjutatud numbrid 202520252025. Anna ja Bert mängivad mängu, kus igal käigul kustutab mängija ühe tahvlil olevatest numbritest ja kirjutab asemele mõne sellise numbri, mis on kustutatud numbrist väiksem. Anna alustab ja käike tehakse kordamööda. Kaotab mängija, kes enam ei saa käiku teha (kõik numbrid on muutunud nullideks). Kumb mängija saab võita vastase iga vastumängu korral?

Eesti 72. matemaatikaolümpiaad

29. jaanuar 2025 Piirkonnavoor **10. klass**

Lahendamisaega on 5 tundi.
Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti.
Elektroonilised ega kirjalikud abivahendid ei ole lubatud.

1. Järjesta arvud $7\sqrt{5}$, $11\sqrt{2}$ ja $9\sqrt{3}$ kasvavalt.

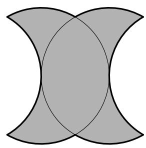
2. Ruutvõrrandil $ax^2 + bx + c = 0$ on kaks reaalarvulist lahendit, mille korrutis on 3. Sellel võrrandil vahetatakse ruutliikme kordaja ja vabaliige omavahel. Leia saadud võrrandi lahendite korrutis.

3. Leia kõik positiivsete täisarvude kolmikud (x, y, z), mis rahuldavad võrrandit

$$xyz + 17xy + xz + 4yz + 17x + 68y + 4z = 2025.$$

4. Saapad ja jope maksid enne hinnatõusu kokku 300 eurot. Pärast hinnatõusu maksavad saapad endisest 10 kuni 20 protsenti rohkem, jope aga endisest 30 kuni 40 protsenti rohkem. Pärast hinnatõusu on jope saabastest kallim 70 kuni 90 euro võrra. Leia madalaim ja kõrgeim neil tingimustel võimalik saabaste hind enne hinnatõusu.

5. Joonisel kujutatud x-täht koosneb neljast ringjoone kaarest, mis kahekaupa puutuvad kaarte keskpunktides ja kahekaupa omavad kaht ühist otspunkti. Kaks pikemat kaart on ühepikkused ja 2 korda pikemad kahest lühemast kaarest. Kõik kaared on raadiusega 1. Leia x-tähe poolt kaetava ala (joonisel halliks värvitud) pindala.



6. Juku kirjutab 5×5 ruudustiku igasse ühikruutu mingi positiivse reaalarvu nii, et vasakus alumises nurgaruudus on 1, paremas ülemises nurgaruudus on 2025 ning igas 2×2 ruudus on nurkapidi kokkupuutuvatesse ühikruutudesse kirjutatud arvude korrutised võrdsed. Leia ruudustiku alumisse paremasse nurgaruutu ja ülemisse vasakusse nurgaruutu kirjutatud arvude korrutis.

Eesti 72. matemaatikaolümpiaad

29. jaanuar 2025 Piirkonnavoor **11. klass**

Lahendamisaega on 5 tundi.
Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti.
Elektroonilised ega kirjalikud abivahendid ei ole lubatud.

1. Kumb arvudest $9\sqrt{5}$ ja $8 + 7\sqrt{3}$ on suurem?

2. Jukul on mängulaud mõõtmetega 10×10, mis on jaotatud ühikruutudeks. Juku soovib mängida mängu, mida saab mängida mistahes ruudustikul mõõtmetega $m \times n$, kus $m \geqslant 2$ ja $n \geqslant 2$. Mitmel viisil on Jukul võimalik välja valida mängulaua osa, millel oma mängu mängida?

3. Leia kõik neljakohalised naturaalarvud n, mille kahest esimesest numbrist ja kahest viimasest numbrist (järjestust muutmata) moodustatud kahekohaliste arvude summa ruut võrdub arvuga n.

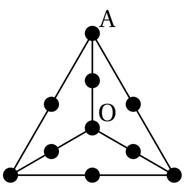
4. Leia kõik reaalarvude kolmikud (x, y, z), mis rahuldavad võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} x + y = z, \\ y^2 + z^2 = x^2, \\ z^3 + x^3 = y^3. \end{cases}$$

5. Leia kõik positiivsed täisarvud n, mille korral leidub tasandil kumer n-nurk järgmiste omadustega:

1) leiduvad kaks sisenurka, mis on erinevate suurustega α ja β;
2) iga sisenurk on kas suurusega α või suurusega β;
3) suurusega α sisenurkade summa ja suurusega β sisenurkade summa on võrdsed.

6. Joonisel on linna X trammiliinide võrgustik, mille liine märgivad sirglõigud ja peatusi mummukesed. Juku ja tema sõbrad mängivad kullimängu, kus on üks põgeneja ja vähemalt üks püüdja. Igal käigul otsustavad kõik mängijad üheaegselt, kas jääda paigale või liikuda trammiga ühe peatuse võrra mööda mingit liini mingis suunas. Pärast käiku saavad kõik teada, mida teised otsustasid ja kus nad asuvad. Kui pärast käiku on vähemalt üks püüdja põgenejaga samas peatuses, siis on põgeneja kinni püütud. Põgeneja alustab peatuses A ning püüdjad alustavad peatuses O. Leia vähim püüdjate arv, mille korral on püüdjatel võimalik põgeneja lõpliku arvu käikudega tabada sõltumata põgeneja liikumisest.



Eesti 72. matemaatikaolümpiaad

29. jaanuar 2025 Piirkonnavoor **12. klass**

Lahendamisaega on 5 tundi.
Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti.
Elektroonilised ega kirjalikud abivahendid ei ole lubatud.

1. Arvuta summa

$$\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{6}}+\frac{1}{\sqrt{6}+\sqrt{7}}+\frac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{8}}+\frac{1}{\sqrt{8}+\sqrt{9}}.$$

2. Kolmnurga ABC pindala avaldub kujul $S = \frac{a^2+b^2-c^2}{4}$, kus a, b ja c on vastavalt külgede BC, CA ja AB pikkused. Leia nurga ACB suurus.

3. Positiivsed täisarvud a, b, c ja d on sellised, et $a > b > c > d$, arvud $a + b$ ja $c + d$ jaguvad mõlemad 2-ga, arvud $a - c$ ja $b - d$ jaguvad mõlemad 3-ga ning arvud $a \cdot d$ ja $b \cdot c$ jaguvad mõlemad 5-ga. Leia vähim võimalik arvude a, b, c ja d summa.

4. Jukul on kolm tahvlit šokolaadi, igaüks massiga 60 g. Esimesel päeval murrab Juku esimese šokolaaditahvli kolmeks tükiks, mille massid on mingi aritmeetilise jada järjestikused liikmed, ja sööb neist tükkidest kaks ära. Teisel päeval murrab Juku teise šokolaaditahvli niisama rasketeks tükkideks nagu esimesel päeval esimese tahvli ja sööb saadud kolmest tükist kaks ära. Kolmandal päeval murrab Juku kolmanda šokolaaditahvli niisama rasketeks tükkideks nagu eelmistel päevadel eelmised tahvlid ja sööb saadud kolmest tükist kaks ära. Neljandal päeval sööb Juku ära kõik esimesel kolmel päeval järele jäänud tükid. Nii sööb Juku kõigil neljal päeval ühepalju šokolaadi. Leia šokolaaditahvli kolmeks tükiks murdmisel tekkinud suurima tüki mass.

5. Kolmnurga kahe kõrguse pikkused on 3 cm ja 6 cm. Leia kõik võimalused, milline saab olla kolmnurga kolmanda kõrguse pikkus.

6. Kooli kergejõustikuvõistluste 100 meetri jooksu poolfinaalides osaleb kokku 12 jooksjat. Nad loositakse kolme 4-liikmelisse gruppi, nii et kõik gruppidesse jagunemise võimalused on võrdtõenäolised. Seejärel jookseb iga grupp ühe jooksu. Finaali pääseb 4 jooksjat: iga jooksu võitja ja lisaks ka kiireim kõigist neist jooksjatest, kes oma jooksu ei võida. Leia tõenäosus, et finaali pääsevad need jooksjad, kes saavad 4 kiireimat aega. (Eeldame, et ükski kaks jooksjat ei saa täpselt sama aega ja et iga jooksja saavutab kindla aja sõltumata grupist, milles ta jookseb.)

72-я Олимпиада Эстонии по математике

29 января 2025 г. Региональный тур **7 класс**

I часть. *Время, отводимое для решения: 30 минут.*
На этом листке написать только ответы, для решения можно использовать дополнительную бумагу.
Верный и в упрощённом виде ответ каждой задачи даёт 2 балла.
Вспомогательные письменные материалы или электронные приборы не разрешены.

Код

1. Вычислить:

$$7 \cdot 6 : \left(1 + \frac{2}{3 - \frac{4}{5}}\right) = \ldots\ldots\ldots\ldots$$

2. Пусть a, b, c, d и e такие различные натуральные числа, что действует равенство $a \cdot b \cdot c \cdot d \cdot e = 2025$. Найти сумму $a + b + c + d + e$.

. . . .

3. В команде всего 4 игрока, средний возраст которых равен 25 годам. Если бы вместо самого младшего игрока в команде был 35-летний игрок, то средний возраст игроков команды был бы равен 28 годам. Сколько лет самому младшему игроку этой команды?

. . . .

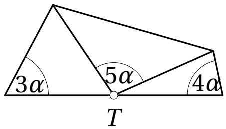
4. Сколько всего таких пар цифр (x, y), при которых шестизначное число $\overline{20x25y}$ делится как на число 3, так и на число 5?

. . . .

5. На стороне CD квадрата $ABCD$ выбрана такая точка E, что длина дробной линии ADE равна 20 см, а длина дробной линии BCE равна 25 см. Найти площадь квадрата $ABCD$.

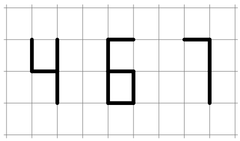
. . . .

6. На рисунке изображены три равнобедренных треугольника. Угол при вершине каждого треугольника лежит в точке T, и эти три угла при вершинах образуют вместе развёрнутый угол. Величины трёх обозначенных на рисунке углов равны 3α, 4α и 5α. Найти α.



. . . .

7. На листке бумаги, который поделён на равные прямоугольники, записали цифры 4, 6 и 7 так, как показано на рисунке. Общие длины отрезков, необходимых для записи цифр 4 и 6, равны соответственно 13 см и 18 см. Найти общую длину отрезков, необходимых для записи цифры 7.



. . . .

72-я Олимпиада Эстонии по математике

29 января 2025 г. Региональный тур **8 класс**

I часть. *Время, отводимое для решения: 30 минут.*
На этом листке написать только ответы, для решения можно использовать дополнительную бумагу.
Верный и в упрощённом виде ответ каждой задачи даёт 2 балла.
Вспомогательные письменные материалы или электронные приборы не разрешены.

Код

1. Вычислить:

$$\frac{1}{2} : \frac{2}{3} : \frac{3}{4} : \frac{4}{5} : \frac{5}{6} : \frac{6}{7} : \frac{7}{8} = \ldots\ldots\ldots\ldots$$

2. Сколько всего различных возможностей для замены одной цифры числа 2025 на какую-то другую цифру так, чтобы полученное четырёхзначное число не делилось на число 3?

. . . .

3. В команде всего три игрока, возрасты которых относятся как $4 : 5 : 6$. Средний возраст этих игроков равен 30 годам. Сколько лет самому младшему игроку этой команды?

. . . .

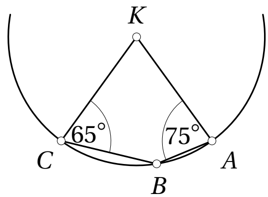
4. Значениями неизвестных a, b и c являются такие различные натуральные числа, что действует равенство $a^2 \cdot b^2 \cdot c^2 = 2025$. Найти наибольшее возможное значение суммы $a + b + c$.

. . . .

5. Периметр прямоугольника $ABCD$ равен 60 см. На его большей стороне CD выбрана такая точка E, что длина отрезка DE равна 8 см. Дробная линия ADE в 3 раза короче дробной линии $ABCE$. Найти площадь прямоугольника $ABCD$.

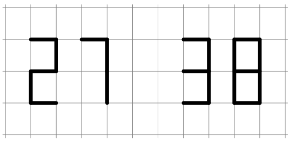
. . . .

6. На окружности с центром K выбраны в указанном порядке точки A, B и C так, что $\angle KAB = 75^\circ$ и $\angle BCK = 65^\circ$. Найти величину угла CKA.



. . . .

7. На листке бумаги, который поделён на равные прямоугольники, записали числа 27 и 38 так, как показано на рисунке. Общая длина отрезков, необходимых для записи числа 27, равна 27 см. Найти общую длину отрезков, необходимых для записи числа 38.



. . . .

72-я Олимпиада Эстонии по математике

29 января 2025 г. Региональный тур **9 класс**

I часть. *Время, отводимое для решения: 30 минут.*
На этом листке написать только ответы, для решения можно использовать дополнительную бумагу.
Верный и в упрощённом виде ответ каждой задачи даёт 2 балла.
Вспомогательные письменные материалы или электронные приборы не разрешены.

Код

1. Вычислить:

$$\frac{3636 \cdot 4545}{909^2} = \ldots\ldots\ldots\ldots$$

2. Произведение $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10$ делится на число 2025. Найти последнюю цифру частного.

. . . .

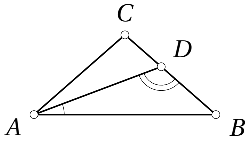
3. В команде всего пять игроков разного возраста. Средний возраст двух самых младших игроков команды равен 20 годам, а средний возраст оставшихся игроков команды равен 25 годам. Найти наибольший возможный возраст самого старшего игрока этой команды. Возрасты игроков берутся в целых годах.

. . . .

4. В числе 2025 ровно две цифры 2, а другие цифры различны. Сколько всего четырёхзначных натуральных чисел, которые меньше числа 2025 и имеют такое же свойство?

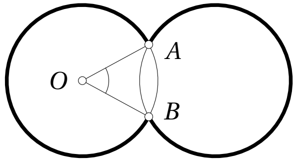
. . . .

5. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AB проведена биссектриса AD. Известно, что угол ADB в 6 раз больше угла BAD. Найти величину угла ACB.



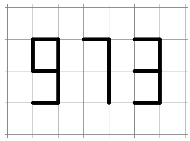
. . . .

6. Две равные окружности с радиусом 5 см пересекаются в точках A и B. Точка O является центром одной окружности. Найти величину центрального угла AOB, если длина жирной линии равна 17π см.



. . . .

7. На листке бумаги, который поделён на равные прямоугольники, записали число 973 так, как показано на рисунке. Общая длина отрезков, необходимых для записи этого числа, равна 973 мм. Найти общую длину отрезков, необходимых для записи цифры 9.



. . . .

72-я Олимпиада Эстонии по математике

29 января 2025 г. Региональный тур **7 класс**

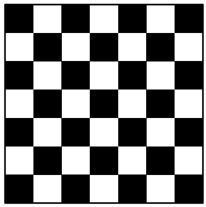
II часть. *Время, отводимое для решения: 3 часа.*
Решения задач написать на отдельном листе.
Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи даёт 7 баллов. Написать только ответ недостаточно!
Вспомогательные письменные материалы или электронные приборы не разрешены.

1. В упаковке только красные, жёлтые, синие и зелёные конфеты. Треть всех конфет — красные. Четверть оставшихся конфет — жёлтые. Синих конфет в упаковке в 1,5 раза больше, чем зелёных. Сколько всего в упаковке конфет, если красных в ней на 60 штук больше, чем зелёных?

2. Назовём натуральное число *замечательным*, если оно является пятизначным, а сумма его цифр делится на 7.

Найти наибольшее такое замечательное число, при прибавлении к которому некоторого четырёхзначного числа результат тоже будет замечательным числом.

3. На рисунке изображена квадратная сетка размером 7×7, клетки которой окрашены в шахматном порядке в чёрный и белый цвета. Из этой сетки нужно вырезать фигуру, которая состоит из целых клеток, не распадается на части и не содержит отверстий. Белых клеток в этой фигуре должно быть в 2 раза больше, чем чёрных. Найти наибольшую возможную площадь подходящей для вырезания фигуры.



4. В таблице 2 строки и 2025 столбцов. В ячейки первой строки записывают числа 2, 3, 4 и 6, затем снова числа 2, 3, 4 и 6, затем ещё раз те самые же числа и т.д. В ячейки второй строки записывают последовательные натуральные числа, начиная с числа 7. Сколько в этой таблице столбцов, сумма чисел в ячейках которых делится на 10?

2	3	4	6	2	3	4	6	2
7	8	9	10	11	12	13	14	15

72-я Олимпиада Эстонии по математике

29 января 2025 г. Региональный тур **8 класс**

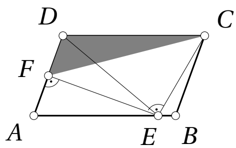
II часть. *Время, отводимое для решения: 3 часа.*
Решения задач написать на отдельном листе.
Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи даёт 7 баллов. Написать только ответ недостаточно!
Вспомогательные письменные материалы или электронные приборы не разрешены.

1. В записи $ABC + DEF = GHI$ разные буквы заменяются разными цифрами так, чтобы получилось верное равенство, в котором слагаемые и сумма являются трёхзначными числами. Какая цифра не соответствует ни одной из букв, если также известно, что $A + E = 8$, $F \cdot I = 8$ и $G - B = 8$?

2. В данный момент часы показывают 8:25. Какое время покажут часы, когда в первый раз после данного момента угол между часовой и минутной стрелками будет на 15° больше, чем сейчас?

3. На доску записывают 20 последовательных натуральных чисел. После этого одно из этих чисел стирают таким образом, что сумма оставшихся чисел равна 2025. Найти число, которое было стёрто.

4. На более длинной стороне AB параллелограмма $ABCD$ выбирается такая точка E, что $\angle CED = 90^\circ$, $\angle ADE = 2\angle CDE$ и $\angle DCE = 3\angle BCE$. Из точки E к стороне AD опускается перпендикуляр EF. Найти площадь треугольника CDF, если площадь треугольника CDE равна 24 см^2.



72-я Олимпиада Эстонии по математике

29 января 2025 г. Региональный тур **9 класс**

II часть. *Время, отводимое для решения: 4 часа.*
Решения задач написать на отдельном листе.
Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи даёт 7 баллов. Написать только ответ недостаточно!
Вспомогательные письменные материалы или электронные приборы не разрешены.

1. Назовём положительное целое число *особенным*, если между его цифрами можно поставить один знак равенства и ноль или более знаков сложения так, чтобы получилось верное равенство. Например, число 3210123 является особенным, так как из него возможно получить верное равенство $3 + 2 + 10 = 12 + 3$.

а) Является ли 2024-значное число $101010\ldots10$ особенным?

б) Является ли 2025-значное число $101010\ldots101$ особенным?

(В обоих числах 10 встречается ровно 1012 раз, а в пункте б в конце числа стоит еще одна цифра 1.)

2. Найти все пары неотрицательных целых чисел (n, m), удовлетворяющие условию
$$1 + 6n - n^2 = m^2.$$

3. О треугольниках ABC и $A'B'C'$ известны следующие три факта:

1) $\angle ABC = \angle A'B'C'$ или $\angle ABC = 180^\circ - \angle A'B'C'$;
2) $\angle BCA = \angle B'C'A'$ или $\angle BCA = 180^\circ - \angle B'C'A'$;
3) $\angle CAB = \angle C'A'B'$ или $\angle CAB = 180^\circ - \angle C'A'B'$.

Можно ли смело утверждать, что треугольники ABC и $A'B'C'$ подобны?

4. На доске записаны цифры 202520252025. Аня и Боря играют в игру, в которой каждый ход игрок стирает одну из цифр на доске и записывает вместо неё какую-то цифру, меньшую стёртой цифры. Аня ходит первой, а ходы выполняются по очереди. Проигрывает игрок, который больше не может сделать ход (все цифры стали нулями). Кто из игроков сможет выиграть при любой контригре соперника?

72-я Олимпиада Эстонии по математике

29 января 2025 г. Региональный тур **10 класс**

Время, отводимое для решения: 5 часов.
Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи даёт 7 баллов.
Вспомогательные письменные материалы или электронные приборы не разрешены.

1. Расположи числа $7\sqrt{5}$, $11\sqrt{2}$ и $9\sqrt{3}$ в порядке возрастания.

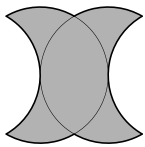
2. У квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ два действительных решения, произведение которых равно 3. В этом уравнении меняют местами коэффициенты при квадратичном и свободном членах. Найти произведение решений нового уравнения.

3. Найти все тройки положительных целых чисел (x, y, z), удовлетворяющие условию

$$xyz + 17xy + xz + 4yz + 17x + 68y + 4z = 2025.$$

4. Сапоги и куртка стоили вместе 300 евро до повышения цен. После повышения цен сапоги стали дороже на величину от 10 до 20 процентов от первоначальной стоимости, а куртка на величину от 30 до 40 процентов от первоначальной стоимости. После повышения цен куртка дороже сапог на величину от 70 до 90 евро. Найти наименьшее и наибольшее при этих условиях возможное значение цены сапог до повышения цен.

5. Показанная на рисунке буква «х» состоит из четырёх дуг окружности, которые попарно касаются друг друга в серединах дуг и попарно имеют по два общих конца. Две более длинные дуги равной длины и в 2 раза длиннее двух коротких дуг. Все дуги имеют радиус 1. Найти площадь области, покрытой буквой «х» (на рисунке закрашена в тёмный цвет).



6. Юра записывает в каждую клетку квадратной сетки размером 5×5 какое-то положительное действительное число так, что в левом нижнем углу записано 1, в правом верхнем углу — 2025, а в каждом квадрате 2×2 произведения чисел в клетках, соприкасающихся углами, равны. Найти произведение чисел, записанных в нижнем правом и верхнем левом углах сетки.

72-я Олимпиада Эстонии по математике

29 января 2025 г. Региональный тур **11 класс**

Время, отводимое для решения: 5 часов.
Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи даёт 7 баллов.
Вспомогательные письменные материалы или электронные приборы не разрешены.

1. Какое из чисел $9\sqrt{5}$ и $8 + 7\sqrt{3}$ больше?

2. У Юры имеется игровое поле размером 10×10, который разделено на единичные квадраты. Он хочет сыграть в игру, которую можно проводить на любой квадратной сетке размером $m \times n$, где $m \geqslant 2$ и $n \geqslant 2$. Сколькими разными способами Юра может выбрать на своём поле область, подходящую для игры?

3. Найти все четырёхзначные натуральные числа n, для которых квадрат суммы двух двузначных чисел, составленных из первых двух и последних двух цифр числа n (без изменения порядка), равен числу n.

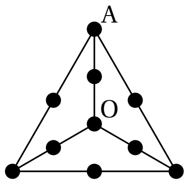
4. Найти все тройки действительных чисел (x, y, z), которые удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} x + y = z, \\ y^2 + z^2 = x^2, \\ z^3 + x^3 = y^3. \end{cases}$$

5. Найти все положительные целые числа n, для которых на плоскости существует выпуклый n-угольник со следующими свойствами:

1) существуют два внутренних угла разной величины, α и β;
2) каждый внутренний угол либо величины α, либо величины β;
3) сумма внутренних углов величины α равна сумме внутренних углов величины β.

6. На рисунке изображена сеть трамвайных линий города X, где линии обозначены прямыми отрезками, а остановки — кружочками. Юра и его друзья играют в салки, где есть один убегающий и по крайней мере один ловящий. На каждом ходу все игроки одновременно решают, оставаться на месте или, воспользовавшись трамваем, переместиться на одну остановку по какому-либо маршруту в выбранном направлении. После каждого хода все узнают, какое решение приняли другие игроки и где они находятся. Если после хода хотя бы один ловящий оказывается на той же остановке, что и убегающий, то убегающий считается пойманным. Убегающий начинает с остановки A, а ловящие — с остановки O. Найти минимальное количество ловящих, при котором они смогут поймать убегающего за конечное число ходов, независимо от его передвижений.



72-я Олимпиада Эстонии по математике

29 января 2025 г. Региональный тур **12 класс**

Время, отводимое для решения: 5 часов.
Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи даёт 7 баллов.
Вспомогательные письменные материалы или электронные приборы не разрешены.

1. Вычислить сумму

$$\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{6}}+\frac{1}{\sqrt{6}+\sqrt{7}}+\frac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{8}}+\frac{1}{\sqrt{8}+\sqrt{9}}.$$

2. Площадь треугольника ABC выражается формулой $S=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{4}$, где a, b и c — длины сторон BC, CA и AB, соответственно. Найти величину угла ACB.

3. Положительные целые числа a, b, c и d таковы, что $a>b>c>d$, числа $a+b$ и $c+d$ оба делятся на 2, числа $a-c$ и $b-d$ оба делятся на 3, а числа $a\cdot d$ и $b\cdot c$ оба делятся на 5. Найти наименьшую возможную сумму чисел a, b, c и d.

4. У Юры есть три плитки шоколада, каждая массой 60 г. В первый день Юра ломает первую плитку шоколада на три части, массы которых являются последовательными членами некоторой арифметической прогрессии, и съедает из этих кусочков два. Во второй день Юра ломает вторую плитку шоколада на такие же по массе части, как и в первый день, и съедает из полученных трёх кусочков два. В третий день Юра ломает третью плитку шоколада на такие же по массе части, как в предыдущие дни, и съедает из полученных трёх кусочков два. В четвёртый день Юра съедает все кусочки, оставшиеся за предыдущие три дня. При этом Юра съедает одинаковое количество шоколада в каждый из четырёх дней. Найти массу самого большого кусочка, получившегося при разломе плитки на три части.

5. Длины двух высот треугольника равны 3 см и 6 см. Найти все возможности, какой длины может быть третья высота треугольника.

6. В полуфиналах школьных соревнований по лёгкой атлетике на дистанции 100 метров всего участвуют 12 бегунов. Их случайным образом распределяют на три группы по 4 человека, при этом все варианты распределения равновероятны. Затем каждая группа участвует в одном забеге. В финал выходят 4 бегуна: победитель каждого забега и самый быстрый из тех, кто не выиграл свой забег. Найти вероятность того, что в финал выйдут бегуны, показавшие 4 лучших времени. (Предположим, что никакие два бегуна не показывают одинаковое время и что каждый бегун показывает фиксированное время, независимое от того, в какую группу он попал.)

Estonian Mathematical Olympiad No. 72

January 29, 2025 Regional round **Grade 8**

Part I. *Working time: 30 minutes.*
Please write only answers here. An additional piece of paper is provided for solving.
A correct answer in simplified form to each question is worth 2 points.
Written materials or electronic devices are not permitted.

Code

1. Calculate:

$$\frac{1}{2} : \frac{2}{3} : \frac{3}{4} : \frac{4}{5} : \frac{5}{6} : \frac{6}{7} : \frac{7}{8} = \ldots\ldots\ldots\ldots$$

2. How many ways are there to replace one digit in the number 2025 with another digit and obtain a four-digit number not divisible by 3?

. . . .

3. A team consists of three players whose ages are in the ratio $4 : 5 : 6$. Their average age is 30 years. How old is the youngest player in this team?

. . . .

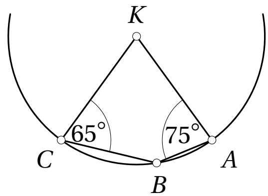
4. The values of variables a, b and c are distinct natural numbers such that the equality $a^2 \cdot b^2 \cdot c^2 = 2025$ holds. Find the largest possible value of the sum $a + b + c$.

. . . .

5. The perimeter of a rectangle $ABCD$ is 60 cm. A point E is chosen on the longer side CD such that the length of the line segment DE is 8 cm. The broken line ADE is 3 times shorter than the broken line $ABCE$. Find the area of the rectangle $ABCD$.

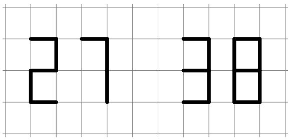
. . . .

6. Points A, B and C lie on a circle with centre K in the given order in such a way that $\angle KAB = 75^\circ$ and $\angle BCK = 65^\circ$. Find the size of the angle CKA.



. . . .

7. On a sheet of paper that is split into equal rectangles, numbers 27 and 38 are written as shown in the diagram. The total length of the line segments needed for writing the number 27 is 27 cm. Find the total length of the line segments needed for writing the number 38.



. . . .

Estonian Mathematical Olympiad No. 72

January 29, 2025 Regional round **Grade 8**

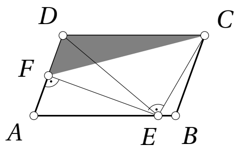
Part II. *Working time: 3 hours.*
Please write your solutions to a separate paper.
A correct and sufficiently explained solution to each problem is worth 7 points.
Just the answer is not enough!
Written materials or electronic devices are not permitted.

1. In the writing $ABC + DEF = GHI$, distinct letters are replaced with distinct digits in such a way that it becomes a true equality with three-digit numbers as the addends and the sum. Which digit does not correspond to any of the letters, if it is given that $A + E = 8$, $F \cdot I = 8$ and $G - B = 8$?

2. It is 8:25 right now. What time will the angle between the hour hand and the minute hand be 15° larger than now for the first time since now?

3. On a blackboard, 20 consecutive natural numbers are written. Then one of them is erased so that the sum of all remaining numbers is 2025. Find the erased number.

4. A point E is chosen on the longer side AB of a parallelogram $ABCD$ in such a way that $\angle CED = 90^\circ$, $\angle ADE = 2\angle CDE$ and $\angle DCE = 3\angle BCE$. The perpendicular drawn from the point E to the side AD is EF. Find the area of the triangle CDF, provided that the area of the triangle CDE is 24 cm^2.



Estonian Mathematical Olympiad No. 72

January 29, 2025 Regional round **Grade 10**

Working time: 5 hours.
A correct and sufficiently explained solution to each problem is worth 7 points.
Written materials or electronic devices are not permitted.

1. Put the numbers $7\sqrt{5}$, $11\sqrt{2}$ and $9\sqrt{3}$ in ascending order.

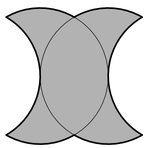
2. The quadratic equation $ax^2 + bx + c = 0$ has two real solutions whose product is 3. One swaps the leading coefficient and the constant term. Find the product of the solutions of the obtained equation.

3. Find all triples (x, y, z) of positive integers which satisfy the equation

$$xyz + 17xy + xz + 4yz + 17x + 68y + 4z = 2025.$$

4. Before a price increase, a pair of boots and a jacket cost 300 euros in total. After the price increase, the pair of boots costs 10 to 20 percent more than before and the jacket costs 30 to 40 percent more than before. After the price increase, the jacket costs 70 to 90 euros more than the pair of boots. Find the lowest and the highest possible price of the pair of boots before the price increase under these conditions.

5. The letter x in the figure has been formed out of four circle arcs. Two pairs of these arcs each possess two common endpoints and two pairs of these arcs touch in the midpoints of the arcs. Two longer arcs are of the same length which is twice the length of each of the shorter arcs. All arcs have radius 1. Find the area of the letter x (coloured grey in the figure).



6. Johnny writes a positive real number into every cell of a 5×5 table in such a way that the cell in the bottom left corner contains 1, the cell in the top right corner contains 2025, and in every 2×2 square, products of the numbers written in the pairs of cells meeting cornerwise are equal. Find the product of the numbers written in the cells in the bottom right and top left corners.

Estonian Mathematical Olympiad No. 72

January 29, 2025 — Regional round — **Grade 11**

Working time: 5 hours.
A correct and sufficiently explained solution to each problem is worth 7 points.
Written materials or electronic devices are not permitted.

1. Which of the numbers $9\sqrt{5}$ and $8 + 7\sqrt{3}$ is larger?

2. Johnny has a game board of dimensions 10×10 split into unit squares. Johnny wishes to play a game which can be played on any grid of dimensions $m \times n$ where $m \geqslant 2$ and $n \geqslant 2$. How many ways can Johnny choose a section of his game board where to play his game in?

3. Find all four-digit natural numbers n that are equal to the square of the sum of the two-digit number consisting of the first two digits of n and the two-digit number consisting of the last two digits of n (maintaining the order of digits).

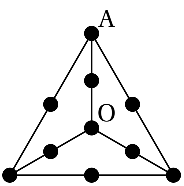
4. Find all triples (x, y, z) of real numbers satisfying the system of equations

$$\begin{cases} x + y = z, \\ y^2 + z^2 = x^2, \\ z^3 + x^3 = y^3. \end{cases}$$

5. Find all positive integers n for which there exists a convex n-gon on the plane with the following properties:

1) some two interior angles have distinct sizes α and β;
2) each interior angle is of size either α or β;
3) the sum of interior angles of size α equals the sum of interior angles of size β.

6. In the diagram, there are all tramway lines of city X, the straight lines depicting the lines and the bubbles depicting the stops. Johnny and his friends play a chase game involving at least one chaser and exactly one escaper. In each move, all players decide simultaneously whether to stay still or move one stop along any line in any direction. After the move, all players learn what the others decided and where they are. If at least one chaser is at the same stop as the escaper then the escaper is caught. The escaper starts at stop A and all chasers start at stop O. Find the least number of chasers sufficient for catching the escaper in a finite number of moves, regardless of the decisions made by the escaper.



Eesti 72. matemaatikaolümpiaad

29. jaanuar 2025 Piirkonnavoor **7. klass**

I osa vastused

1. 22.

2. 33.

3. 23 aastat.

4. 7.

5. 225 cm^2.

6. 20°.

7. 9,5 cm.

Lahendused

1.

$$7 \cdot 6 : \left(1 + \frac{2}{3 - \frac{4}{5}}\right) = 42 : \left(1 + \frac{2}{\frac{15-4}{5}}\right) = 42 : \left(1 + \frac{10}{11}\right) = 42 : \frac{11 + 10}{11} =$$
$$= 42 \cdot \frac{11}{21} = 2 \cdot 11 = 22.$$

2. Algteguriteks lahutamine annab $2025 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5$. Need 6 algtegurit tuleb jaotada arvude a, b, c, d, e vahel nii, et kõik 5 arvu oleksid erinevad. Ilmselt peab mõnesse neist arvudest minema vähemalt 2 algtegurit. Vaatame erinevaid juhtusid.

- Kui mõnesse arvu läheks 3 või enam algtegurit, siis tuleb ülejäänud kuni 3 algtegurit jaotada ülejäänud 4 arvu vahel, mis tähendab, et vähemalt üks arv jääks ilma ühegi algtegurita ehk peaks võrduma arvuga 1. Kuna arvud peavad olema erinevad, siis ei saa mitut arvu 1 olla. Järelikult peab ülejäänud 3 arvu igaüks sisaldama täpselt ühe algteguri. Kuid meil on kasutada ainult 2 erinevat algtegurit. Vastuolu näitab, et igaüks arvudest a, b, c, d, e sisaldab ülimalt 2 algtegurit.
- Kui arve, mis sisaldavad 2 algtegurit, oleks 3, siis ülejäänud 2 arvu oleksid võrdsed arvuga 1, mis pole võimalik.
- Kui arve, mis sisaldavad 2 algtegurit, on 2, siis ülejäänud 3 arvu peavad olema 1, 3 ja 5. Seega esimese kahe arvu moodustamiseks on kasutada algtegurid 3, 3, 3, 5. Ainus võimalus nad kahekaupa kokku panna nii, et korrutised oleksid erinevad, on $3 \cdot 3$ ja $3 \cdot 5$. Seega a, b, c, d, e on 1, 3, 5, 9, 15 mingis järjestuses, mis annab $a + b + c + d + e = 33$.

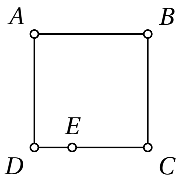
- Kui arve, mis sisaldavad 2 algtegurit, oleks 1, siis jääks vähemalt kaks algtegurit 3 üle, mistõttu ülejäänud arvude seas esineks arv 3 korduvalt. Vastuolu näitab, et ka see juht pole võimalik.

Kokkuvõttes on $a + b + c + d + e = 33$ ainus võimalus.

3. Kuna 4 mängija keskmine vanus on 25 aastat, siis nende mängijate vanuste summa on $4 \cdot 25$ ehk 100 aastat. Kui noorima mängija vanus oleks 35 aastat, siis oleks mängijate keskmine vanus 28 aastat, mis teeks vanuste summaks $4 \cdot 28$ ehk 112 aastat. Seega noorima mängija vanuse muutmine kasvataks vanuste summat $112 - 100$ ehk 12 aasta võrra. Järelikult noorima mängija vanus on $35 - 12$ ehk 23 aastat.

4. Number y saab olla kas 0 või 5, et arv jaguks 5-ga. Kui $y = 0$, siis x saab olla 0, 3, 6 või 9, et arvu ristsumma ja seega ka arv ise jaguks 3-ga. Kui $y = 5$, siis analoogselt saab x olla 1, 4 või 7. Kokku saame $4 + 3$ ehk 7 võimalust.

5. Murdjoonte ADE ja BCE pikkuste summa on 45 cm. Need kaks murdjoont aga moodustavad kokku parajasti ruudu kolm külge (joonis 1). Seega ruudu küljepikkus on 15 cm ja pindala 225 cm^2.



Joonis 1

6. Kolmnurgas, mille alusnurga suurus on 3α, on tipunurga suurus $180^\circ - 6\alpha$. Kolmnurgas, mille alusnurga suurus on 4α, on tipunurga suurus $180^\circ - 8\alpha$. Kuna kolm tipunurka moodustavad kokku sirgnurga, siis

$$\left(180^\circ - 6\alpha\right) + 5\alpha + \left(180^\circ - 8\alpha\right) = 180^\circ,$$

millest $9\alpha = 180^\circ$ ehk $\alpha = 20^\circ$.

7. Numbri 4 kirjutamisel tõmmatakse 1 horisontaalne lõik ja 3 vertikaalset lõiku, numbri 6 kirjutamisel 3 horisontaalset lõiku ja 3 vertikaalset lõiku. Seega numbri 6 kirjutamisel tõmmatakse 2 horisontaalset lõiku rohkem ja vertikaalseid lõike samapalju kui numbri 4 kirjutamisel. Seega 2 horisontaalse lõigu kogupikkus on 5 cm, mis teeb horisontaalse lõigu pikkuseks 2,5 cm. Järelikult 3 vertikaalse lõigu kogupikkus on 10,5 cm, mis teeb vertikaalse lõigu pikkuseks 3,5 cm. Numbri 7 kirjutamiseks tõmmatakse 1 horisontaalne lõik ja 2 vertikaalset lõiku, mille kogupikkus on 9,5 cm.

Eesti 72. matemaatikaolümpiaad

29. jaanuar 2025 Piirkonnavoor **8. klass**

I osa vastused

1. 2.

2. 26.

3. 24 aastat.

4. 19.

5. 161 cm^2.

6. 80°.

7. 40,5 cm.

Lahendused

1.
$$\frac{1}{2}:\frac{2}{3}:\frac{3}{4}:\frac{4}{5}:\frac{5}{6}:\frac{6}{7}:\frac{7}{8}=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{7}{6}\cdot\frac{8}{7}=\frac{1}{2}\cdot\frac{8}{2}=\frac{8}{4}=2.$$

2. Kuna arv 2025 jagub arvuga 3, siis asendamiseks sobivad parajasti need numbrid, mis annavad jagamisel arvuga 3 jäägiks midagi muud kui asendatav number. Esimese numbri 2 asendamiseks sobivad numbrid 1, 3, 4, 6, 7, 9. Teise numbri 2 asendamiseks sobib lisaks number 0. Samad numbrid sobivad numbri 5 asendamiseks. Numbri 0 asendamiseks sobivad numbrid 1, 2, 4, 5, 7, 8. Kokku on $6+7+7+6$ ehk 26 võimalust.

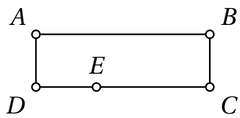
3. Olgu kolme mängija vanused $4x$, $5x$ ja $6x$ aastat. Kuna nende mängijate keskmine vanus on 30 aastat, siis $\dfrac{4x+5x+6x}{3}=30$, kust $15x=90$ ehk $x=6$. Seega noorima mängija vanus on $4\cdot 6$ ehk 24 aastat.

4. Algteguriteks lahutamine annab $2025=3\cdot3\cdot3\cdot3\cdot5\cdot5$. Need algtegurid tuleb jaotada kahe ühesuguse teguri kaupa arvude a^2, b^2 ja c^2 vahel nii, et kõik 3 arvu oleksid erinevad. Vaatame erinevaid juhtusid.

- Kui mõni arvudest sisaldaks kõik algtegurid, siis ülejäänud oleksid võrdsed arvuga 1, mis pole lubatud.
- Kui mõni arvudest sisaldab kaks paari algtegureid, siis need paarid saavad olla kas $3\cdot3, 3\cdot3$ või $3\cdot3, 5\cdot5$. See arv oleks siis vastavalt 81 või 225. Ülejäänud kaks arvu oleksid vastavalt 25 ja 1 või 9 ja 1. Muutujate a, b ja c väärtused oleksid kas 9, 5 ja 1 või 15, 3 ja 1, mis teeb avaldise $a+b+c$ väärtuseks vastavalt 15 või 19. Suurem neist on 19.
- Kui ükski arvudest ei sisalda kaht paari algtegureid, siis oleksid kaks arvu võrdselt $3\cdot3$, mis pole lubatud.

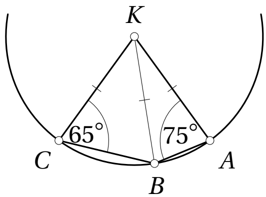
Seega $a + b + c$ suurim võimalik väärtus on 19.

5. Murdjooned ADE ja $ABCE$ katavad ühtekokku ristküliku $ABCD$ kõik küljed (joonis 2). Seega on nende murdjoonte pikkuste summa võrdne ümbermõõduga 60 cm. Kuna murdjoon ADE on 3 korda lühem kui murdjoon $ABCE$, siis murdjoonte ADE ja $ABCE$ pikkused moodustavad ristküliku $ABCD$ ümbermõõdust vastavalt $\frac{1}{4}$ ja $\frac{3}{4}$, mis teeb nende pikkusteks vastavalt 15 cm ja 45 cm. Murdjoon ADE aga koosneb ristküliku lühemast küljest AD ja lõigust DE pikkusega 8 cm. Seega lühem külg on pikkusega 7 cm. Pikem külg peab siis olema pikkusega 23 cm. Küljepikkustest leiame ristküliku pindala 161 cm^2.

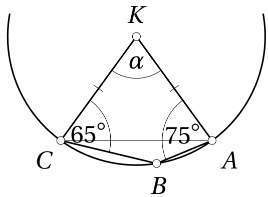


Joonis 2

6. *Lahendus 1.* Kuna punktid A, B, C asuvad ringjoonel keskpunktiga K, siis $|KA| = |KB| = |KC|$ (joonis 3). Võrdhaarsest kolmnurgast KAB saame $\angle KBA = \angle KAB = 75^\circ$, võrdhaarsest kolmnurgast KBC samamoodi $\angle KBC = \angle KCB = 65^\circ$. Seega $\angle ABC = \angle 75^\circ + 65^\circ = 140^\circ$. Nelinurgast $KABC$ saame nüüd $\angle CKA = 360^\circ - 75^\circ - 65^\circ - 140^\circ = 80^\circ$.



Joonis 3



Joonis 4

Lahendus 2. Tähistame $\angle CKA = \alpha$. Samale kõõlule AC toetuva kesk- ja piirdenurga vahelise seose põhjal peab kehtima kas $\angle ABC = \frac{1}{2}\alpha$ või $\angle ABC = 180^\circ - \frac{1}{2}\alpha$. Esimesel juhul saame nelinurga $KABC$ sisenurkadest võrrandi $75^\circ + 65^\circ + (360^\circ - \alpha) + \frac{1}{2}\alpha = 360^\circ$, kust $\frac{1}{2}\alpha = 140^\circ$ ehk $\alpha = 280^\circ$, mis pole võimalik. Teisel juhul (joonis 4) saame analoogselt võrrandi $75^\circ + 65^\circ + \alpha + \left(180^\circ - \frac{1}{2}\alpha\right) = 360^\circ$, kust $\frac{1}{2}\alpha = 40^\circ$ ehk $\alpha = 80^\circ$.

7. Arvu 27 kirjutamisel tõmmatakse kokku 4 horisontaalset lõiku ja 4 vertikaalset lõiku. Arvu 38 kirjutamisel tõmmatakse kokku 6 horisontaalset lõiku ja 6 vertikaalset lõiku. Seega on arvu 38 kirjutamisel tõmmatavate lõikude kogupikkus 1,5 korda suurem kui arvu 27 kirjutamisel. Kuna arvu 27 kirjutamisel tõmmatavate lõikude kogupikkus on 27 cm, siis arvu 38 kirjutamisel tõmmatavate lõikude kogupikkus on $1{,}5 \cdot 27$ cm ehk 40,5 cm.

Eesti 72. matemaatikaolümpiaad

29. jaanuar 2025 Piirkonnavoor **9. klass**

I osa vastused

1. 20.
2. 2.
3. 30 aastat.
4. 28.
5. 100°.
6. 54° ehk $\frac{3}{10}\pi$.
7. 417 mm.

Lahendused

1.
$$\frac{3636 \cdot 4545}{909^2} = \frac{(4 \cdot 909) \cdot (5 \cdot 909)}{909 \cdot 909} = 4 \cdot 5 = 20.$$

2. Algteguriteks lahutamisel saame $2025 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5$. Taandades kõik 2025 algtegurid, saame
$$\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10}{2025} = 1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 4 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 1 \cdot 2 = 2 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 2.$$
Korrutiseks saadava arvu viimane number on 2.

3. Kuna kahe noorima mängija keskmine vanus on 20 aastat ning mängijate vanused on erinevad ja neid arvestatakse täisaastates, siis vanuselt neljanda mängija vähim võimalik vanus on 21 aastat. Samuti leiame, et vanuselt kolmanda mängija suurim võimalik vanus on 24 aastat. Seega vanuselt kolmanda mängija vanus võib olla 24, 23 või 22 aastat.
   - Kui vanuselt kolmanda mängija vanus on 24 aastat, siis vanuselt teise ja vanima mängija vanused peavad olema vastavalt 25 ja 26 aastat.
   - Kui vanuselt kolmanda mängija vanus on 23 aastat, siis vanuselt teise ja vanima mängija vanused võivad olla kas 25 ja 27 või 24 ja 28 aastat.
   - Kui vanuselt kolmanda mängija vanus on 22 aastat, siis arvestades, et mida noorem on vanuselt teine mängija, seda vanem on vanim mängija, saame vanuselt teise mängija vähimaks võimalikuks vanuseks 23 aastat ja vanima mängija suurimaks võimalikuks vanuseks 30 aastat.

   Seega vanima mängija suurim võimalik vanus on 30 aastat.

4. Kui otsitav neljakohaline arv algab numbriga 2, siis peab sajaliste number olema 0. Teine number 2 saab esineda kas kümnelistes või ühelistes. Kui number 2 on kümnelistes, siis ühelistes saab olla kas 4, 3 või 1, kokku 3 võimalust. Kui number 2 on ühelistes, siis kümnelistes saab olla vaid 1, kokku 1 võimalus. Seega niisuguseid võimalusi on kokku 3 + 1 ehk 4.

Otsitav neljakohaline arv saab alata veel ka numbriga 1. Siis on 3 võimalust valida järgud, kus paiknevad numbrid 2: sajalistes ja kümnelistes; sajalistes ja ühelistes; kümnelistes ja ühelistes. Sõltumata sellest valikust saab järelejäänud numbrikohal olla üks kasutamata 8 numbrist. Seega niisuguseid võimalusi on kokku $3 \cdot 8$ ehk 24.

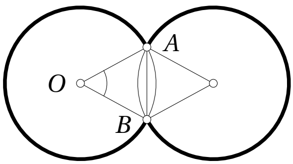
Kokku saame 4 + 24 ehk 28 võimalust.

5. Olgu $\angle BAD = \alpha$. Ülesande tingimuste põhjal $\angle ABC = \angle BAC = 2\alpha$ ja $\angle ADB = 6\alpha$. Kolmnurga ABD sisenurkadest saame võrrandi

$$\alpha + 6\alpha + 2\alpha = 180^\circ$$

ehk $9\alpha = 180^\circ$, kust $\alpha = 20^\circ$. Järelikult $\angle ABC = \angle BAC = 2 \cdot 20^\circ = 40^\circ$ ja $\angle ACB = 180^\circ - 2 \cdot 40^\circ = 100^\circ$.

6. Moodustagu kesknurk AOB täispöördest osa x. Siis jämeda joone osa ringjoonel keskpunktiga O moodustab ringjoonest osa $1 - x$. Et selle ringjoone pikkus on 10π cm, siis jämeda joonega tõmmatud osa pikkus sel ringjoonel on $(1 - x) \cdot 10\pi$ cm. Teisel ringjoonel on jämeda joonega tõmmatud osa niisama pikk, sest ringjooned on võrdsed ning kõõlu AB pikkus on sama (joonis 5). Seega eelnevalt leitud jämeda joone osa pikkus on $\frac{17}{2}\pi$ cm. Saame võrrandi $(1 - x) \cdot 10\pi = \frac{17}{2}\pi$, kust $x = \frac{3}{20}$. Seega $\angle AOB = \frac{3}{20} \cdot 360^\circ = 54^\circ$.



Joonis 5

7. Numbri 9 kirjutamisel tõmmatakse 3 horisontaalset ja 3 vertikaalset lõiku, numbri 7 kirjutamisel 1 horisontaalne lõik ja 2 vertikaalset lõiku ning numbri 3 kirjutamisel tõmmatakse 3 horisontaalset ja 2 vertikaalset lõiku. Seega tõmmatakse arvu 973 kirjutamisel kokku 7 horisontaalset ja 7 vertikaalset lõiku, mille kogupikkus on ülesande tingimuse põhjal 973 mm. Numbri 9 kirjutamisel tõmmatud 3 horisontaalset ja 3 vertikaalset lõiku moodustavad kogupikkusest $\frac{3}{7}$, mis teeb 417 mm.

II osa lahendused

1. *(Maksim Ivanov)*

Kommipakis on ainult punased, kollased, sinised ja rohelised kommid. Kolmandik kõigist kommidest on punased. Neljandik ülejäänud kommidest on kollased. Siniseid komme on pakis 1,5 korda rohkem kui rohelisi. Mitu kommi on selles pakis kokku, kui punaseid komme on seal 60 võrra rohkem kui rohelisi?

Vastus: 450.

Lahendus. Olgu kommide arv x. Siis $\frac{1}{3}x$ kommi on punased ja $\frac{2}{3}x$ kommi mingit muud värvi. Viimastest $\frac{1}{4}$ on kollased, mis tähendab, et kollaste kommide arv on $\frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3}x$ ehk $\frac{1}{6}x$. Punaste ja kollaste kommide koguarv on $\frac{1}{3}x + \frac{1}{6}x$ ehk $\frac{1}{2}x$. Seega ka siniste ja roheliste kommide koguarv on $\frac{1}{2}x$. Rohelisi komme on 60 võrra vähem kui punaseid ehk $\frac{1}{3}x - 60$. Siniseid komme on järelikult $\frac{3}{2} \cdot \left(\frac{1}{3}x - 60\right)$ ehk $\frac{1}{2}x - 90$. Kuna siniste ja roheliste kommide koguarv on $\frac{1}{2}x$ ja siniseid on $\frac{1}{2}x - 90$, siis rohelisi komme peab olema 90. Nüüd saame punaste kommide arvuks $90 + 60$ ehk 150. Kogu paki kommide arv on järelikult $3 \cdot 150$ ehk 450.

2. *(Maksim Ivanov)*

Nimetame naturaalarvu *imeilusaks*, kui ta on viiekohaline ja tema numbrite summa jagub arvuga 7.

Leia suurim selline imeilus arv, millele mingi neljakohalise arvu liitmisel saame summaks samuti imeilusa arvu.

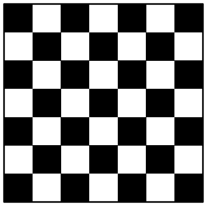
Vastus: 98990.

Lahendus. Suurim viiekohaline arv on 99999, mille numbrite summa 45 annab jagamisel arvuga 7 jäägi 3. Järelikult vähendades üheliste numbrit 3 võrra, saame suurima imeilusa arvu 99996.

Arv, millele neljakohalise arvu liitmisel saame imeilusa arvu, on sellest vähemalt 1000 võrra väiksem ehk ülimalt 98996. Selle arvu numbrite summa 41 annab jagamisel arvuga 7 jäägi 6. Vähendades üheliste numbrit 6 võrra, saame arvu 98990, mis on suurim imeilus arv, mis pole suurem arvust 98996. Kuna arvule 98990 neljakohalise arvu 1006 liitmisel saame imeilusa arvu 99996, siis 98990 ongi otsitav arv.

3. *(Maksim Ivanov)*

Joonisel on ruudustik mõõtmetega 7×7, mille ühikruudud on värvitud malekorras mustaks ja valgeks. Sellest ruudustikust tuleb välja lõigata kujund, mis koosneb tervetest ühikruutudest, ei lagune osadeks ega sisalda auke. Selles kujundis peab olema 2 korda rohkem valgeid ühikruute kui musti. Leia suurima väljalõikamiseks sobiva kujundi pindala.

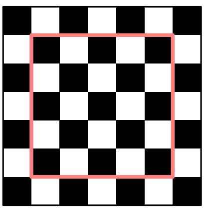


Vastus: 33.

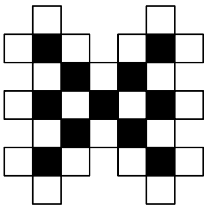
Lahendus. Ruudustikul on kokku 49 ühikruutu, neist 25 on mustad ja 24 valged. Kuna väljalõigatavas kujundis peab olema 2 korda rohkem valgeid ühikruute kui musti, siis mustade ühikruutude arv selles kujundis ei saa olla suurem kui $\frac{24}{2}$ ehk 12.

Kui mustade ühikruutude arv väljalõigatavas kujundis oleks 12, siis peaks väljalõigatav kujund sisaldama kõik valged ühikruudud. Aga et kujundis ei oleks auke, peab kujund sisaldama kõik sellised mustad ühikruudud, mida kõigist neljast küljest piirab valge ühikruut. Sellised on kõik mustad ühikruudud 5×5 alal, mis ei piirne ruudustiku ühegi servaga (joonisel 6 ümbritsetud jämeda punase joonega). Sel alal on aga kokku 13 musta ühikruutu. Vastuolu näitab, et mustade ühikruutude arv väljalõigatavas kujundis ei saa olla 12.

Üks väljalõikamiseks sobiv kujund, milles on 11 musta ja 22 valget ruutu, on näidatud joonisel 7. Suurim võimalik väljalõikamiseks sobiva kujundi pindala võrdub selle kujundi pindalaga 33.



Joonis 6



Joonis 7

4. *(Maksim Ivanov)*

Tabelis on 2 rida ja 2025 veergu. Esimese rea lahtritesse kirjutatakse arvud 2, 3, 4 ja 6, seejärel jälle arvud 2, 3, 4 ja 6, siis jälle samad arvud jne. Teise rea lahtritesse kirjutatakse järjestikused naturaalarvud alates arvust 7. Mitu veergu, mille lahtrites olevate arvude summa jagub arvuga 10, on selles tabelis?

2	3	4	6	2	3	4	6	2
7	8	9	10	11	12	13	14	15

Vastus: 101.

Lahendus 1. Summa jagub arvuga 10 parajasti siis, kui tema viimane number on 0. Viimane number sõltub ainult liidetavate viimastest numbritest. Esimese rea arv kordub iga 4 lahtri järel, teise rea arvu viimane number kordub iga 10 lahtri järel. Kuna 20 on arvude 4 ja 10 ühiskordne, siis summa viimane number kordub iga 20 veeru järel.

Arvutame välja 20 esimese summa viimased numbrid (alloleva tabeli kolmandas reas; teise rea arvudest on lihtsuse mõttes kümnelised ära jäetud):

2	3	4	6	2	3	4	6	2	3	4	6	2	3	4	6	2	3	4	6
7	8	9	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1	2	3	4	5	6
9	1	3	6	3	5	7	0	7	9	1	4	1	3	5	8	5	7	9	2

Seega igas 20 järjestikuses veerus tekib täpselt 1 summa, mis jagub arvuga 10. Tabeli esimese 2020 veeru seas on järelikult $\frac{2020}{20}$ ehk 101 sellist, kus summa jagub arvuga 10. Lisaks on tabelis veel 5 veergu, milles summa viimased numbrid on samad nagu 5 esimeses veerus. Kuna neis viimane number 0 ei esine, siis on kogu tabelis kokku 101 veergu, mille lahtrites olevate arvude summa jagub arvuga 10.

Lahendus 2. Jaotame veerud 4-kaupa rühmadesse alates esimesest (joonisel 8 siniste püstjoontega eraldatud). Esimese rea arvud on kõigis rühmades ühesugused. Teise rea arvud on igas järgmises rühmas 4 võrra suuremad, nii et paaritud ja paarisarvud vahelduvad, alustades paaritu arvuga. Kuna esimeses, teises ja kolmandas veerus on üks paaris ja üks paaritu arv, siis nii on

2	3	4	6	2	3	4	6	2
7	8	9	10	11	12	13	14	15

Joonis 8

ka iga järgmise veerurühma esimeses kolmes veerus. Sellised veerud annavad summaks paaritu arvu, mis ei saa jaguda paarisarvuga 10. Seega piisab uurida rühmade neljandaid veerge. Esimese rühma neljanda veeru arvude summa on 16 ja kuna esimese rea arvud on kõigis vaadeldavais veergudes samad, siis suureneb summa igas järgnevas rühmas 4 võrra. Need summad on

$$16, 20, 24, 28, 32, 36, 40, 44, \ldots.$$

Arvuga 10 jaguv summa esineb tsükliliselt, kus tsükli pikkus on 5. Täpsemalt nähtub neist summadest, et veerurühmades järjekorranumbritega $2, 7, 12, \ldots$ esineb üks arvuga 10 jaguv arv ja teistes ei esine. Esimesed 2020 veergu jagunevad $\frac{2020}{4}$ ehk 505 rühma ja neist seega $\frac{505}{5}$ ehk 101 rühmas esineb üks arvuga 10 jaguv arv. Järgnevas veerurühmas järjekorranumbriga 506 ega ka ülejäävas üksikus veerus sellist summat ei teki. Järelikult on kogu tabelis kokku 101 veergu, milles olevate arvude summa jagub arvuga 10.

II osa lahendused

1. *(Maksim Ivanov)*

Kirjutises $ABC + DEF = GHI$ asendatakse erinevad tähed erinevate numbritega nii, et tekiks tõene võrdus, kus liidetavad ja summa on kolmekohalised arvud. Milline number ei vasta ühelegi tähele, kui lisaks on teada, et $A + E = 8$, $F \cdot I = 8$ ja $G - B = 8$?

Vastus: 0.

Lahendus 1. Lihtsuse mõttes nimetame võrdust $ABC + DEF = GHI$ edaspidi *põhivõrduseks.*

Võrdus $G - B = 8$ annab võimalused $G = 8$, $B = 0$ ja $G = 9$, $B = 1$. Juhul $G = 8$, $B = 0$ aga järelduks põhivõrduse sajaliste järgust, et $A + D = 8$, sest kümnelistest saaks ülekanne tekkida vaid juhul $E = 9$, mis on vastuolus võrdusega $A + E = 8$. Kuid ka $A + D = 8$ on vastuolus võrdusega $A + E = 8$, sest D ja E ei saa olla sama number. Seega ainus võimalus on $G = 9$, $B = 1$.

Kuna $B = 1$, siis $F \neq 1$, $I \neq 1$. Järelikult annab võrdus $F \cdot I = 8$ vaid võimalused $F = 2$, $I = 4$ ja $F = 4$, $I = 2$. Juhul $F = 2$, $I = 4$ aga saaksime põhivõrduse üheliste järgust $C = 2$, mis ei sobi, sest C ja F ei saa olla sama number. Seega ainus võimalus on $F = 4$, $I = 2$.

Nüüd saame põhivõrduse ühelistest $C = 8$ ja kuna tekib ülekanne, siis kümnelistest $B + E + 1 = H$ ehk $E + 2 = H$. Kuna numbrid 1, 2, 4, 8, 9 on kasutatud, siis jäävad sõelale võimalused $E = 3$, $H = 5$ ja $E = 5$, $H = 7$. Juhul $E = 3$, $H = 5$ saaksime võrdusest $A + E = 8$, et $A = 5$, mis ei sobi, sest A ja H ei saa olla sama number. Seega ainus võimalus on $E = 5$, $H = 7$. Võrdusest $A + E = 8$ saame nüüd $A = 3$ ning lõpuks saame põhivõrdusest $D = 6$. Kasutamata jääb number 0.

Lahendus 2. Nagu lahenduses 1 toome sisse *põhivõrduse* mõiste.

Näitame, et ühtki tähte ei asendata numbriga 0. See on selge põhivõrduse arvude sajaliste A, D, G korral. Võrduse $F \cdot I = 8$ tõttu ei saa ka F ja I võrduda nulliga. Samuti ei saa nulliga võrduda C, sest juhul $C = 0$ oleks põhivõrduse ühelistes F ja I võrdsed. Jäävad läbi uurida põhivõrduse kümnelistes esinevad tähed.

- Kui oleks $B = 0$, siis võrdusest $G - B = 8$ saaksime $G = 8$. Põhivõrduse sajalistest aga $A + D = 8$, sest kümnelistest saaks ülekanne tekkida vaid juhul $E = 9$, mis on vastuolus võrdusega $A + E = 8$. Kuid ka $A + D = 8$ on vastuolus võrdusega $A + E = 8$, sest D ja E ei saa olla sama number.

- Kui oleks $E = 0$, siis võrdus $A + E = 8$ annaks $A = 8$. Põhivõrduse sajalistest saaksime ainsa võimalusena $D = 1$, $G = 9$. Kuna aga võrdus $G - B = 8$ annaks ka $B = 1$, siis D ja B oleksid sama number, vastuolu.
- Kui oleks $H = 0$, siis põhivõrduse kümnelistest saame $B + E = 9$ või $B + E = 10$ (vastavalt sellele, kas ühelistest tekib ülekanne või mitte). Koos võrdusega $G - B = 8$ annavad need vastavalt kas $G + E = 17$ või $G + E = 18$. Kuid võrdusest $A + E = 8$ tulenevalt $E \neq 9$ ja ka $E \neq 8$, sest $A \neq 0$. Seega $E \leqslant 7$ ja kumbki võrdustest $G + E = 17$ ja $G + E = 18$ ei saa kehtida.

Seega number 0 peab jääma kasutamata.

2. *(Maksim Ivanov)*

Praegu näitab kell 8:25. Millist aega näitab kell, kui esmakordselt pärast praegust hetke on tunni- ja minutiosuti vaheline nurk 15° võrra suurem kui praegu?

Vastus: 9:05.

Lahendus. Kuna 12 tunniga teeb minutiosuti 12 täisringi ja tunniosuti 1 täisringi samas suunas, muutub nurk tunni- ja minutiosuti vahel selle aja jooksul $11 \cdot 360^\circ$ võrra. Seega tunnis muutub nurk tunni- ja minutiosuti vahel $\frac{11}{12} \cdot 360^\circ$ ehk 330° võrra.

Kui kell näitab 8:00, siis on nurk tunniosutist minutiosutini vastupäeva mõõdetuna 240° ja see on vähenemas. Kui kell on 8:25, on möödunud 25 minutit ehk $\frac{5}{12}$ tundi, mistõttu nurk on $240^\circ - \frac{5}{12} \cdot 330^\circ$ ehk $102{,}5^\circ$. Edasi nurk tunni- ja minutiosuti vahel väheneb nullini ja hakkab uuesti kasvama. Seega hetkeks, kui esmakordselt on tunni- ja minutiosuti vaheline nurk 15° võrra suurem, on nurk tunni- ja minutiosuti vahel muutunud $2 \cdot 102{,}5^\circ + 15^\circ$ ehk 220° võrra. See moodustab $\frac{2}{3}$ tunni jooksul toimuvast nurga muutusest. Seega vaadeldavaks hetkeks on möödunud $\frac{2}{3}$ tundi ehk 40 minutit. Kell näitab siis 9:05.

3. *(Maksim Ivanov)*

Tahvlile kirjutatakse 20 järjestikust naturaalarvu. Seejärel kustutatakse neist üks arv nii, et järelejäänud arvude summa on 2025. Leia kustutatav arv.

Vastus: 105.

Lahendus 1. Olgu need 20 järjestikust naturaalarvu $n, n+1, \ldots, n+19$. Nende summa on $20n+(1+2+\ldots+19)$ ehk $20n+190$. Olgu kustutatav arv $n+x$, kus $x = 0, 1, \ldots, 19$. Siis $(20n + 190) - (n + x) = 2025$ ehk $19n = 1835 + x$. Kuna arv $19n$ jagub arvuga 19, siis ka arv $1835 + x$ peab jaguma arvuga 19. Et aga $1835 = 96 \cdot 19 + 11$, siis x peab jagamisel arvuga 19 andma jäägi 8. Tehtud valikute tõttu on see võimalik vaid juhul $x = 8$. See annab $19n = 97 \cdot 19$ ehk $n = 97$. Seega kustutatav arv on $97 + 8$ ehk 105.

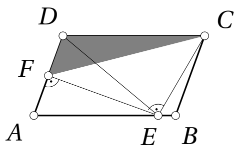
Lahendus 2. Olgu tahvlile kirjutatud arvud 97 kuni 116. Siis nende summa on $97 + 98 + \ldots + 116$ ehk 2130. Selleks, et alles jääks summa 2025, tuleks järelikult kustutada $2130 - 2025$ ehk 105, mis on üks tahvlile kirjutatud arvudest.

Kui tahvlile kirjutatakse arvud 96 kuni 115 või väiksemad, siis peale ühe arvu kustutamist on allesjäänud arvude summa maksimaalselt $97 + 98 + \ldots + 115$ ehk 2014, mis on väiksem kui 2025, nii et see pole võimalik.

Kui tahvlile kirjutatakse arvud 98 kuni 117 või suuremad, siis peale ühe arvu kustutamist on allesjäänud arvude summa vähemalt $98 + 99 + \ldots + 116$ ehk 2033, mis on suurem kui 2025, nii et see pole samuti võimalik.

4. *(Maksim Ivanov)*

Rööpküliku $ABCD$ pikemal küljel AB valitakse selline punkt E, et $\angle CED = 90^\circ$, $\angle ADE = 2\angle CDE$ ja $\angle DCE = 3\angle BCE$. Punktist E tõmmatakse küljele AD ristlõik EF. Leia kolmnurga CDF pindala, kui kolmnurga CDE pindala on 24 cm^2.



Vastus: 12 cm^2.

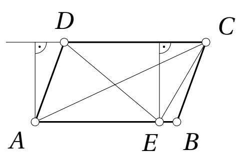
Lahendus. Olgu $\angle BCE = \alpha$. Siis $\angle DCE = 3\alpha$ ja $\angle CDE = 90^\circ - 3\alpha$, mistõttu $\angle ADE = 2\left(90^\circ - 3\alpha\right) = 180^\circ - 6\alpha$. Seega $\angle BCD = \angle BCE + \angle DCE = 4\alpha$ ja $\angle CDA = \angle CDE + \angle ADE = 270^\circ - 9\alpha$. Kuna BCD ja CDA on rööpküliku lähisnurgad, siis $4\alpha + \left(270^\circ - 9\alpha\right) = 180^\circ$, kust $5\alpha = 90^\circ$ ehk $\alpha = 18^\circ$.

Sellest tulenevalt $\angle ADE = 180^\circ - 6 \cdot 18^\circ = 72^\circ$, samas aga ka

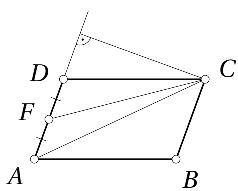
$$\angle DAE = \angle DAB = \angle BCD = 4 \cdot 18^\circ = 72^\circ.$$

Järelikult kolmnurk ADE on võrdhaarne tipunurgaga E juures, mistõttu tipust E küljele AD tõmmatud ristlõik EF poolitab külje AD.

Kolmnurga CDE pindala võrdub kolmnurga CDA pindalaga, sest mõlemal kolmnurgal on alus CD ja sellele joonestatud kõrgus sama (joonis 9). Seega kolmnurga CDA pindala on 24 cm^2. Eelneva põhjal aga moodustab kolmnurga CDF pindala poole kolmnurga CDA pindalast, sest kõrgused on ühised, alus aga poole lühem (joonis 10). Järelikult kolmnurga CDF pindala on $\dfrac{1}{2} \cdot 24$ cm^2 ehk 12 cm^2.



Joonis 9



Joonis 10

Eesti 72. matemaatikaolümpiaad

29. jaanuar 2025 Piirkonnavoor **9. klass**

II osa lahendused

1. *(Aleksei Ganyukov)*

Nimetame positiivset täisarvu *eriliseks*, kui tema numbrite vahele saab panna ühe võrdusmärgi ja null või enam plussmärki nii, et tekib tõene võrdus. Näiteks arv 3210123 on eriline, sest temast on võimalik saada tõene võrdus $3 + 2 + 10 = 12 + 3$.

a) Kas 2024-kohaline arv $101010\ldots10$ on eriline?

b) Kas 2025-kohaline arv $101010\ldots101$ on eriline?

(Mõlemas arvus esineb 10 täpselt 1012 korda, b-osas on arvu lõpus veel üks number 1.)

Vastus: a) jah; b) jah.

Lahendus 1.

a) Kuna 2024-kohalises arvus on paarisarv numbreid, siis saame panna täpselt keskele võrdusmärgi. Võrduse mõlemale poole jääb sama 1012-kohaline arv, mistõttu võrdus on tõene. Seega antud arv on eriline.

b) Paneme antud 2025-kohalise arvu esimese 913 numbri järele võrdusmärgi. Vasaku poole jaotame liidetavateks kujul

$$101 + 0 + \underbrace{1010\ldots10}_{908\text{ numbrit}} + 1.$$

Paremasse poolde jääb $2025 - 913$ ehk 1112 numbrit. Jaotame need liidetavateks kujul

$$0 + \underbrace{1010\ldots10}_{908\text{ numbrit}} + \underbrace{1 + 0 + 1 + 0 + \ldots + 1 + 0 + 1}_{203\text{ liidetavat}}.$$

Kuna kummalgi pool võrdusmärki on 908-kohalised liidetavad võrdsed ning nii vasaku poole ülejäänud kahe nullist erineva liidetava summa kui ka parema poole ülejäänud nullist erinevate liidetavate summa on 102, siis võrdus on tõene. Järelikult antud arv on eriline.

Lahendus 2.

a) Paneme 1012 numbri järele võrdusmärgi, siis ka paremale poole jääb 1012 numbrit. Paneme võrduse kummalgi pool iga kahe järjestikuse numbri vahele plussi. Siis kummalgi pool oleva avaldise väärtus on 506, võrdus on tõene. Seega antud arv on eriline.

b) Paneme 1004 numbri järele võrdusmärgi. Vasakul pool paneme plussi iga kahe järjestikuse numbri vahele, välja arvatud kaks esimest, saades

$$10 + \underbrace{1 + 0 + 1 + 0 + \ldots + 1 + 0}_{1002 \text{ numbrit}}.$$

Siis vasakul pool oleva avaldise väärtus on $10 + 501$ ehk 511. Paremale poole jääb $2025 - 1004$ ehk 1021 numbrit. Pannes paremal pool plussi iga kahe järjestikuse numbri vahele, on ka paremal pool oleva avaldise väärtus 511. Võrdus on tõene. Seega antud arv on eriline.

Märkus. Ülesande kummalegi osale leidub palju muid lahendusi.

2. *(Härmel Nestra)*

Leia kõik mittenegatiivsete täisarvude paarid (n, m), mis rahuldavad tingimust

$$1 + 6n - n^2 = m^2.$$

Vastus: $(0, 1)$, $(2, 3)$, $(4, 3)$, $(6, 1)$.

Lahendus 1. Antud võrrand on samaväärne võrrandiga

$$n^2 - 6n + \left(m^2 - 1\right) = 0.$$

Käsitledes seda ruutvõrrandina n suhtes, saame

$$n = 3 \pm \sqrt{9 - \left(m^2 - 1\right)} = 3 \pm \sqrt{10 - m^2}.$$

Et n oleks täisarv, peab $\sqrt{10 - m^2}$ olema täisarv. See on nii juhul $m^2 = 1$ ja $m^2 = 9$ ehk vastavalt $m = 1$ ja $m = 3$. Kui $m = 1$, siis $n = 0$ või $n = 6$, kui aga $m = 3$, siis $n = 2$ või $n = 4$.

Lahendus 2. Arvutame välja võrrandi vasaku poole väärtuse muutuja n väikeste väärtuste korral:

n	0	1	2	3	4	5	6
$1 + 6n - n^2$	1	6	9	10	9	6	1

Näeme, et vasaku poole väärtus on täisruut juhtudel $n = 0$, $n = 2$, $n = 4$ ja $n = 6$. Vastavalt sobib $m = 1$, $m = 3$, $m = 3$ ja $m = 1$.

Vasaku poole saab ümber kirjutada kujul $1 - n(n - 6)$. Kui $n > 6$, siis n ja $n - 6$ on mõlemad positiivsed täisarvud, seega ka korrutis $n(n - 6)$ on positiivne täisarv, kusjuures $n > 6$ tõttu on see korrutis suurem kui 1. Järelikult võrrandi vasak pool on negatiivne ega saa võrduda mingi arvu ruuduga. Seega rohkem lahendeid võrrandil pole.

3. *(Härmel Nestra)*

Kolmnurkade ABC ja $A'B'C'$ kohta on teada järgmised kolm fakti:

1) $\angle ABC = \angle A'B'C'$ või $\angle ABC = 180^\circ - \angle A'B'C'$;

2) $\angle BCA = \angle B'C'A'$ või $\angle BCA = 180^\circ - \angle B'C'A'$;

3) $\angle CAB = \angle C'A'B'$ või $\angle CAB = 180^\circ - \angle C'A'B'$.

Kas võib kindlalt väita, et kolmnurgad ABC ja $A'B'C'$ on sarnased?

Vastus: jah.

Lahendus. Tähistame $\angle CAB = \alpha$, $\angle ABC = \beta$, $\angle BCA = \gamma$ ja analoogiliselt $\angle C'A'B' = \alpha'$, $\angle A'B'C' = \beta'$, $\angle B'C'A' = \gamma'$. Vaatame läbi juhud selle alusel, mitme nurga suurused kolmnurkades ABC ja $A'B'C'$ vastavalt ühtivad.

- Oletame, et ühtivaid nurki on 0 ehk $\alpha = 180^\circ - \alpha'$, $\beta = 180^\circ - \beta'$, $\gamma = 180^\circ - \gamma'$. Siis

$$\begin{aligned} 180^\circ &= \alpha + \beta + \gamma = \\ &= \left(180^\circ - \alpha'\right) + \left(180^\circ - \beta'\right) + \left(180^\circ - \gamma'\right) = \\ &= 540^\circ - (\alpha' + \beta' + \gamma') = 540^\circ - 180^\circ = 360^\circ, \end{aligned}$$

  vastuolu.

- Oletame, et ühtivaid nurki on 1. Üldisust kitsendamata $\alpha = \alpha'$ ning $\beta = 180^\circ - \beta'$, $\gamma = 180^\circ - \gamma'$. Siis

$$\begin{aligned} 180^\circ &= \alpha + \beta + \gamma = \\ &= \alpha' + \left(180^\circ - \beta'\right) + \left(180^\circ - \gamma'\right) = \\ &= 360^\circ + \alpha' - \left(\beta' + \gamma'\right) = 360^\circ + \alpha' - \left(180^\circ - \alpha'\right) = 180^\circ + 2\alpha'. \end{aligned}$$

  Seega $\alpha' = 0^\circ$, mis pole võimalik.

- Oletame, et ühtivaid nurki on 2 või 3. Siis tunnuse NN põhjal on kolmnurgad ABC ja $A'B'C'$ sarnased.

Kuna kõigil võimalikel juhtudel on kolmnurgad ABC ja $A'B'C'$ sarnased, siis võib seda tõepoolest kindlalt väita.

Märkus. Ülesande väitest tuleneb, et kui kahe kolmnurga nurgad on suunatud nurkadena vastavalt võrdsed, siis need kolmnurgad on sarnased.

4. *(Hendrik Vija)*

Tahvlile on kirjutatud numbrid 202520252025. Anna ja Bert mängivad mängu, kus igal käigul kustutab mängija ühe tahvlil olevatest numbritest ja kirjutab asemele mõne sellise numbri, mis on kustutatud numbrist väiksem. Anna alustab ja käike tehakse kordamööda. Kaotab mängija, kes enam ei saa käiku teha (kõik numbrid on muutunud nullideks). Kumb mängija saab võita vastase iga vastumängu korral?

Vastus: Anna.

Lahendus. Asendagu Anna oma esimesel käigul viimase numbri nulliga. See tähendab, et pärast Anna esimest käiku on tahvlil numbrid 202520252020. Näitame, et siis Anna saab võita sõltumata Berdi vastumängust. Selleks paneme tähele, et kõiki nullist erinevaid numbreid on tahvlil paarisarv koopiaid. Seega kui Bert vähendab oma käigul mistahes numbrit kuitahes palju, saab Anna alati valida teise koopia samast numbrist ning vähendada seda samapalju. Sedasi saab Anna alati oma käigu sooritada ning pärast Anna käiku on jälle igat nullist erinevat numbrit tahvlil paarisarv koopiaid. Kuna tahvlil olevad numbrid saavad ainult väheneda, peab mäng millalgi lõppema, ning kuna Anna saab alati oma käigu sooritada, siis järelikult jääb käigupuudusse kindlasti Bert ehk Anna võidab.

Märkus. Ainsad võimalused Annale garanteerida võit ongi asendada esimesel käigul mõni number 5 numbriga 0. Kõik muud avakäigud võimaldavad Berdil saavutada olukorra, kus seis paarisarvu koopiatega igast nullist erinevast numbrist tekib hoopis pärast Berdi käiku, ja võita järgnevalt Anna käike kopeerides ise. Tõepoolest:

- kui Anna asendab avakäigul numbri 5 mõne nullist erineva numbriga, siis asendab Bert selle numbri nulliga;
- kui Anna asendab avakäigul numbri 2 nulliga, siis asendab Bert numbri 5 numbriga 2;
- kui Anna asendab avakäigul numbri 2 numbriga 1, siis asendab Bert samas nelikus numbri 5 numbriga 3, misjärel kui Anna asendab samas nelikus mõne numbri nulliga, saab Bert vastata sama neliku kahe nullist erineva numbri võrdsustamisega, kui aga Anna võrdsustab kaks nullist erinevat numbrit, saab Bert asendada sama neliku järelejäänud nullist erineva numbri nulliga (kui Anna teeb käigu mõnes teises nelikus, kopeerib Bert tema käiku kolmandas nelikus).

Lahendused

1. *(Jan Villemson)*
Järjesta arvud $7\sqrt{5}$, $11\sqrt{2}$ ja $9\sqrt{3}$ kasvavalt.
Vastus: $11\sqrt{2} < 9\sqrt{3} < 7\sqrt{5}$.
Lahendus. Kuna $7\sqrt{5} = \sqrt{7^2 \cdot 5} = \sqrt{245}$, $11\sqrt{2} = \sqrt{11^2 \cdot 2} = \sqrt{242}$ ja $9\sqrt{3} = \sqrt{9^2 \cdot 3} = \sqrt{243}$, siis $11\sqrt{2} < 9\sqrt{3} < 7\sqrt{5}$.

2. *(Härmel Nestra)*
Ruutvõrrandil $ax^2 + bx + c = 0$ on kaks reaalarvulist lahendit, mille korrutis on 3. Sellel võrrandil vahetatakse ruutliikme kordaja ja vabaliige omavahel. Leia saadud võrrandi lahendite korrutis.
Vastus: $\frac{1}{3}$.
Lahendus 1. Ruutvõrrandil $ax^2 + bx + c = 0$ on samad lahendid nagu taandatud ruutvõrrandil $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$. Viète'i valemite põhjal võrdub taandatud ruutvõrrandi lahendite korrutis vabaliikmega $\frac{c}{a}$. Seega $\frac{c}{a} = 3$, millest muuhulgas tuleneb $c \neq 0$. Kuna eelduse põhjal on ruutvõrrandil kaks reaalarvulist lahendit, siis $b^2 - 4ac > 0$.
Ruutliikme kordaja ja vabaliikme vahetamisel tekib võrrand $cx^2 + bx + a = 0$. Kuna $c \neq 0$, siis tegu on ruutvõrrandiga, ja kuna $b^2 - 4ca = b^2 - 4ac > 0$, siis on ka sel ruutvõrrandil kaks reaalarvulist lahendit. Need on samad mis taandatud ruutvõrrandil $x^2 + \frac{b}{c}x + \frac{a}{c} = 0$, mistõttu nende lahendite korrutis on $\frac{a}{c}$. Kuna $\frac{c}{a} = 3$, siis $\frac{a}{c} = \frac{1}{3}$.
Lahendus 2. Ruutvõrrandi $ax^2 + bx + c = 0$ lahendid on $\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ ja $\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$. Ülesande tingimuste põhjal

$$\begin{aligned}3 &= \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \cdot \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \\ &= \frac{\left(-b - \sqrt{b^2 - 4ac}\right) \cdot \left(-b + \sqrt{b^2 - 4ac}\right)}{4a^2} = \\ &= \frac{(-b)^2 - \left(\sqrt{b^2 - 4ac}\right)^2}{4a^2} = \frac{b^2 - \left(b^2 - 4ac\right)}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}.\end{aligned}$$

Seega $c \neq 0$.

Ruutliikme kordaja ja vabaliikme vahetamisel tekib võrrand $cx^2+bx+a=0$. Kuna $c \neq 0$, siis tegu on ruutvõrrandiga, mille lahendid on $\frac{-b-\sqrt{b^2-4ca}}{2c}$ ja $\frac{-b+\sqrt{b^2-4ca}}{2c}$. Paneme tähele, et $b^2-4ca = b^2-4ac$, mistõttu on kumbki lahend saadav algse võrrandi vastava märgiga lahendist korrutamisel teguriga $\frac{a}{c}$. Kuna algse võrrandi lahendid on erinevad, siis järelikult on ka uue võrrandi lahendid erinevad. Lahendite korrutamisel esineb tegur $\frac{a}{c}$ kaks korda, mistõttu uue võrrandi lahendite korrutis on $3 \cdot \left(\frac{a}{c}\right)^2$. Kuna $\frac{c}{a}=3$, siis $\frac{a}{c}=\frac{1}{3}$, mistõttu $3 \cdot \left(\frac{a}{c}\right)^2 = 3 \cdot \frac{1}{9} = \frac{1}{3}$.

3. *(Urve Kangro)*

Leia kõik positiivsete täisarvude kolmikud (x, y, z), mis rahuldavad võrrandit

$$xyz + 17xy + xz + 4yz + 17x + 68y + 4z = 2025.$$

Vastus: $(3, 12, 6)$, $(9, 6, 6)$.

Lahendus. Kui võrrandi vasakule poole liita 68, siis saadav avaldis tegurdub kui $(x+4)(y+1)(z+17)$. Paremale poole 68 liitmisel saame arvu 2093, mis tegurdub kui $7 \cdot 13 \cdot 23$. Seega taandub ülesanne võrrandi

$$(x+4)(y+1)(z+17) = 7 \cdot 13 \cdot 23$$

lahendamisele positiivsetes täisarvudes. Kõik selle võrrandi vasaku poole tegurid on suuremad 1-st, mistõttu $x+4$, $y+1$ ja $z+17$ peavad olema 7, 13 ja 23 mingis järjestuses. Ilmselt saab $z+17$ olla ainult 23, mistõttu $z=6$. Ülejäänud muutujatele saame kaks võimalust $x+4=7$, $y+1=13$ ja $x+4=13$, $y+1=7$, kust vastavalt $x=3$, $y=12$ ja $x=9$, $y=6$.

Märkus. Lahenduse esimese sammu peale saab tulla, kui näiteks tuua kõigepealt kõigist muutujat x sisaldavatest liikmetest x sulgude ette ja panna tähele, et ülejäänu on sulgudesse jääva avaldisega väga sarnane.

4. *(Maksim Ivanov)*

Saapad ja jope maksid enne hinnatõusu kokku 300 eurot. Pärast hinnatõusu maksavad saapad endisest 10 kuni 20 protsenti rohkem, jope aga endisest 30 kuni 40 protsenti rohkem. Pärast hinnatõusu on jope saabastest kallim 70 kuni 90 euro võrra. Leia madalaim ja kõrgeim neil tingimustel võimalik saabaste hind enne hinnatõusu.

Vastus: madalaim 120 eurot, kõrgeim 140 eurot.

Lahendus 1. Olgu saabaste hind enne hinnatõusu x eurot. Siis jope hind enne hinnatõusu on $300 - x$ eurot.

Olgu pärast hinnatõusu saabaste hind y eurot ja jope hind z eurot. Ülesande tingimuste põhjal kehtivad võrratused

$$\begin{gathered} 1{,}1x \leqslant y \leqslant 1{,}2x, \\ 1{,}3(300 - x) \leqslant z \leqslant 1{,}4(300 - x), \\ 70 \leqslant z - y \leqslant 90. \end{gathered}$$

Ühelt poolt saame

$$90 \geqslant z - y \geqslant 1{,}3(300 - x) - 1{,}2x = 390 - 2{,}5x,$$

kust $2{,}5x \geqslant 390 - 90 = 300$ ja seega $x \geqslant 120$. Seejuures kui $x = 120$, $y = 1{,}2x = 144$ ja $z = 1{,}3(300 - x) = 234$, siis $z - y = 90$ ja kõik tingimused on täidetud. Seega madalaim võimalik saabaste hind enne hinnatõusu on 120 eurot.

Teisalt saame

$$70 \leqslant z - y \leqslant 1{,}4(300 - x) - 1{,}1x = 420 - 2{,}5x,$$

kust $2{,}5x \leqslant 420 - 70 = 350$ ja seega $x \leqslant 140$. Seejuures kui $x = 140$, $y = 1{,}1x = 154$ ja $z = 1{,}4(300 - x) = 224$, siis $z - y = 70$ ja kõik tingimused on täidetud. Seega kõrgeim võimalik saabaste hind enne hinnatõusu on 140 eurot.

Lahendus 2. Olgu saabaste alghind s ja jope alghind j. Olgu saabaste hinnatõusu kordaja a ning jope oma b ning olgu jope ja saabaste hindade vahe pärast hinnatõusu c. Siis ülesande tingimustest teame, et $a \in [1{,}1; 1{,}2]$, $b \in [1{,}3; 1{,}4]$, ja $a \in [70; 90]$ ning kehtivad võrrandid $s + j = 300$ ja $jb = sa + c$. Sealt saame $(300 - s)b = sa + c$, kust $300b - c = s(a + b)$ ja seega $s = \dfrac{300b - c}{a + b}$. Sellest võrrandist järeldub, et c kasvades s kahaneb ning a kasvades s kahaneb, ning j avaldub kui $j = 300 - s = \dfrac{300a + c}{a + b}$. Siit järeldub, et b kasvades j kahaneb, seega kuna $s + j$ on konstantne, siis b kasvades s kasvab. Seega minimaalse s väärtuse saame, kui a ja c on maksimaalsed ja b minimaalne. Pannes saadud valemisse sisse $a = 1{,}2$, $b = 1{,}3$, $c = 90$ saame $s = 120$. Sarnaselt saame maksimaalse s väärtuse, kui a ja c on minimaalsed ja b maksimaalne. Pannes saadud valemisse sisse $a = 1{,}1$, $b = 1{,}4$, $c = 70$ saame $s = 140$.

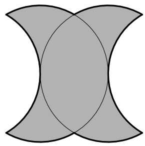
Lahendus 3. Olgu saabaste alghind s ja jope alghind j.

Madalaima võimaliku saabaste alghinna korral on hinnavahe (jope kasuks) enne hinnatõusu maksimaalne võimalik. Hinnavahe pärast hinnatõusu on seda väiksem, mida suurem on saabaste hinnatõus ja mida väiksem on jope hinnatõus. Seega selleks, et algselt maksimaalsest hinnavahest saaks lubatud vahemikku jääv vahe, peab saabaste hind tõusma 20% ja jope hind 30%, andes tulemuseks suurima võimaliku hinnavahe 90 eurot. Saame võrrandid $s+j=300$ ja $1{,}3j-1{,}2s=90$, mida lahendades saame $s=120$.

Kõrgeima võimaliku saabaste alghinna korral on hinnavahe (jope kasuks) enne hinnatõusu minimaalne võimalik. Hinnavahe pärast hinnatõusu on seda suurem, mida väiksem on saabaste hinnatõus ja mida suurem on jope hinnatõus. Seega selleks, et algselt minimaalsest hinnavahest saaks lubatud vahemikku jääv vahe, peab saabaste hind tõusma 10% ja jope hind 40%, andes tulemuseks vähima võimaliku hinnavahe 70 eurot. Saame võrrandid $s+j=300$ ja $1{,}4j-1{,}1s=70$, mida lahendades saame $s=140$.

5. *(Härmel Nestra)*

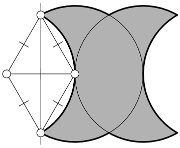
Joonisel kujutatud x-täht koosneb neljast ringjoone kaarest, mis kahekaupa puutuvad kaarte keskpunktides ja kahekaupa omavad kaht ühist otspunkti. Kaks pikemat kaart on ühepikkused ja 2 korda pikemad kahest lühemast kaarest. Kõik kaared on raadiusega 1. Leia x-tähe poolt kaetava ala (joonisel halliks värvitud) pindala.



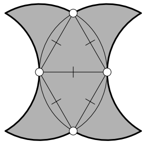
Vastus: $\frac{3}{2}\sqrt{3}$.

Lahendus 1. Kuna kaared on võrdse raadiusega, siis 2 korda pikem kaar saab olla samade otspunktidega ainult siis, kui ta on lühema kaare täiend ringjooneks või selle peegeldus. Seega lühema kaare pikkus on $\frac{1}{3}$ ja pikema kaare pikkus $\frac{2}{3}$ ringjoonest, katavad nad vastavalt kesknurgad suurusega 120° ja 240°. Lühema kaare keskpunkt jaotab vastava kesknurga kaheks kesknurgaks suurusega 60°. Nende kesknurkade haarade lõikepunktid kaarega ja kesknurga tipp määravad võrdkülgsed kolmnurgad (joonis 11). Kaks võrdkülgset kolmnurka moodustavad rombi, mille diagonaalid on risti ja poolitavad teineteist. Seega kaare otspunkte läbiv sirge poolitab raadiuse, mis ühendab ringjoone keskpunkti ja kaare keskpunkti. Kuna pikem ringjoone kaar, millel on vaadeldava lühema kaarega ühised otspunktid, on lühema kaare täiendi peegeldus, siis ka selle ringjoone keskpunkt on vaadeldava ringjoone keskpunkti peegeldus neid otspunkte ühendavast sirgest. Eelneva põhjal on see punkt lühema kaare keskpunktis.

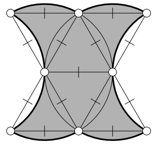
Seega kummagi lühema kaare keskpunkt on kahe pikema kaare lõikepunktidest kaugusel 1 ning ka lühemate kaarte keskpunktide omavaheline kaugus on 1 (joonis 12). Seega ka need neli punkti määravad kaks võrdkülgset kolmnurka. Sellest tuleneb, et kahe pikema kaare lõikepunkti ja kaare otspunkti vaheline pikema kaare osa katab samuti kesknurga suurusega 60°.



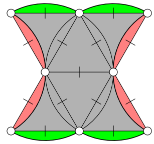
Joonis 11



Joonis 12



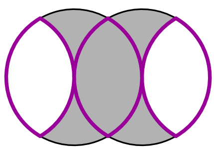
Joonis 13



Joonis 14

Vaatleme joonisel 13 näidatud 6 kolmnurka. Eelnevast tulenevalt on tegu võrdkülgsete kolmnurkadega, mille küljepikkus on 1. Iga kolmnurga pindala on $\frac{1}{4}\sqrt{3}$, mistõttu kõigi 6 kolmnurga kogupindala on $\frac{6}{4}\sqrt{3}$ ehk $\frac{3}{2}\sqrt{3}$. Jääb märgata, et x-tähe pindala on sama mis 6 kolmnurga kogupindala, sest x-tähe saab 6 kolmnurgast 4 ühesuguse „kuukese“ ümbertõstmisel (joonis 14).

Lahendus 2. Konstrueerime juurde puuduvad ringjoonte osad, et saada kaks tervet ringjoont. Nagu lahenduses 1 näitame, et kaarte keskpunktid on vastavate ringjoonte keskpunktid. Edasi näitame, et tekkinud kolm ovaalikujulist ala (joonisel 15 piiratud lilla jämejoonega) on kõik võrdsed. Sümmeetria tõttu on vasakpoolne ja parempoolne „ovaal“ võrdsed, kusjuures need on mõlemad määratud kahe kaarega, mis moodustavad $\frac{1}{3}$ ringjoonest, mille keskpunktid asetsevad teineteise suhtes kaugusel 1. Nagu lahenduses 1 näitame, et lühemate kaarte keskpunktid ning pikemate kaarte lõikepunktid määravad kaks võrdkülgset kolmnurka; sellest järeldub, et mõlema kujundi keskel oleva kaare suurus on 120° ehk $\frac{1}{3}$ ringjoonest. Seega keskel olev „ovaal“ on võrdne ülejäänud „ovaalidega“. Nüüd paneme tähele, et kujundi pindala leidmiseks kehtib valem $2\pi - 3S$ (kahest tervest ringjoonest lahutame kolme „ovaali“ pindala). Selleks, et leida „ovaali“ pindala S, paneme tähele, et kaarte lõikepunkte ühendav sirge jaotab „ovaali“ kaheks võrdseks osaks, mille pindala võime arvutada, kui sektori pindalast kesknurgaga 120° lahutada seda sektorit piiravate raadiuste kui haaradega määratud võrdhaarse kolmnurga pindala. Viies läbi arvutused, saame $S = 2 \cdot \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$.



Joonis 15

Seega kujundi pindala on $2\pi - 3 \cdot 2 \cdot \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$ ehk $\frac{3}{2}\sqrt{3}$.

6. *(Hendrik Vija)*

Juku kirjutab 5×5 ruudustiku igasse ühikruutu mingi positiivse reaalarvu nii, et vasakus alumises nurgaruudus on 1, paremas ülemises nurgaruudus on 2025 ning igas 2×2 ruudus on nurkapidi kokkupuutuvatesse ühikruutudesse kirjutatud arvude korrutised võrdsed. Leia ruudustiku alumisse paremasse nurgaruutu ja ülemisse vasakusse nurgaruutu kirjutatud arvude korrutis.

Vastus: 2025.

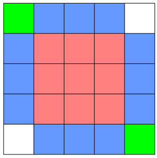
Lahendus 1. Vaatleme suvalist 2×2 ruutu. Olgu tema alumises reas vasakult paremale arvud a ja b ning olgu tema vasakus ülemises lahtris arv ka, kus k on mingi reaalarvuline kordaja (viimane eeldus ei kitsenda üldisust, sest mistahes positiivse reaalarvu saab esitada kujul ka). Siis vasaku ülemise ja parema alumise lahtri arvude korrutis on kab, mistõttu ka ülejäänud kahe lahtri arvude korrutis peab olema kab. Seega paremas ülemises lahtris on arv kb. Järelikult iga 2×2 ruudu ülemise rea arvud saadakse sama ruudu alumise rea arvude korrutamisel mingi ühe ja sama teguriga.

Nihutades 2×2 ruutu ühiku võrra paremale, näeme samamoodi, et ka järgmises veerus on ülemise rea arv saadav alumises reas olevast arvust sama teguriga läbikorrutamisel. Samamoodi saame jätkata viimase veeruni, kus samuti peab ülemine arv olema saadav alumisest arvust sama teguriga läbikorrutamisel.

Vaatleme suvalist kaht järjestikust rida. Olgu alumise rea esimeses ja viimases lahtris vastavalt arvud c ja d. Eelneva põhjal on ülemise rea esimeses ja viimases lahtris vastavalt arvud kc ja kd, kus k on mingi reaalarv. Nihutades vaadeldavat kahte rida ühiku võrra üles, näeme, et ka alt lugedes järgmise rea esimeses ja viimases lahtris on arvud vastavalt kujul kc ja kd, kus k on mingi reaalarv. Samamoodi jätkates näeme, et kogu ruudustiku ülemise rea esimeses ja viimases lahtris on arvud vastavalt kujul kc ja kd, kus k on mingi reaalarv.

Olgu kogu ruudustiku vasakus ülemises nurgaruudus arv m ja paremas alumises nurgaruudus arv n. Kuna vasakus alumises nurgaruudus on arv 1, siis eelneva põhjal peab paremas ülemises nurgaruudus olema otsitav arv mn. Paremas ülemises nurgaruudus on ülesande tingimuste põhjal aga arv 2025.

Lahendus 2. Värvime ruudustiku äärel, kuid mitte nurgas asuvad ühikruudud siniseks, ruudustiku äärtest eemal olevad ühikruudud punaseks ning vasaku ülemise nurgaruudu ja parema alumise nurgaruudu roheliseks (joonis 16). Olgu sinistes ühikruutudes olevate arvude korrutis a ja punastes ühikruutudes olevate arvude korrutis b; rohelistes ühikruutudes olevate arvude korrutis on otsitav x.



Joonis 16

Kirjutame kõigi 2×2 ruutude jaoks välja ülesande tingimuse, et nurkapidi kokkupuutuvates ühikruutudes olevate arvude korrutised on võrdsed, kusjuures iga võrduse vasakule poole kirjutame vastava 2×2 ruudu vasaku alumise ühikruudu ja parema ülemise ühikruudu arvude korrutise ning paremale poole ülejäänud kahe ühikruudu arvude korrutise. Korrutame kõigi nende võrduste vastavad pooled. Paneme tähele, et sinistes ühikruutudes olevad arvud esinevad mõlemal võrduse pool tegurina täpselt ühe korra, punastes ühikruutudes olevad arvud aga esinevad mõlemal võrduse pool tegurina täpselt kaks korda. Lisaks esinevad võrduse vasakul pool tegurina 1 ja 2025, paremal pool aga rohelistesse ühikruutudesse kirjutatud arvud. Seega on saadud võrdus kujul

$$2025ab^2 = xab^2,$$

kust suurusega ab^2 läbi jagades saame $x = 2025$.

Märkus. Lahenduse seisukohalt pole oluline, et ruudustik täidetakse positiivsete arvudega. Need võivad olla mistahes nullist erinevad arvud.

Eesti 72. matemaatikaolümpiaad

29. jaanuar 2025 Piirkonnavoor **11. klass**

Lahendused

1. *(Markus Rene Pae, Jan Villemson)*

Kumb arvudest $9\sqrt{5}$ ja $8 + 7\sqrt{3}$ on suurem?

Vastus: esimene.

Lahendus 1. Positiivsete arvude $9\sqrt{5}$ ja $8 + 7\sqrt{3}$ suurusvahekord on sama mis nende ruutudel. Esimese arvu ruut on $9^2 \cdot 5$ ehk 405, teise arvu ruut on $8^2 + 2 \cdot 8 \cdot 7\sqrt{3} + 7^2 \cdot 3$ ehk $211 + 112\sqrt{3}$. Arvude 405 ja $211 + 112\sqrt{3}$ suurusvahekord on sama mis 211 võrra väiksematel arvudel 194 ja $112\sqrt{3}$, nende suurusvahekord aga sama mis 2 korda väiksematel arvudel 97 ja $56\sqrt{3}$. Viimaste suurusvahekord on sama mis nende ruutudel 97^2 ja $56^2 \cdot 3$, mis on vastavalt 9409 ja 9408. Kuna $9409 > 9408$, siis $9\sqrt{5} > 8 + 7\sqrt{3}$.

Lahendus 2. Viies kordajad ruutjuure alla, saame $9\sqrt{5} = \sqrt{9^2 \cdot 5} = \sqrt{405}$ ja $7\sqrt{3} = \sqrt{7^2 \cdot 3} = \sqrt{147}$. Paneme tähele, et $405 = 20 \cdot 20{,}25$ ja $147 = 12 \cdot 12{,}25$. Seega taandub küsimus arvude $\sqrt{20 \cdot 20{,}25}$ ja $8 + \sqrt{12 \cdot 12{,}25}$ võrdlemisele. Nende arvude suurusvahekord on sama mis 20 võrra väiksematel arvudel $\sqrt{20 \cdot 20{,}25} - 20$ ja $\sqrt{12 \cdot 12{,}25} - 12$. Vaatleme funktsiooni $y = \sqrt{x(x + c)} - x$ määramispiirkonnaga $[0; \infty)$, kus $c = 0{,}25$. Kuna

$$y' = \frac{x + (x + c)}{2\sqrt{x(x + c)}} - 1 = \frac{x + (x + c) - 2\sqrt{x(x + c)}}{2\sqrt{x(x + c)}} = \frac{\left(\sqrt{x} - \sqrt{x + c}\right)^2}{2\sqrt{x(x + c)}} > 0,$$

siis funktsioon $y = \sqrt{x(x + c)} - x$ on kasvav. Seega on selle funktsiooni väärtus kohal 20 suurem kui kohal 12 ehk $\sqrt{20 \cdot 20{,}25} - 20 > \sqrt{12 \cdot 12{,}25} - 12$, mis tähendab, et $9\sqrt{5} > 8 + 7\sqrt{3}$.

Lahendus 3. Viies kordajad ruutjuure alla, saame $9\sqrt{5} = \sqrt{9^2 \cdot 5} = \sqrt{405}$ ja $7\sqrt{3} = \sqrt{7^2 \cdot 3} = \sqrt{147}$. Paneme tähele, et $20{,}125^2 = 405{,}015625$ ja $12{,}125^2 = 147{,}015625$, mistõttu $\sqrt{405{,}015625} = 8 + \sqrt{147{,}015625} = 20{,}125$. Seega ülesande lahendamiseks piisab näidata võrratus

$$\sqrt{405{,}015625} - \sqrt{405} < \sqrt{147{,}015625} - \sqrt{147}, \tag{1}$$

sest lahutades selle võrratuse pooled arvust 20,125, saame $\sqrt{405} > 8 + \sqrt{147}$.

Et tõestada võrratus (1), vaatleme funktsiooni $y = \sqrt{x+c} - \sqrt{x}$ määramispiirkonnaga $[0;\infty)$, kus $c = 0{,}015625$, ja leiame tuletise $y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x+c}} - \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$. Kuna $x + c > x$, siis $\sqrt{x+c} > \sqrt{x}$, millest tulenevalt $\dfrac{1}{2\sqrt{x+c}} < \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ ehk $y' < 0$. Järelikult on funktsioon $y = \sqrt{x+c} - \sqrt{x}$ kahanev, millest saamegi võrratuse (1).

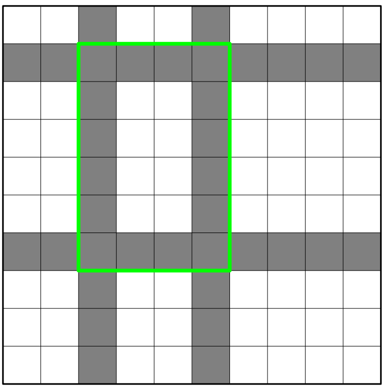
Märkus. Arvuti abil saab leida lähendid $9\sqrt{5} \approx 20{,}1246$ ja $8+7\sqrt{3} \approx 20{,}1244$.

2. *(Hendrik Vija)*

Jukul on mängulaud mõõtmetega 10×10, mis on jaotatud ühikruutudeks. Juku soovib mängida mängu, mida saab mängida mistahes ruudustikul mõõtmetega $m \times n$, kus $m \geqslant 2$ ja $n \geqslant 2$. Mitmel viisil on Jukul võimalik välja valida mängulaua osa, millel oma mängu mängida?

Vastus: $\left(C_{10}^2\right)^2$ ehk 2025.

Lahendus. Mängulaua osa valimine on samaväärne sellele osale külgedeks olevate kahe rea ja kahe veeru väljavalimisega (joonis 17). Kuna $m \geqslant 2$ ja $n \geqslant 2$, on need read ja veerud kindlasti erinevad. Ruudustiku 10 rea hulgast 2 rea valimiseks on C_{10}^2 ehk 45 võimalust ning sama palju võimalusi on ka 2 veeru valimiseks. Kokku on seega 45^2 ehk 2025 võimalust mängulaua osa valimiseks.



Joonis 17

3. *(Hendrik Vija)*

Leia kõik neljakohalised naturaalarvud n, mille kahest esimesest numbrist ja kahest viimasest numbrist (järjestust muutmata) moodustatud kahekohaliste arvude summa ruut võrdub arvuga n.

Vastus: 2025, 3025.

Lahendus 1. Tähistame esimesest kahest numbrist moodustuva arvu kui x ja ülejäänud kahest numbrist moodustuva arvu kui y. Siis saame ülesande tingimuse kirjutada kujul

$$100x + y = (x + y)^2,$$

mille saab lihtsate teisendustega viia kujule

$$99x = (x + y)(x + y - 1).$$

Siit näeme, et 99 peab olema arvu $(x + y)(x + y - 1)$ tegur. Kuna $99 = 9 \cdot 11$ (kusjuures 9 ja 11 on mõlemad algarvuastmed) ning $x + y$ ja $x + y - 1$ kui järjestikused täisarvud on ühistegurita, siis peab kumbki arvudest 9 ja 11 olema teguriks täpselt ühele neist. Arvestades, et ülesande tingimuse põhjal on $(x + y)^2$ neljakohaline arv, millest tulenevalt $32 \leqslant x + y \leqslant 99$, saame järgmised neli varianti.

- Kui 9 on $x+y$ tegur ja 11 on $x+y$ tegur, siis 99 on $x+y$ tegur. Ainus sobiv variant vajalikus vahemikus on $x+y = 99$. Siis $(x+y)^2 = 9801$, mis ei rahulda ülesande tingimusi, sest kahest viimasest numbrist ei moodustu kahekohalist arvu.
- Kui 9 on $x + y$ tegur ja 11 on $x + y - 1$ tegur, siis ainus sobiv variant vahemikus $32 \leqslant x + y \leqslant 99$ on $x + y = 45$. Siis $(x + y)^2 = 2025$, mis rahuldab ülesande tingimusi.
- Kui 9 on $x + y - 1$ tegur ja 11 on $x + y$ tegur, siis ainus sobiv variant vahemikus $32 \leqslant x + y \leqslant 99$ on $x + y = 55$. Siis $(x + y)^2 = 3025$, mis rahuldab ülesande tingimusi.
- Kui 9 on $x+y-1$ tegur ja 11 on $x+y-1$ tegur, siis 99 on $x+y-1$ tegur. Vahemikus $32 \leqslant x + y \leqslant 99$ sobivat varianti ei leidu.

Seega ainsad sobivad variandid on 2025 ja 3025.

Lahendus 2. Selleks, et arvu ruut oleks neljakohaline, peab see arv olema kahekohaline ja vähemalt 32. Kõrvale võib jätta arvud $40, 50, 60, 70, 80, 90$, sest nende ruudud lõpevad kahe nulliga, millest ei moodustu kahekohalist arvu. Samal põhjusel võib kõrvale jätta arvud $47, 48, 49, 51, 52, 53$, mille ruudud on vastavalt $2209, 2304, 2401, 2601, 2704, 2809$. Ka 95 ja suuremad arvud võib kõrvale jätta, sest nende ruut on suurem kui 9000 ja liites 9-ga algavale kahekohalisele arvule teise kahekohalise arvu, on tulemus kolmekohaline.

Ülejäänud arvud vaatame läbi järgnevas tabelis ja leiame täpselt kaks sobivat varianti $2025 = (20 + 25)^2$ ja $3025 = (30 + 25)^2$:

$32^2 = 1024;\ 10 + 24 \neq 32$
$33^2 = 1089;\ 10 + 89 \neq 33$
$34^2 = 1156;\ 11 + 56 \neq 34$
$35^2 = 1225;\ 12 + 25 \neq 35$
$36^2 = 1296;\ 12 + 96 \neq 36$
$37^2 = 1369;\ 13 + 69 \neq 37$
$38^2 = 1444;\ 14 + 44 \neq 38$
$39^2 = 1521;\ 15 + 21 \neq 39$
$41^2 = 1681;\ 16 + 81 \neq 41$
$42^2 = 1764;\ 17 + 64 \neq 42$
$43^2 = 1849;\ 18 + 49 \neq 43$
$44^2 = 1936;\ 19 + 36 \neq 44$
$45^2 = 2025;\ 20 + 25 = 45$
$46^2 = 2116;\ 21 + 16 \neq 46$
$54^2 = 2916;\ 29 + 16 \neq 54$
$55^2 = 3025;\ 30 + 25 = 55$
$56^2 = 3136;\ 31 + 36 \neq 56$
$57^2 = 3249;\ 32 + 49 \neq 57$
$58^2 = 3364;\ 33 + 64 \neq 58$
$59^2 = 3481;\ 34 + 81 \neq 59$
$61^2 = 3721;\ 37 + 21 \neq 61$
$62^2 = 3844;\ 38 + 44 \neq 62$
$63^2 = 3969;\ 39 + 69 \neq 63$
$64^2 = 4096;\ 40 + 96 \neq 64$
$65^2 = 4225;\ 42 + 25 \neq 65$
$66^2 = 4356;\ 43 + 56 \neq 66$
$67^2 = 4489;\ 44 + 89 \neq 67$
$68^2 = 4624;\ 46 + 24 \neq 68$
$69^2 = 4761;\ 47 + 61 \neq 69$
$71^2 = 5041;\ 50 + 41 \neq 71$
$72^2 = 5184;\ 51 + 84 \neq 72$
$73^2 = 5329;\ 53 + 29 \neq 73$
$74^2 = 5476;\ 54 + 76 \neq 74$
$75^2 = 5625;\ 56 + 25 \neq 75$
$76^2 = 5776;\ 57 + 76 \neq 76$
$77^2 = 5929;\ 59 + 29 \neq 77$
$78^2 = 6084;\ 60 + 84 \neq 78$
$79^2 = 6241;\ 62 + 41 \neq 79$
$81^2 = 6561;\ 65 + 61 \neq 81$
$82^2 = 6724;\ 67 + 24 \neq 82$
$83^2 = 6889;\ 68 + 89 \neq 83$
$84^2 = 7056;\ 70 + 56 \neq 84$
$85^2 = 7225;\ 72 + 25 \neq 85$
$86^2 = 7396;\ 73 + 96 \neq 86$
$87^2 = 7569;\ 75 + 69 \neq 87$
$88^2 = 7744;\ 77 + 44 \neq 88$
$89^2 = 7921;\ 79 + 21 \neq 89$
$91^2 = 8281;\ 82 + 81 \neq 91$
$92^2 = 8464;\ 84 + 64 \neq 92$
$93^2 = 8649;\ 86 + 49 \neq 93$
$94^2 = 8836;\ 88 + 36 \neq 94$

Lahendus 3. Nagu lahenduses 1, tähistame esimesest kahest numbrist moodustuva arvu kui x ja ülejäänud kahest numbrist moodustuva arvu kui y ning saame võrrandi

$$100x + y = (x + y)^2,$$

mille saame ümber kirjutada ruutvõrrandina x suhtes kui

$$x^2 + (2y - 100)x + \left(y^2 - y\right) = 0.$$

Siit

$$x = \frac{100 - 2y \pm 2\sqrt{2500 - 99y}}{2}.$$

Kuna y peab olema kahekohaline ning teisalt peab diskriminant $2500 - 99y$ olema mittenegatiivne, siis $10 \leqslant y \leqslant 25$. Täisarvuline x on võimalik vaid siis, kui $2500 - 99y$ on täisruut. Arvutades välja avaldise väärtused $10 \leqslant y \leqslant 25$

jaoks, näeme, et täisruut tekib vaid juhul $y = 25$, kui $2500 - 99y = 25 = 5^2$. Asendades $y = 25$ ruutvõrrandi lahendivalemisse, saame $x = 20$ ja $x = 30$. Nii arv 2025 kui arv 3025 rahuldavad ülesande tingimusi.

4. *(Härmel Nestra)*

Leia kõik reaalarvude kolmikud (x, y, z), mis rahuldavad võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} x + y = z, \\ y^2 + z^2 = x^2, \\ z^3 + x^3 = y^3. \end{cases}$$

Vastus: $(0, 0, 0)$.

Lahendus 1. Tõstes esimese võrrandi pooled ruutu ja avades vasakul sulud, saame

$$x^2 + 2xy + y^2 = z^2. \tag{2}$$

Asendades z^2 seosest (2) algse süsteemi teise võrrandisse, saame pärast sarnaste liikmete koondamist võrrandi $2xy + 2y^2 = 0$, mis on samaväärne võrrandiga $y(x+y) = 0$. Kuna algse süsteemi esimese võrrandi põhjal $x+y = z$, siis $yz = 0$, millest tulenevalt $y = 0$ või $z = 0$.

- Kui $y = 0$, siis algse süsteemi esimese võrrandi põhjal $x = z$. Asendades $y = 0$ ja $x = z$ kolmandasse võrrandisse, saame $z^3 + z^3 = 0$ ehk $2z^3 = 0$, kust ainsa võimalusena $z = 0$. Seega $x = y = z = 0$.
- Kui $z = 0$, siis algse süsteemi esimese võrrandi põhjal $x = -y$. Asendades $z = 0$ ja $x = -y$ kolmandasse võrrandisse, saame $(-y)^3 = y^3$. Kuna $(-y)^3 = -y^3$, siis järeldub siit $2y^3 = 0$, kust $y = 0$. Seega jällegi $x = y = z = 0$.

Kokkuvõttes näeme, et ainus võimalus on $x = y = z = 0$.

Lahendus 2. Tõstes esimese võrrandi pooled kuupi ja avades vasakul sulud, saame

$$x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 = z^3. \tag{3}$$

Asendades z^3 seosest (3) algse süsteemi kolmandasse võrrandisse, saame pärast sarnaste liikmete koondamist võrrandi $2x^3 + 3x^2y + 3xy^2 = 0$ ning liikmete ümberjärjestamisel omakorda võrrandi $3xy^2+3x^2y+2x^3 = 0$. Vaatleme viimast ruutvõrrandina y suhtes. Saame

$$D = \left(3x^2\right)^2 - 4 \cdot 3x \cdot 2x^3 = 9x^4 - 24x^4 = -15x^4 \leqslant 0,$$

kuid lahendite leidumiseks peab olema $D \geqslant 0$. Seega ainus võimalus on $D = 0$ ehk $-15x^4 = 0$, kust $x = 0$. Asendades selle algse süsteemi teise võrrandisse, saame $y^2 + z^2 = 0$, mis on võimalik vaid juhul $y = z = 0$. Seega $x = y = z = 0$.

Lahendus 3. Nagu lahenduses 1, tuletame võrduse $2xy + 2y^2 = 0$, kust jagamisel 2-ga saame $xy + y^2 = 0$. Nagu lahenduses 2, tuletame võrduse $2x^3 + 3x^2y + 3xy^2 = 0$, mis on samaväärne seosega $2x^3 + 3x\left(xy + y^2\right) = 0$. Kuna eelneva põhjal $xy + y^2 = 0$, siis $2x^3 = 0$, kust $x = 0$. Nüüd saame algse süsteemi teisest võrrandist $y^2 + z^2 = 0$, mis on võimalik vaid juhul $y = z = 0$. Seega $x = y = z = 0$ on ainus võimalus.

Lahendus 4. Vaatame juhtusid sõltuvalt sellest, kas mõne muutuja väärtus on 0 või mitte.

- Kui $x = 0$, siis süsteemi teise võrrandi põhjal $y^2 + z^2 = 0$, mis on võimalik vaid juhul $y = z = 0$. Seega $x = y = z = 0$.
- Kui $y = 0$, siis süsteemi esimese võrrandi põhjal $x = z$, süsteemi kolmanda võrrandi põhjal aga $z^3 + x^3 = 0$, kust $x^3 = -z^3 = (-z)^3$ ehk $x = -z$. Seega $z = -z$, mis annab $z = 0$. Järelikult $x = y = z = 0$.
- Kui $z = 0$, siis süsteemi esimese võrrandi põhjal $x + y = 0$, kust $x = -y$, süsteemi kolmanda võrrandi põhjal aga $x^3 = y^3$ ehk $x = y$. Seega $y = -y$, mis annab $y = 0$. Järelikult $x = y = z = 0$.
- Jääb üle vaadelda juhtu, kus $x \neq 0$, $y \neq 0$ ja $z \neq 0$. Süsteemi teise võrrandi põhjal $|x| > |y|$ ja $|x| > |z|$ (ehk x on absoluutväärtuselt suurem kui y ja z). Kui nüüd x ja y oleksid ühemärgilised, siis oleks esimese võrrandi põhjal z samamärgiline ja absoluutväärtuselt suurim, vastuolu. Samuti kui z ja x oleksid ühemärgilised, siis oleks kolmanda võrrandi põhjal y samamärgiline ja absoluutväärtuselt suurim, vastuolu. Kui aga y ja z oleksid ühemärgilised, siis ei saaks esimese (ega ka kolmanda) võrrandi põhjal olla x absoluutväärtuselt suurim. Järelikult peaksid x, y ja z olema paarikaupa erimärgilised, mis pole võimalik.

Kokkuvõttes on ainus võimalus $x = y = z = 0$.

5. *(Härmel Nestra)*

Leia kõik positiivsed täisarvud n, mille korral leidub tasandil kumer n-nurk järgmiste omadustega:

1) leiduvad kaks sisenurka, mis on erinevate suurustega α ja β;
2) iga sisenurk on kas suurusega α või suurusega β;
3) suurusega α sisenurkade summa ja suurusega β sisenurkade summa on võrdsed.

Vastus: kõik paaritud 1-st suuremad täisarvud.

Lahendus. Olgu vaadeldavas n-nurgas k sisenurka suurusega α. Tingimuse 2 põhjal siis leidub $n - k$ sisenurka suurusega β.

Teame, et $k\alpha + (n - k)\beta = (n - 2) \cdot 180^\circ$. Tingimusest 3 seega

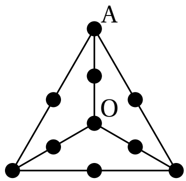
$$k\alpha = (n - k)\beta = (n - 2) \cdot 90^\circ.$$

Järelikult $\alpha = \dfrac{(n-2)\cdot 90^\circ}{k}$ ja $\beta = \dfrac{(n-2)\cdot 90^\circ}{n-k}$. Tingimuse 1 põhjal $\alpha \neq \beta$, niisiis $k \neq n-k$ ehk $2k \neq n$.

Samuti teame, et kumera hulknurga kõik sisenurgad on väiksemad kui 180°. Seega $\dfrac{(n-2)\cdot 90^\circ}{k} < 180^\circ$, millest tulenevalt $2k > n-2$. Üldisust kitsendamata võib aga eeldada, et $2k < n$ (vastasel korral vahetame α ja β rollid). Kokkuvõttes on ainus võimalus $2k = n-1$. Kuna $n-1$ on sellest tulenevalt paarisarv, peab n olema paaritu.

Iga 1-st suurema paaritu täisarvu n jaoks saame konstrueerida n-nurga, milles on $\dfrac{n-1}{2}$ sisenurka suurusega $\dfrac{(n-2)\cdot 180^\circ}{n-1}$ ja $\dfrac{n+1}{2}$ sisenurka suurusega $\dfrac{(n-2)\cdot 180^\circ}{n+1}$. Sellega on kõik ülesande tingimused täidetud.

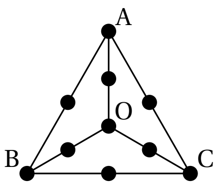
6. *(Hendrik Vija)*



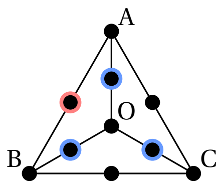
Joonisel on linna X trammiliinide võrgustik, mille liine märgivad sirglõigud ja peatusi mummukesed. Juku ja tema sõbrad mängivad kullimängu, kus on üks põgeneja ja vähemalt üks püüdja. Igal käigul otsustavad kõik mängijad üheaegselt, kas jääda paigale või liikuda trammiga ühe peatuse võrra mööda mingit liini mingis suunas. Pärast käiku saavad kõik teada, mida teised otsustasid ja kus nad asuvad. Kui pärast käiku on vähemalt üks püüdja põgenejaga samas peatuses, siis on põgeneja kinni püütud. Põgeneja alustab peatuses A ning püüdjad alustavad peatuses O. Leia vähim püüdjate arv, mille korral on püüdjatel võimalik põgeneja lõpliku arvu käikudega tabada sõltumata põgeneja liikumisest.

Vastus: 3.

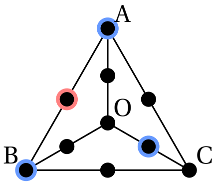
Lahendus. Igast peatusest on võimalik ühe peatuse võrra liikudes jõuda vähemalt kahte erinevasse peatusse. Seega on põgenejal sõltumata asukohast igal käigul vähemalt kolm võimalust, kus oma käik lõpetada: lisaks vähemalt kahele naaberpeatusele ka sama peatus ise. Kahe püüdja korral jääb üks neist peatustest alati vabaks, mistõttu nad ei saa garanteerida põgeneja kinnipüüdmist.



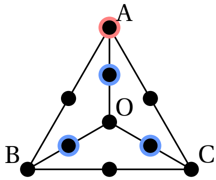
Joonis 18



Joonis 19



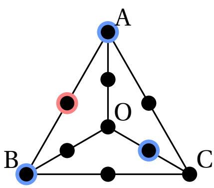
Joonis 20



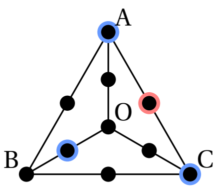
Joonis 21

Nüüd tõestame, et kolmest püüdjast kindlasti piisab. Tähistame teised lõpppeatused tähtedega B ja C (joonis 18). Liikugu kolm püüdjat esimesel käigul vastavalt lõpppeatuste A, B ja C suunas. Siis on kolm võimalust:

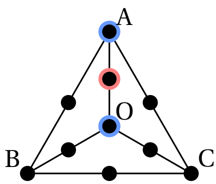
- Kui põgeneja liigub esimesel käigul peatuse O suunas, siis on ta kinni püütud.
- Kui põgeneja liigub esimesel käigul mõne teise lõpppeatuse suunas – üldisust kitsendamata olgu see peatus B (joonis 19; siin ja edaspidi tähistavad sinised ringid püüdjate asukohti ja punane ring põgeneja asukohta) –, siis liikugu lõpppeatuste A ja B suunas liikunud püüdjad teisel käigul samas suunas edasi, jõudes neisse peatustesse kohale, ning jäägu kolmas püüdja paigale. Sellisel juhul, kui põgeneja teisel käigul liigub, on ta nüüd kinni püütud. Vastasel juhul on ta nüüd kahe püüdja vahel „kinni“ (joonis 20).
- Kui põgeneja jääb esimesel käigul paigale (joonis 21), siis liikugu jaama A suunas liikunud püüdja teisel käigul veel ühe peatuse edasi ning jäägu ülejäänud kaks püüdjat paigale. Kui põgeneja jääb taaskord paigale, siis on ta kinni püütud. Kui põgeneja liigub, siis teeb ta seda peatuse B, C või O suunas. Igaühest neist on ühe peatuse kaugusel püüdja. Liikugu see püüdja kolmandal käigul sinna peatusesse, mille suunas põgeneja teisel käigul liikus, ja jäägu teised püüdjad paigale. Kui siis põgeneja kolmandal käigul liigub, on ta nüüd kinni püütud. Vastasel juhul on ta nüüd kahe püüdja vahel „kinni“ (joonised 22–24 kujutavad kõiki võimalikke olukordi pärast kolmandat käiku).



Joonis 22



Joonis 23



Joonis 24

Jääb märgata, et kui põgeneja on kahe püüdja vahel kinni, siis piisab, kui need kaks püüdjat jäävad paigale ja kolmas liigub lõpliku arvu käikudega sellesse jaama, kus põgeneja asub. Nii püütakse põgeneja kindlalt kinni.

Eesti 72. matemaatikaolümpiaad

29. jaanuar 2025 Piirkonnavoor **12. klass**

Lahendused

1. *(Urve Kangro)*

Arvuta summa

$$\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{6}}+\frac{1}{\sqrt{6}+\sqrt{7}}+\frac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{8}}+\frac{1}{\sqrt{8}+\sqrt{9}}.$$

Vastus: 2.

Lahendus 1. Paneme tähele, et

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}} &= \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\left(\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\right)\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)} = \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\left(\sqrt{n+1}\right)^2-\left(\sqrt{n}\right)^2} = \\ &= \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{(n+1)-n} = \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{1} = \sqrt{n+1}-\sqrt{n}.\end{aligned}$$

Seega antud summa on võrdne teleskoopsummaga

$$\sqrt{2}-\sqrt{1}+\sqrt{3}-\sqrt{2}+\sqrt{4}-\sqrt{3}+\sqrt{5}-\sqrt{4}+\sqrt{6}-\sqrt{5}+\sqrt{7}-\sqrt{6}+\sqrt{8}-\sqrt{7}+\sqrt{9}-\sqrt{8}.$$

Koondades sarnased liikmed, saame $\sqrt{9}-\sqrt{1}$ ehk $3-1$ ehk 2.

Lahendus 2. Liidame kokku esimesed kolm murdu, avame sulud ja koondame sarnased liikmed:

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} \\ &\qquad = \frac{\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{3}+2\right)+\left(1+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3}+2\right)+\left(1+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)}{\left(1+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{3}+2\right)} \\ &\qquad = \frac{7+5\sqrt{2}+4\sqrt{3}+3\sqrt{6}}{7+5\sqrt{2}+4\sqrt{3}+3\sqrt{6}} = 1.\end{aligned}$$

Teeme sama järgmise kolme murruga:

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{6}}+\frac{1}{\sqrt{6}+\sqrt{7}} \\ &\qquad = \frac{\left(\sqrt{5}+\sqrt{6}\right)\left(\sqrt{6}+\sqrt{7}\right)+\left(2+\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{6}+\sqrt{7}\right)+\left(2+\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{5}+\sqrt{6}\right)}{\left(2+\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{5}+\sqrt{6}\right)\left(\sqrt{6}+\sqrt{7}\right)}\end{aligned}$$

$$= \frac{11 + 2\sqrt{5} + 4\sqrt{6} + 2\sqrt{7} + 3\sqrt{30} + 2\sqrt{35} + \sqrt{42}}{12 + 6\sqrt{5} + 5\sqrt{6} + 5\sqrt{7} + 2\sqrt{30} + 2\sqrt{35} + 2\sqrt{42} + \sqrt{210}}.$$

Seejärel liidame viimased kaks murdu:

$$\frac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{8}} + \frac{1}{\sqrt{8}+\sqrt{9}} = \frac{\sqrt{8}+3+\sqrt{7}+\sqrt{8}}{\left(\sqrt{7}+\sqrt{8}\right)\left(\sqrt{8}+3\right)} = \frac{3+4\sqrt{2}+\sqrt{7}}{8+6\sqrt{2}+3\sqrt{7}+2\sqrt{14}}.$$

Liidame omavahel kaks viimast tulemust:

$$\frac{11+2\sqrt{5}+4\sqrt{6}+2\sqrt{7}+3\sqrt{30}+2\sqrt{35}+\sqrt{42}}{12+6\sqrt{5}+5\sqrt{6}+5\sqrt{7}+2\sqrt{30}+2\sqrt{35}+2\sqrt{42}+\sqrt{210}} + \frac{3+4\sqrt{2}+\sqrt{7}}{8+6\sqrt{2}+3\sqrt{7}+2\sqrt{14}} =$$
$$= \frac{\left(11+2\sqrt{5}+4\sqrt{6}+2\sqrt{7}+3\sqrt{30}+2\sqrt{35}+\sqrt{42}\right)\left(8+6\sqrt{2}+3\sqrt{7}+2\sqrt{14}\right)}{\left(12+6\sqrt{5}+5\sqrt{6}+5\sqrt{7}+2\sqrt{30}+2\sqrt{35}+2\sqrt{42}+\sqrt{210}\right)\left(8+6\sqrt{2}+3\sqrt{7}+2\sqrt{14}\right)} +$$
$$+ \frac{\left(3+4\sqrt{2}+\sqrt{7}\right)\left(12+6\sqrt{5}+5\sqrt{6}+5\sqrt{7}+2\sqrt{30}+2\sqrt{35}+2\sqrt{42}+\sqrt{210}\right)}{\left(8+6\sqrt{2}+3\sqrt{7}+2\sqrt{14}\right)\left(12+6\sqrt{5}+5\sqrt{6}+5\sqrt{7}+2\sqrt{30}+2\sqrt{35}+2\sqrt{42}+\sqrt{210}\right)}.$$

Kui nüüd siin sulud avada ja sarnased liikmed koondada, siis tulevad lugeja ja nimetaja võrdsed, seega saame ka selle avaldise väärtuseks 1.

2. *(Urve Kangro)*

Kolmnurga ABC pindala avaldub kujul $S = \dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{4}$, kus a, b ja c on vastavalt külgede BC, CA ja AB pikkused. Leia nurga ACB suurus.

Vastus: 45°.

Lahendus. Koosinusteoreemi põhjal $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$, kus $\gamma = \angle ACB$. Seega $a^2 - b^2 - c^2 = 2ab\cos\gamma$, nii et ülesande tingimuse põhjal $S = \dfrac{ab\cos\gamma}{2}$. Samas teame, et $S = \dfrac{ab\sin\gamma}{2}$. Kokkuvõttes $\cos\gamma = \sin\gamma$, kust $\tan\gamma = 1$ ehk $\gamma = 45^\circ$.

3. *(Maksim Ivanov)*

Positiivsed täisarvud a, b, c ja d on sellised, et $a > b > c > d$, arvud $a + b$ ja $c + d$ jaguvad mõlemad 2-ga, arvud $a - c$ ja $b - d$ jaguvad mõlemad 3-ga ning arvud $a \cdot d$ ja $b \cdot c$ jaguvad mõlemad 5-ga. Leia vähim võimalik arvude a, b, c ja d summa.

Vastus: 34.

Lahendus 1. Kuna 5 on algarv, siis a või d jagub 5-ga ning b või c jagub 5-ga. Seega $b \geqslant 5$ ja $a \geqslant 10$. Samuti näeme, et kuna $c + d$ peab jaguma 2-ga, siis juht $c = 2, d = 1$ ei sobi, mistõttu $c \geqslant 3$. Vaatame juhtusid vastavalt sellele, milline on 5-ga jaguv tegur korrutises ad.

- Kui $a = 10$, siis $b = 5$ või $c = 5$. Kuid siis kas $a + b$ ei jagu 2-ga või $a - c$ ei jagu 3-ga, vastuolu.
- Kui $a = 15$, siis $b = 5$ või $b = 10$ või $c = 5$ või $c = 10$. Teisel juhul $a + b$ ei jagu 2-ga ning viimasel kahel juhul $a - c$ ei jagu 3-ga. Seega ainus võimalus on $b = 5$. Et $a - c$ ja $b - d$ jaguksid 3-ga, peab olema $c = 3$ ja $d = 2$. Kuid siis $c + d$ ei jagu 2-ga, vastuolu.
- Kui $a = 20$, siis $b = 5$ või $b = 10$ või $b = 15$ või $c = 5$ või $c = 10$ või $c = 15$. Esimesel ja kolmandal juhul $a + b$ ei jagu 2-ga, kahel viimasel juhul aga $a - c$ ei jagu 3-ga. Seega sõelale jäävad variandid $b = 10$ ja $c = 5$.
  - Kui $c = 5$, siis selleks, et $c + d$ jaguks 2-ga, peab olema kas $d = 3$ või $d = 1$. Kui $d = 3$, siis variant $a = 20, b = 6, c = 5, d = 3$ rahuldab kõiki ülesande tingimusi ja annab vähima summa $a + b + c + d = 34$. Kui $d = 1$, siis $b = 6$ annab vastuolu tingimusega, et $b - d$ jagub 3-ga, ja $b = 7$ tingimusega, et $a + b$ jagub 2-ga. Järelikult $b \geqslant 8$, mis annab $a + b + c + d \geqslant 20 + 8 + 5 + 1 = 34$.
  - Kui $b = 10$, siis $a + b + c + d \geqslant 20 + 10 + 3 + 1 = 34$.
- Kui $a \geqslant 25$, siis $a + b + c + d \geqslant 25 + 5 + 3 + 1 = 34$.
- Kui $d = 5$, siis $b \geqslant 20$ või $c \geqslant 15$, sest juhtudel $b = 10$ ja $b = 15$ saame vastuolu tingimusega, et $b - d$ jagub 3-ga, ning juhul $c = 10$ tingimusega, et $c + d$ jagub 2-ga. Kui $b \geqslant 20$, siis $a + b + c + d \geqslant 21 + 20 + 6 + 5 > 34$, kui aga $c \geqslant 15$, siis $a + b + c + d \geqslant 17 + 16 + 15 + 5 > 34$.
- Kui $d \geqslant 10$, siis $a + b + c + d \geqslant 13 + 12 + 11 + 10 > 34$.

Seega arvude a, b, c, d vähim võimalik summa on 34.

Lahendus 2. Kuna 5 on algarv, siis a või d jagub 5-ga ning b või c jagub 5-ga. Samuti näeme, et kuna $c + d$ peab jaguma 2-ga ja $c = d = 1$ pole võimalik, siis $c + d \geqslant 4$. Vaatame juhtusid selle järgi, millised arvud jaguvad 5-ga.

- Kui a ja c jaguvad 5-ga või b ja d jaguvad 5-ga, siis vastavalt $a - c$ või $b - d$ jagub 5-ga. Kuna aga need mõlemad arvud jaguvad 3-ga, siis peab $a - c$ või $b - d$ jaguma arvuga $3 \cdot 5$ ehk 15-ga. Mõlemal juhul $(a - c) + (b - d) \geqslant 15 + 3 = 18$. Kuna c või d jagub 5-ga, siis $c + d \geqslant 5 + 1 = 6$. Juht $c + d = 6$ tähendaks, et $c = 5$ ja $d = 1$, kusjuures ka a jagub 5-ga. Siis arvestades $a - c$ ja $b - d$ jaguvust 3-ga, saame $a \geqslant 20$ ja $b \geqslant 7$, kust $a + b + c + d \geqslant 20 + 7 + 6 = 33$. Et aga $a + b + c + d$ on 2-ga jaguvate arvude $a + b$ ja $c + d$ summa, siis $a + b + c + d$ jagub 2-ga, mistõttu $a + b + c + d \geqslant 34$. Kui $c + d \neq 6$, siis $c + d \geqslant 8$, sest $c + d$ jagub 2-ga. Saame jällegi $a + b + c + d = (a - c) + (b - d) + 2(c + d) \geqslant 18 + 2 \cdot 8 = 34$.
- Kui a ja b jaguvad 5-ga või c ja d jaguvad 5-ga, siis vastavalt $a + b$ või $c + d$ jagub 5-ga. Kuna aga need mõlemad arvud jaguvad 2-ga, siis peab $a + b$ või $c + d$ jaguma arvuga $2 \cdot 5$ ehk 10-ga; seejuures ei ole aga $a + b = 10$ ega $c + d = 10$ võimalik, sest $a > b$ ja $c > d$. Seega $a + b \geqslant 20$

või $c + d \geqslant 20$. Kui $c + d \geqslant 20$, siis $a + b + c + d > 20 + 20 = 40 > 34$; samuti kui $a+b \geqslant 30$, siis $a+b+c+d \geqslant 30+4 = 34$. Seega jääb vaadelda juht, kus $a + b = 20$ ning a ja b jaguvad 5-ga. Siis $a = 15$, $b = 5$ ning tingimus, et $a - c$ ja $b - d$ jaguvad 3-ga, annab $c = 3$ ja $d = 2$. Kuid sel juhul $c + d$ ei jagu 2-ga, vastuolu.

Kokkuvõttes oleme näidanud, et $a+b+c+d \geqslant 34$. Lihtne on näha, et võttes $a = 20, b = 6, c = 5, d = 3$, on kõik ülesande tingimused rahuldatud ja $a+b+c+d = 34$. Järelikult vähim võimalik arvude a, b, c, d summa on 34.

Lahendus 3. Võttes $a = 20$, $b = 6$, $c = 5$, $d = 3$, on kõik ülesande tingimused täidetud ja $a + b + c + d = 34$. Näitame, et väiksem summa pole võimalik.

Kuna $a-c$ ja $b-d$ jaguvad 3-ga, siis ka nende vahede summa $(a-c)+(b-d)$ jagub 3-ga. Samas $a + b$ ja $c + d$ jaguvad 2-ga, seega nende summade vahe $(a + b) - (c + d)$ jagub 2-ga. Kuna $(a - c) + (b - d) = (a + b) - (c + d)$, siis see arv peab jaguma nii 2-ga kui ka 3-ga ehk kokku 6-ga.

Kuna $a \cdot d$ jagub 5-ga ja 5 on algarv, siis a või d peab jaguma 5-ga. Samuti peab b või c jaguma 5-ga. Vaatame kõik juhud läbi.

- Oletame, et d jagub 5-ga. Kui nüüd b jagub 5-ga, siis $b-d$ jagub nii 3-ga kui ka 5-ga ehk kokku 15-ga. Seega $b - d \geqslant 15$. Kui aga c jagub 5-ga, siis $c - d$ jagub 5-ga ning $c - d$ jagub ka 2-ga, sest $c - d$ ja $c + d$ on sama paarsusega. Seega $c - d$ jagub 10-ga. Kuna $b - d > c - d$ ja $b - d$ jagub 3-ga, siis $b - d \geqslant 12$. Et aga $d \geqslant 5$, siis järeldub sellest $b \geqslant 5 + 12 = 17$. Seega $a + b + c + d > a + b > 2b \geqslant 34$.
- Oletame, et a jagub 5-ga. Sarnaselt eelmise juhuga näeme, et $a-c \geqslant 12$ ja juhul, kui c jagub 5-ga, koguni $a - c \geqslant 15$. Arvu $(a - c) + (b - d)$ jaguvuse tõttu 6-ga saame, et $(a - c) + (b - d) \geqslant 18$. Kuna $c + d$ on paaris, siis $c+d \geqslant 4$, sest $c+d = 2$ annaks $c = d = 1$, mis pole võimalik. Seega $a + b = ((a - c) + (b - d)) + (c + d) \geqslant 18 + 4 = 22$.

  Kui nüüd b jagub 5-ga, siis $a + b$ jagub nii 2-ga kui ka 5-ga ehk kokku 10-ga. Seega $a + b \geqslant 30$, kust $a + b + c + d \geqslant 30 + 4 = 34$.

  Kui aga c jagub 5-ga, siis eelneva põhjal $a - c \geqslant 15$. Kuna $c \geqslant 5$, siis $c + d \geqslant 6$. Võrdus $c + d = 6$ on võimalik vaid juhul $c = 5$, $d = 1$, kuid sel juhul $b - d > 3$ ja $(a - c) + (b - d) > 15 + 3 = 18$. Jaguvuse tõttu 6-ga peab kehtima $(a - c) + (b - d) \geqslant 24$, kuid siis $a + b + c + d = ((a - c) + (b - d)) + 2(c + d) \geqslant 24 + 2 \cdot 6 > 34$. Juhul $c + d > 6$ aga saame paarsuse tõttu $c + d \geqslant 8$. Sellest tulenevalt $a + b + c + d = ((a - c) + (b - d)) + 2(c + d) \geqslant 18 + 2 \cdot 8 = 34$.

Kuna kõikidel juhtudel $a+b+c+d \geqslant 34$, siis väiksem summa pole võimalik.

4. *(Härmel Nestra)*

Jukul on kolm tahvlit šokolaadi, igaüks massiga 60 g. Esimesel päeval murrab Juku esimese šokolaaditahvli kolmeks tükiks, mille massid on mingi aritmeetilise jada järjestikused liikmed, ja sööb neist tükkidest kaks ära. Teisel päeval murrab Juku teise šokolaaditahvli niisama rasketeks tükkideks nagu esimesel päeval esimese tahvli ja sööb saadud kolmest tükist kaks ära. Kolmandal päeval murrab Juku kolmanda šokolaaditahvli niisama rasketeks tükkideks nagu eelmistel päevadel eelmised tahvlid ja sööb saadud kolmest tükist kaks ära. Neljandal päeval sööb Juku ära kõik esimesel kolmel päeval järele jäänud tükid. Nii sööb Juku kõigil neljal päeval ühepalju šokolaadi. Leia šokolaaditahvli kolmeks tükiks murdmisel tekkinud suurima tüki mass.

Vastus: 25 g.

Lahendus 1. Nelja päevaga sööb Juku kokku 3 tahvlit šokolaadi, mis on kokku 180 g. See teeb iga päev 45 g, sest ta sööb kõigil päevadel ühepalju. Olgu šokolaaditahvli murdmisel tekkivate tükkide massid a, $a+d$ ja $a+2d$ grammi; siis $a+(a+d)+(a+2d) = 60$ ehk $3a+3d = 60$. Sõltuvalt sellest, millised kaks tükki Juku sööb, kehtib kas $a + (a + d) = 45$ või $a + (a + 2d) = 45$ või $(a + d) + (a + 2d) = 45$; pärast lihtsustamist saame vastavalt $2a + d = 45$ või $2a + 2d = 45$ või $2a + 3d = 45$. Vaatleme neid kolme juhtu eraldi.

- Olgu $2a + d = 45$. Lahutades võrrandisüsteemi
$$\begin{cases} 3a + 3d = 60, \\ 2a + d = 45 \end{cases}$$
esimesest võrrandist 3-ga korrutatud teise võrrandi, saame $-3a = -75$ ehk $a = 25$. Võrrand $2a + d = 45$ annab nüüd $d = -5$. Tükid on seega massiga 25 g, 20 g ja 15 g, millest raskeim on 25 g.
- Olgu $2a + 2d = 45$. Korrutades võrrandisüsteemi
$$\begin{cases} 3a + 3d = 60, \\ 2a + 2d = 45 \end{cases}$$
esimese võrrandi 2-ga ja teise võrrandi 3-ga, saame võrrandite lahutamisel $0 = 2 \cdot 60 - 3 \cdot 45 = -15$. Vastuolu näitab, et see juht pole võimalik.
- Olgu $2a + 3d = 45$. Lahutades võrrandisüsteemi
$$\begin{cases} 3a + 3d = 60, \\ 2a + 3d = 45 \end{cases}$$
esimesest võrrandist teise, saame $a = 15$. Võrrand $2a + 3d = 45$ annab nüüd $d = 5$. Tükid on seega massiga 15 g, 20 g ja 25 g, raskeim on 25 g.

Seega kolmest tükist raskeima mass saab olla ainult 25 g.

Lahendus 2. Nelja päevaga sööb Juku kokku 3 tahvlit šokolaadi, mis teeb 180 g. Kuna ta sööb kõigil päevadel ühepalju, siis sööb ta iga päev 45 g šokolaadi. Seega jääb igast esimesel kolmel päeval alustatud šokolaaditahvlist järele tükk massiga 15 g. Kuna šokolaaditahvli kolmeks jaotamisel tekkivate tükkide massid on aritmeetilise jada järjestikused liikmed, siis keskmise tüki mass on $\frac{1}{3}$ terve tahvli massist ehk 20 g. Kolmanda tüki mass on järelikult 25 g. See on ka kolmest tükist kõige raskem.

5. *(Hendrik Vija)*

Kolmnurga kahe kõrguse pikkused on 3 cm ja 6 cm. Leia kõik võimalused, milline saab olla kolmnurga kolmanda kõrguse pikkus.

Vastus: kõik pikkused 2 cm ja 6 cm vahel.

Lahendus. Olgu kolmnurga küljepikkused a, b, c ning külgedele tõmmatud kõrgused vastavalt pikkustega h_A, h_B, h_C; üldisust kitsendamata $h_A = 3$ cm ja $h_B = 6$ cm. Olgu kolmnurga pindala S. Siis $a = \frac{2S}{h_A}$, $b = \frac{2S}{h_B}$ ja $c = \frac{2S}{h_C}$, kusjuures $h_A < h_B$ tõttu $a > b$. Kolmnurga kolmas küljepikkus c peab rahuldama kolmnurgavõrratusi $a - b < c < a + b$ ehk

$$\frac{2S}{h_A} - \frac{2S}{h_B} < \frac{2S}{h_C} < \frac{2S}{h_A} + \frac{2S}{h_B}.$$

Jagades võrratuste pooled suurusega $2S$, saame samaväärsed võrratused

$$\frac{1}{h_A} - \frac{1}{h_B} < \frac{1}{h_C} < \frac{1}{h_A} + \frac{1}{h_B}.$$

Siit saame h_C jaoks tingimused

$$\frac{1}{\frac{1}{h_A} - \frac{1}{h_B}} > h_C > \frac{1}{\frac{1}{h_A} + \frac{1}{h_B}}$$

ehk

$$\frac{h_A h_B}{h_B - h_A} > h_C > \frac{h_A h_B}{h_A + h_B}.$$

Arvestades, et $h_A = 3$ cm ja $h_B = 6$ cm, saame 6 cm $> h_C >$ 2 cm. Kuna kolmnurga küljepikkusteks sobivad kõik pikkused, mis rahuldavad kolmnurgavõrratusi, siis on ka kõik kolmanda kõrguse pikkused 2 cm ja 6 cm vahel saavutatavad.

6. *(Hendrik Vija)*

Kooli kergejõustikuvõistluste 100 meetri jooksu poolfinaalides osaleb kokku 12 jooksjat. Nad loositakse kolme 4-liikmelisse gruppi, nii et kõik gruppidesse jagunemise võimalused on võrdtõenäolised. Seejärel jookseb iga grupp ühe jooksu. Finaali pääseb 4 jooksjat: iga jooksu võitja ja lisaks ka kiireim kõigist neist jooksjatest, kes oma jooksu ei võida. Leia tõenäosus, et finaali pääsevad need jooksjad, kes saavad 4 kiireimat aega. (Eeldame, et ükski kaks jooksjat ei saa täpselt sama aega ja et iga jooksja saavutab kindla aja sõltumata grupist, milles ta jookseb.)

Vastus: $\frac{32}{55}$.

Lahendus 1. Paneme tähele, et see edasipääseja, kes oma jooksu ei võida, on alati 4 kiireima jooksja hulgas, sest temast kiiremad saavad olla vaid jooksude võitjad, keda on kokku vaid 3. Seega pääsevad finaali 4 kiireimat jooksjat parajasti siis, kui iga jooksu võitja on 4 kiireima hulgas. See tingimus on aga samaväärne sellega, et 4 kiireimat jooksjat jaotuvad kolme jooksu vahel niimoodi, et igas jooksus on neid vähemalt üks.

Loendame kõik gruppidesse jagunemise võimalused. Kõiki võimalusi jooksjaid ühekaupa gruppidesse jaotada on kokku 12!, aga kuna grupisiseselt ei ole jooksjate loosimise järjestus oluline, siis kõigi gruppidesse jagunemisi on $\frac{12!}{4! \cdot 4! \cdot 4!}$.

Loendame nüüd kõik soodsad gruppidesse jagunemise võimalused. Selleks, et 4 kiirema jooksja hulgast vähemalt üks oleks igas jooksus esindatud, peab neid ühes jooksus olema kaks ja kahes ülejäänud jooksus üks. Võimalusi valida jooks, milles osaleb kaks jooksjat 4 kiireima hulgast, on 3, nende kahe jooksja valikuks on võimalusi C_4^2 ehk 6 ning lõpuks on 2 võimalust ülejäänud kahe jooksja jaotamiseks kahe jooksu vahel. Seega on 4 kiireima jooksja sobivaks jaotamiseks $3 \cdot 6 \cdot 2$ ehk 36 võimalust. Selles jooksus, kus kaks osalejat on 4 kiireima seas, on 2 osalejat ülejäänud 8 jooksja seast. Kummaski sellises jooksus, kus vaid üks osaleja on 4 kiireima seas, on 3 osalejat ülejäänute seast. Seega on ülejäänud 8 jooksja gruppidesse jaotamiseks $\frac{8!}{2! \cdot 3! \cdot 3!}$ võimalust. Seega on kõigi jooksjate soodsaid gruppidesse jagunemise võimalusi $36 \cdot \frac{8!}{2! \cdot 3! \cdot 3!}$ ehk $\frac{8!}{2!}$.

Kuna

$$\frac{\frac{8!}{2!}}{\frac{12!}{4! \cdot 4! \cdot 4!}} = \frac{8! \cdot 4! \cdot 4! \cdot 4!}{2! \cdot 12!} = \frac{24 \cdot 24 \cdot 24}{2 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12} = \frac{24 \cdot 24}{9 \cdot 10 \cdot 11} = \frac{4 \cdot 8}{5 \cdot 11} = \frac{32}{55},$$

siis otsitav tõenäosus on $\frac{32}{55}$.

Lahendus 2. Nagu lahenduses 1 näeme, et 4 kiireimat jooksjat pääsevad finaali parajasti siis, kui igas poolfinaaljooksus on neid vähemalt üks.

Loendame kõik gruppidesse jagunemise võimalused. Jooksjate valimiseks esimesse jooksu on C_{12}^4 võimalust, seejärel on jooksjate valimiseks teise jooksu C_8^4 võimalust. Sellega on kõigi jooksjate jagunemine üheselt määratud. Seega on kõiki gruppidesse jagunemise võimalusi kokku $C_{12}^4 \cdot C_8^4$.

Loendame kõik ebasoodsad gruppidesse jagunemise võimalused ehk need, kus mõnes jooksus pole ühtki jooksjat 4 kiireima seast. On 3 võimalust valida jooks, milles pole ühtki jooksjat 4 kiireima seast, seejärel on nende jooksjate valimiseks C_8^4 võimalust ja ülejäänud jooksjate jaotamiseks kahte ülejäänud jooksu samuti C_8^4 võimalust. Kokku saame $3 \cdot C_8^4 \cdot C_8^4$ võimalust. Siin on aga topelt arvestatud võimalused, kus kahes jooksus pole ühtki jooksjat 4 kiireima seast. Loendame need võimalused eraldi. Nende kahe jooksu valimiseks, kus pole ühtki jooksjat 4 kiireima seast, on 3 võimalust. Jooksjate jaotamiseks nendesse jooksudesse on C_8^4 võimalust. Sellega on kõigi jooksjate jaotus üheselt määratud. Seega võimalusi, kus kahes jooksus pole ühtki jooksjat 4 kiireima seast, on $3 \cdot C_8^4$. Kokkuvõttes on ebasoodsate võimaluste arv $3 \cdot C_8^4 \cdot C_8^4 - 3 \cdot C_8^4$ ehk $3 \cdot C_8^4 \cdot \left(C_8^4 - 1\right)$.

Kuna kõiki gruppidesse jagunemise võimalusi on $C_{12}^4 \cdot C_8^4$, siis soodsaid gruppidesse jagunemise võimalusi on järelikult $C_{12}^4 \cdot C_8^4 - 3 \cdot C_8^4 \cdot \left(C_8^4 - 1\right)$. Saame

$$\frac{C_{12}^4 \cdot C_8^4 - 3 \cdot C_8^4 \cdot \left(C_8^4 - 1\right)}{C_{12}^4 \cdot C_8^4} = 1 - \frac{3 \cdot \left(C_8^4 - 1\right)}{C_{12}^4}.$$

Arvutades leiame

$$\begin{aligned} C_8^4 &= \frac{8!}{4! \cdot 4!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 7 \cdot 2 \cdot 5 = 70, \\ C_{12}^4 &= \frac{12!}{4! \cdot 8!} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 11 \cdot 5 \cdot 9 = 495. \end{aligned}$$

Seega

$$1 - \frac{3 \cdot \left(C_8^4 - 1\right)}{C_{12}^4} = 1 - \frac{3 \cdot 69}{495} = 1 - \frac{23}{55} = \frac{32}{55},$$

mis on ka otsitav tõenäosus.

Märkus. Kirjutis $n!$ tähistab kõigi positiivsete täisarvude $1, 2, \ldots, n$ korrutist.

Lahendus 3. Nagu eelnevates lahendustes, märkame, et neli kiireimat jooksjat pääsevad finaali parajasti siis, kui ühes grupis on kaks kiireimaist neljast ning ülejäänud kahes grupis kummaski üks.

Uurime, mis on tõenäosus, et neli kiireimat jooksjat järjest gruppidesse paigutades selline jaotus tekib (vastav paigutamine kõigi jooksjate puhul annaks parajasti võrdtõenäolised jagunemised, aga lahenduses ei oma tähtsust, mis viimase kaheksa võistleja paigutus on). Selleks uurime tõenäosust p_1, et kaks võistlejat paigutatakse samasse rühma ning seejärel ülejäänud kaks võistlejat erinevatesse rühmadesse.

Tõenäosus, et teine võistleja satub esimesega samasse rühma, on allesjäänud kohtade põhjal $\frac{3}{11}$; kolmas erinevasse rühma $\frac{8}{10}$ ning neljas eelnevatest erinevasse rühma $\frac{4}{9}$. Kokku saame tõenäosuseks

$$p_1 = \frac{3}{11} \cdot \frac{8}{10} \cdot \frac{4}{9} = \frac{16}{55 \cdot 3}.$$

Kuna iga võistlejate jaotus on võrdvõimalik, pole jaotuste määramisel vahet, mis järjekorras me võistlejaid rühmadesse määrame, samuti pole me p_1 arvutamisel nelja kiireimat nende kiiruse järgi eristanud. Seega saame väita, et tõenäosus, et mingid kindlad kaks neljast kiireimast on samas rühmas ja ülejäänud kaks eraldi, on p_1. Selliseid juhte on parajasti C_4^2 ehk 6 ning need on eeltoodu põhjal parajasti kõik juhud, mil kõik neli kiireimat finaali pääsevad. Et need juhud on ka üksteist välistavad, on tahetud tõenäosus lihtsalt $p = 6p_1 = \dfrac{32}{55}$.

Eesti 72. matemaatikaolümpiaad

29. jaanuar 2025 Piirkonnavoor **Üldjuhend**

Lp hindaja!

Käesolevas esitame kõigepealt hindamise üldised põhimõtted ning seejärel järjekorras konkreetsed hindamisjuhised iga ülesande kohta eraldi.

1. Õpilase lahenduseks tuleb esmajoones lugeda see, mida õpilane on ülesande kohta vormistanud puhtandina (sh mustandipaberile selgesti arusaadavalt kirja pandud mõttekäigud, kui need on ametlikult puhtandipaberilt viidatud). Töö mustandi arvestamine või mittearvestamine ülesande lahenduse hulka on hindaja otsustada (või piirkonna hindamiskomisjoni ühine otsus kõigi ülesannete suhtes), kuid see peab toimuma kõigis töödes ühtmoodi.

2. Alljärgnevas on 7.–9. klassi olümpiaadi I osa (testi) ning kõikide ülejäänud üle sannete hindamisjuhised esitatud erinevalt.

   Testi iga küsimuse jaoks on eraldi loetletud või kirjeldatud vastused, mille eest tuleks anda vastavalt kaks punkti või üks punkt (st vastavaid punkte ühe küsimuse piires *ei tule* liita). Testiülesannete lahendusi õpilased ei pea esitama, vaid kirjutavad ülesannete lehel vastavale punktiirile või ülesande tekstis viidatud kohta ainult vastuse.

   Seevastu kõigi teiste ülesannete kohta tuleb esitada täielikud lahendused, ainult vastustest ei piisa. Nende ülesannete lahendused on hindamisjuhistes jaotatud võimalust mööda osadeks (etappideks) ning on näidatud iga osa eest antav punktide arv (st ühe ülesande eest antava punktisumma saamiseks *tuleb* lahenduse erinevate osade eest antud punktid liita).

   Mõnes skeemis on mõne etapi kirjelduse all („*Sealhulgas:*“ järel) alapunktidena välja toodud konkreetse etapi väiksemate osade eest antavad punktid – need lähevad käiku juhul, kui lahenduse see etapp on ebatäielik või vigane ja selle osa täispunkte seetõttu ei saa anda. Alamosade punktid tuleb omavahel samuti liita.

3. Žürii lahendustes ja käesolevates hindamisjuhistes on ülesannete vastused esitatud enamasti ainult ühel, lihtsaimal või kõige tõenäolisemalt esineval kujul. Hindamisel (sh testid!) tuleb võrdselt õigeks lugeda ka sama vastuse teised mõistlikud esitusviisid – sh taandatud hariliku murruna, segaarvuna, kümnendmurruna, sõnadega välja kirjutatuna –, seejuures ka osana pikemalt (nt täislausega, koos sobiva liigisõnaga või koos selgitustega) antud

vastusest. Juhud, kus ülesande sisu tingib erandeid sellest üldreeglist, on eraldi mainitud vastava ülesande hindamisjuhises.

Ühik arvu järel on vastuses vajalik juhul, kui ülesandes on küsitud suurust, mis teatud ühikutes avaldub. Näiteks küsimusele „Kui suur pindala …?“ saab õige vastus olla „120 cm^2“, kuid mitte „120“ (kui ülesande tekstis pole kasutatud ühikuta pikkusi/pindalasid). Teistes ühikutes väljendatud sama suurus tuleb lugeda õigeks, näiteks vastused „120 cm^2“ ja „1,2 dm^2“ on samaväärsed. Ühik vastuses ei ole nõutav, kui ülesandes on küsitud kindlate ühikute arvu. Näiteks küsimusele „Mitu ruutsentimeetrit …?“ antud vastused „120“ ja „120 cm^2“ tuleb võrdväärseks lugeda samal alusel nagu küsimusele „Mitu karu …?“ antud vastused „3“ ja „3 karu“ (vastus koos liigisõnaga). Teistes ühikutes antud vastus tuleb aga lugeda valeks, vastused „120 cm^2“ ja „1,2 dm^2“ ei ole siin samaväärsed.

4. Mõnede ülesannete kohta, mida saab lahendada mitmel oluliselt erineval viisil, anname eraldi hindamisskeemid erinevate lahendusviiside jaoks. Rõhutame, et iga konkreetset mittetäielikku lahendust tuleb hinnata ainult *ühe* sellise skeemi järgi (selle järgi, mille kohaselt ta saaks kõige rohkem punkte).

5. Enamiku ülesannete korral (v.a testid ja tõestusülesanded) on hindamisjuhiste lõpus eraldi näidatud, mitu punkti anda ainult õige vastuse eest. See hinne on mõeldud juhuks, kui töös on ülesande kohta toodud ainult õige vastus või õige vastus koos mõttekäiguga, mis ei annaks skeemi järgi rohkem punkte kui on ette nähtud õige vastuse eest.

6. Kahtlemata esineb õpilaste töödes ka mõttekäike, mis ei mahu meie poolt pakutud skeemidesse. Selliste lahenduste hindamisel tuleb lähtuda sellest, *kui suur osa* antud ülesandest on õpilasel lahendatud, kasutades lahenduse üksikute osade kaalu määramisel võimaluse korral võrdluseks punktide jaotust meie pakutud hindamisskeemides.

7. *Mistahes* täieliku ja matemaatiliselt korrektse lahenduse eest tuleb igal juhul anda maksimumpunktid, sõltumata selle lahenduse pikkusest või otstarbekusest võrreldes teiste lahendusviisidega.

Eesti 72. matemaatikaolümpiaad

29. jaanuar 2025 | Piirkonnavoor | **7. klass**

I osa hindamisjuhised

1.
   - Antud õige vastus 22: 2 p
   - Antud õige vastus taandamata murruna (nt $\frac{462}{21}$): 0 p
2.
   - Antud õige vastus 33: 2 p
3.
   - Antud õige vastus 23 a: 2 p
   - Antud vastuseks 23 ilma ühikuta: 1 p
4.
   - Antud õige vastus 7: 2 p
5.
   - Antud õige vastus 225 cm^2: 2 p
   - Antud vastuseks 225 ilma ühikuta või vale ühikuga: 1 p
6.
   - Antud õige vastus 20°: 2 p
   - Antud vastuseks 20 ilma kraadimärgita: 1 p
7.
   - Antud õige vastus 9,5 cm: 2 p
   - Antud vastuseks 9,5 ilma ühikuta või vale ühikuga: 1 p

Eesti 72. matemaatikaolümpiaad

29. jaanuar 2025 | Piirkonnavoor | **8. klass**

I osa hindamisjuhised

1.
- Antud õige vastus 2: 2 p
- Antud õige vastus taandamata murruna (nt $\frac{20160}{10080}$): 0 p

2.
- Antud õige vastus 26: 2 p

3.
- Antud õige vastus 24 a: 2 p
- Antud vastuseks 24 ilma ühikuta: 1 p

4.
- Antud õige vastus 19: 2 p

5.
- Antud õige vastus 161 cm^2: 2 p
- Antud vastuseks 161 ilma ühikuta või vale ühikuga: 1 p

6.
- Antud õige vastus 80°: 2 p
- Antud vastuseks 80 ilma kraadimärgita: 1 p

7.
- Antud õige vastus 40,5 cm: 2 p
- Antud vastuseks 40,5 ilma ühikuta või vale ühikuga: 1 p

Eesti 72. matemaatikaolümpiaad

29. jaanuar 2025 Piirkonnavoor **9. klass**

I osa hindamisjuhised

1.
- Antud õige vastus 20: 2 p
- Antud õige vastus taandamata murruna: 0 p

2.
- Antud õige vastus 2: 2 p

3.
- Antud õige vastus 30 a: 2 p
- Antud vastuseks 30 ilma ühikuta: 1 p

4.
- Antud õige vastus 28: 2 p

5.
- Antud õige vastus 100°: 2 p
- Antud vastuseks 100 ilma kraadimärgita: 1 p

6.
- Antud õige vastus 54° (või $\frac{3}{10}\pi$): 2 p
- Antud vastuseks 54 ilma kraadimärgita: 1 p

7.
- Antud õige vastus 417 mm: 2 p
- Antud vastuseks 417 ilma ühikuta või vale ühikuga: 1 p

II osa hindamisjuhised

1.
- Põhjendatud, et kollaste kommide arv on $\frac{1}{6}x$ (kus x on kommide koguarv): 1 p
- Järeldatud, et punaste ja kollaste kommide koguarv (või siniste ja roheliste kommide koguarv) on $\frac{1}{2}x$: 1 p
- Lahendus lõpule viidud: 5 p

  Sealhulgas žürii lahendusega sarnase lähenemise korral:
  - Põhjendatud, et rohelisi komme on $\frac{1}{3}x - 60$: *1 p*
  - Põhjendatud, et siniseid komme on $\frac{1}{2}x - 90$: *1 p*
  - Põhjendatud, et rohelisi komme on 90: *1 p*
  - Nende andmete põhjal leitud kommide koguarv 450: *2 p*

Kui õpilase lahendus ei järgi ametlikku lahendust, vaid leiab (mistahes ammendavalt põhjendatud viisil) igat värvi kommide arvud ja seejärel nende arvude summa, siis anda skeemi kolmandas reas ette nähtud 5 punktist kokku 4 punkti igat värvi kommide arvude leidmise eest ja 1 punkt summa korrektse leidmise eest. Seejuures ei pruugi jaotada 4 punkti võrdselt värvide vahel (á 1 punkt), vaid sarnase mõistliku töömahuga osade vahel, millest mõnes võidakse leida mitut värvi kommide arvud ja mõnes ainult kasulikke seoseid.

Ainult õige vastuse (450) eest ilma selgitusteta anda 2 punkti.

2.
- Leitud suurim imeilus arv 99996 (jääkide abil nagu žürii lahenduses või süstemaatilise läbivaatusega): 2 p
- Järeldatud, et otsitav arv pole suurem arvust 98996: 2 p
- Näidatud, et 98990 on suurim imeilus arv, mis pole suurem arvust 98996 (jääkide abil nagu žürii lahenduses või süstemaatilise läbivaatusega): 2 p
- Põhjendatud, et see arv ongi otsitav: 1 p

Ainult õige vastuse (98990) eest ilma selgitusteta anda 2 punkti.

3.
- Leitud valgete ühikruutude arv 24: 1 p
- Põhjendatud, et väljalõigatavas kujundis ei saa olla 24 valget ühikruutu: 2 p

- Toodud näide väljalõikamiseks sobivast kujundist, milles on 11 musta ja 22 valget ühikruutu: 3 p

  Sealhulgas:
  - Väidetud sellise kujundi leidumist ilma põhjendamata: *1 p*
- Järeldatud, et suurima väljalõikamiseks sobiva kujundi pindala on 33: 1 p

Ainult õige vastuse (33) eest ilma selgitusteta anda 2 punkti.

4. Anname kaks eraldi skeemi erinevate lahenduste hindamiseks.

Skeem selliste lahenduste jaoks, mille algusjärgus leitakse tabeli mõlemat rida korraga kattev periood (žürii lahendus 1):

- Märgitud, et teise rea arvude viimane number (või jääk jagamisel arvuga 10) kordub iga 10 veeru järel: 2 p
- Põhjendatud, et veeru arvude summa viimane number (või jääk jagamisel arvuga 10) kordub iga 20 veeru järel: 2 p
- Näidatud, et 20 järjestikuse veeru seas leidub täpselt 1 selline, kus arvude summa viimane number (või jääk jagamisel arvuga 10) on 0: 1 p
- Leitud, et esimese (või viimase) 2020 veeru seas leidub 101 sellist, kus arvude summa viimane number (või jääk jagamisel arvuga 10) on 0: 1 p
- Põhjendatud, et see on ka kogu tabeli selliste veergude arv: 1 p

Kui õpilane on kasutanud tsüklit, mille pikkus on suurem kui 20 (see peab siis olema arvu 20 kordne), siis hinnata õpilase kasutatud tsükli pikkusele kohandatud sarnase skeemi järgi.

Skeem selliste lahenduste jaoks, kus veerud jaotatakse rühmadesse 4*-kaupa (žürii lahendus 2):*

- Jaotatud veerud 4-kaupa rühmadesse ja põhjendatud, et ühegi rühma esimese kolme veeru arvude summad ei jagu arvuga 10: 3 p

  Sealhulgas:
  - Põhjendatud, et iga rühma esimese kolme veeru arvude summad on paaritud: *2 p*
- Leitud, et rühmades järjekorranumbriga 2, 7, 12, . . . esineb veerg, milles olevate arvude summa jagub arvuga 10, ja teistes mitte: 2 p
- Saadud, et esimese 2020 (või 2024) veeru seas leidub 101 veergu, milles olevate arvude summa jagub arvuga 10: 1 p
- Põhjendatud, et see on ka kogu tabeli selliste veergude arv: 1 p

Kui veerud on jaotatud 4-kaupa rühmadesse, aga mingeid kasulikke samme ei järgne, siis anda skeemi esimese rea järgi 0 punkti.

Ainult õige vastuse (101) eest ilma selgitusteta anda 2 punkti.

II osa hindamisjuhised

1. Anname kaks eraldi skeemi erinevate lahenduste hindamiseks.

   Skeem lahendusele, mis leiab kõik numbrid, millega kasutatud tähed asendatakse (žürii lahendus 1):

   - Põhjendatud, et $G = 9$ ja $B = 1$ (sh välistatud võimalus, et $G = 8$ ja $E = 0$): 2 p
   - Põhjendatud, et $F = 4$ ja $I = 2$ (sh välistatud võimalus, et $F = 2$ ja $I = 4$): 1 p
   - Järeldatud, et $C = 8$: 1 p
   - Põhjendatud, et $E = 5$ (sh välistatud kõik muud võimalused): 2 p
   - Leitud $A = 3$, $D = 6$ ja $H = 7$ ning järeldatud, et 0 jääb kasutamata: 1 p

   Skeem lahendusele, mis välistab kõigi numbrite võrdumise nulliga (žürii lahendus 2):

   - Välistatud võimalused $A = 0$, $D = 0$, $G = 0$: 1 p
   - Välistatud võimalused $F = 0$, $I = 0$: 1 p
   - Välistatud võimalus $C = 0$: 1 p
   - Välistatud võimalus $B = 0$: 1 p
   - Välistatud võimalus $E = 0$: 1 p
   - Välistatud võimalus $H = 0$: 1 p
   - Järeldatud, et 0 jääb kasutamata: 1 p

   Ainult õige vastuse (0) eest ilma selgitusteta anda 2 punkti.

2. - Leitud, et tunni jooksul muutub nurk tunni- ja minutiosuti vahel $330°$ võrra (või leitud nurga muutus mõne muu ajaühiku jooksul): 1 p
   - Põhjendatud, et kui kell näitab 8:25, siis tunni- ja minutiosuti vaheline nurk on $102{,}5°$: 2 p
   - Saadud aru, et kuni otsitava ajani nurk muutub $2 \cdot 102{,}5°$ ja veel $15°$ võrra: 2 p
   - Leitud, et praegusest ajast otsitava ajani kulub 40 minutit (või $\frac{2}{3}$ tundi): 1 p
   - Leitud küsitud kellaaeg 9:05: 1 p

   Ainult õige vastuse (9:05) eest ilma selgitusteta anda 2 punkti.

3.
- Esitatud 20 järjestikust naturaalarvu ühe muutuja kaudu (nt $n, n+1, \ldots, n+19$): 1 p
- Avaldatud nende arvude summa (nt $20n + 190$): 1 p
- Esitatud väljajäetav arv kujul $n + x$, kus x on uus muutuja, ja lahutatud see arv summast: 1 p
- Saadud võrrand, mis korrektselt väljendab eeldust, et järelejäänud arvude summa on 2025, ja see lihtsustatud: 1 p
- Leitud $1835 = 96 \cdot 19 + 11$: 1 p
- Järeldatud, et $x = 8$ ja $n = 97$: 1 p
- Leitud kustutatud arv 105: 1 p

Ainult õige vastuse (105) eest ilma selgitusteta anda 2 punkti.

4.
- Korrektselt avaldatud nurkade BCE, DCE, CDE, ADE ja üks nurkadest BCD ja DAB mingi ühe ja sama nurga kaudu: 1 p
- Koostatud lineaarvõrrand, millest saab selle nurga avaldada: 1 p
- Võrrand lahendatud: 1 p
- Põhjendatud, et kolmnurk ADE on võrdhaarne tipunurgaga E juures: 1 p
- Järeldatud, et F on külje AD keskpunkt: 1 p
- Põhjendatud, et kolmnurga CDF pindala on $12\ \mathrm{cm}^2$: 2 p

Ainult õige vastuse ($12\ \mathrm{cm}^2$) eest ilma selgitusteta anda 2 punkti, ühiku puudumise või vale ühiku korral anda 1 punkt.

Eesti 72. matemaatikaolümpiaad

29. jaanuar 2025 Piirkonnavoor **9. klass**

II osa hindamisjuhised

1.
- Üheselt mõistetavalt esitatud moodus panna antud 2024-kohalise arvu numbrite vahele võrdusmärk ja plussid vastavalt ülesande tingimustele: 3 p
- Üheselt mõistetavalt esitatud moodus panna antud 2025-kohalise arvu numbrite vahele võrdusmärk ja plussid vastavalt ülesande tingimustele: 4 p

Ainult mõlema osa õige vastuse (jah, jah) eest ilma selgitusteta anda 0 punkti.

2. Anname kaks erinevat skeemi erinevate lähenemistega tööde hindamiseks.

Skeem lahendustele ruutvõrrandi abil (žürii lahendus 1):

- Idee vaadelda antud seost ruutvõrrandina n suhtes: 2 p
- Kirjutatud välja selle ruutvõrrandi lahendid üldkujul (kas üldise või taandatud ruutvõrrandi lahendivalemi põhjal): 1 p
- Märgatud, et n täisarvulisuseks peab $10 - m^2$ olema täisarvu ruut: 2 p
- Sellest lähtuvalt leitud antud võrrandi kõik lahendid: 2 p

  Sealhulgas:
  - Leitud kas kõik võimalikud m väärtused või ühe m väärtuse korral kõik võimalikud n väärtused: *1 p*

Skeem juhtude läbivaatuse kaudu (žürii lahendus 2):

- Arvutatud välja vasaku poole väärtus $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$ jaoks: 2 p

  Sealhulgas:
  - Arvutatud välja neist väärtustest rohkem kui pooled: *1 p*
- Leitud kõik lahendid: 1 p
- Ammendavalt põhjendatud, et juhul $n > 6$ on vasaku poole väärtus negatiivne: 3 p

  Sealhulgas:
  - Teisendatud vasak pool kujule, mis hõlbustab negatiivsuse põhjendamist (nt $1 - n(n - 6)$): *1 p*
- Mainitud, et ruut ei saa olla negatiivne, millest järeldatud, et rohkem lahendeid pole: 1 p

Ainult täieliku õige vastuse ($(0,1)$, $(2,3)$, $(4,3)$, $(6,1)$ suvalises järjestuses) eest ilma selgitusteta anda 1 punkt. Kui vastuses on mõni õige lahend puudu või mõni vale lahend lisaks, siis anda 0 punkti.

3.
- Näidatud, et juht, kus kolmnurga $A'B'C'$ ükski nurk pole võrdne kolmnurga ABC vastava nurgaga, pole võimalik: 2 p
- Näidatud, et juht, kus täpselt üks kolmnurga $A'B'C'$ nurk on võrdne kolmnurga ABC vastava nurgaga, pole võimalik: 3 p
- Põhjendatud sarnasustunnusele viidates, et ülejäänud juhtudel on kolmnurgad ABC ja $A'B'C'$ sarnased: 2 p

  Sealhulgas:
  - Esitatud see väide ilma sarnasustunnusele viitamata: *1 p*

Ainult õige vastuse (jah) eest ilma selgitusteta anda 0 punkti.

4.
- Väidetud, et kui Anna asendab avakäigul mõne numbri 5 numbriga 0, siis ta võidab: 1 p
- Märgitud, et pärast Anna sellist avakäiku on kõiki nullist erinevaid numbreid paarisarv: 2 p

  Sealhulgas:
  - Esitatud idee vaadelda nullist erinevate numbrite arvude paarsust või seda ideed kasutatud: *1 p*
- Kirjeldatud Anna strateegia kopeerida Berdi viimast käiku: 2 p
- Märgitud, et pärast igat sellist käiku on jälle kõiki nullist erinevaid numbreid paarisarv: 1 p
- Järeldatud, et käigupuudusse jääb Bert: 1 p

Ainult õige vastuse (Anna) eest ilma selgitusteta anda 0 punkti.

Kasutatud hindamisskeemid ja kontrollijate kommentaarid

1. *(Ehtel Timak)*

Lahenduse allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Õigesti viidud kordajad juuremärgi alla või tõstetud võrreldavad arvud ruutu: 3 p
- Tulemustest järeldatud antud arvude õige suurusjärjestus: 4 p

Skeemi esimese rea alusel anti iga antud arvu käsitlemise eest 1 punkt.

Ainult täieliku õige vastuse ($11\sqrt{2} < 9\sqrt{3} < 7\sqrt{5}$ või arvud samas järjestuses ilma võrratusmärkideta) eest ilma selgitusteta anti 2 punkti. Kui arvud olid järjestatud vastupidiselt, aga võrratusmärgid nende vahel olid õiged (ehk siis $7\sqrt{5} > 9\sqrt{3} > 11\sqrt{2}$), siis selle eest punkte maha ei võetud, võrratusmärkide puudumisel karistati seda 1 punkti mahavõtmisega. Ka ligikaudsete arvudega lahendused said punkte vaid õige vastuse eest.

2. *(Helli Juurma)*

Lahenduse allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Põhjendatud (kas Viète'i valemite põhjal või ruutvõrrandi lahendivalemi kaudu), et lahendite korrutis avaldub kujul $\frac{c}{a}$: 2 p
- Saadud seos $\frac{c}{a} = 3$ või midagi ilmselgelt samaväärset: 1 p
- Järeldatud, et $c \neq 0$: 1 p
- Järeldatud, et ruutliikme kordaja ja vabaliikme vahetamisel tekkival võrrandil on kaks lahendit: 1 p
- Avaldatud uue võrrandi lahendite korrutis kordajate kaudu (nt kujul $\frac{a}{c}$): 1 p
- Eelneva põhjal saadud õige vastus $\frac{1}{3}$: 1 p

Ainult õige vastuse ($\frac{1}{3}$) eest ilma selgitusteta anti 1 punkt.

3. *(Vahur Paist)*

Lahenduse allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Võrduse vasak pool viidud kujule $(x + 4)(y + 1)(z + 17) - 68$: 4 p

- Võrdusest $(x+4)(y+1)(z+17) = 2093$ järeldatud, et $x+4$, $y+1$, $z+17$ on arvud 7, 13, 23 mingis järjestuses, ning jõutud õige lahendihulgani: 3 p

Lahendused, mis piirdusid $x+4$, $y+1$ või $z+17$ sulgude ette võtmisega, said enamasti 2 punkti. Lahendused, mis piirdusid x, y või z sulgude ette võtmisega, said enamasti 1 punkti.

Ainult õige vastuse eest ilma selgitusteta anti 0 punkti.

4. *(Martin Rahe)*

Erinevate lähenemiste hindamiseks kasutati kolme erinevat skeemi.

Žürii lahendusega 1 sarnaste mõttekäikude allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Saadud ülesande tingimustest kolm võrratust: 2 p
- Tuletatud korrektne võrratus saabaste hinnatõusueelse hinna alampiiri jaoks: 1 p
- Leitud alampiiri võrdusjuht: 1 p
- Tuletatud korrektne võrratus saabaste hinnatõusueelse hinna ülempiiri jaoks: 1 p
- Leitud ülempiiri võrdusjuht: 1 p
- Saadud õiged vastused: 1 p

Žürii lahendusega 2 sarnaste mõttekäikude allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti (skeemis on kasutatud žürii lahenduse tähistusi).

- Avaldatud s läbi a, b, c: 2 p
- Järeldatud, et s kahaneb c kasvades (või s kasvab c kahanedes): 1 p
- Järeldatud, et s kahaneb a kasvades (või s kasvab a kahanedes): 1 p
- Järeldatud, et s kasvab b kasvades: 2 p

  Sealhulgas:
  - Väidetud ilma põhjenduseta, et s kasvab b kasvades: *1 p*
- Saadud õiged vastused: 1 p

Žürii lahendusega 3 sarnaste mõttekäikude allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Põhjendatud, et madalaima võimaliku saabaste alghinna korral peab saabaste hind tõusma maksimaalselt ja jope oma minimaalselt, andes tulemuseks maksimaalse hinnavahe: 3 p

  Sealhulgas:
  - Leitud alampiiri konstruktsioon ilma põhjendusteta: *1 p*
- Põhjendatud, et kõrgeima võimaliku saabaste alghinna korral peab saabaste hind tõusma minimaalselt ja jope oma maksimaalselt, andes tulemuseks minimaalse hinnavahe: 3 p

  Sealhulgas:

    - Leitud ülempiiri konstruktsioon ilma põhjendusteta: *1 p*
- Saadud õiged vastused: 1 p

Ainult täieliku õige vastuse eest (nii alam- kui ka ülempiir õige) ilma selgitusteta anti 1 punkt. Lahenduste 1 ja 3 skeemid näevad ette ka 1 punkti nii alam- kui ülempiirile vastava konstruktsiooni eest (õiged hinnatõusude väärtused ja hindade vahe). Kui ka need olid välja toodud, võis ilma muude põhjendusteta saada kuni 3 punkti, näiteks leidus töid, kus vaadati läbi kõik 8 piirjuhtu, aga polnud seletatud, miks mõni muu väärtus lubatud vahemikus ei anna paremat tulemust.

5. *(Kirill Tselovalnikov)*

Kahe erineva lähenemise hindamiseks kasutati kahte erinevat skeemi.

Žürii lahendusega 1 sarnaste tööde allpool märgitud osade eest antud punktid liideti.

- Näidatud, et kaarte keskpunktid on ringjoonte keskpunktid: 3 p

  Sealhulgas:
    - Märgatud, et lühem kaar on pikema täiendi peegeldus või midagi analoogset: *1 p*
    - Põhjendatud, et lühema kaare keskpunkt ning kaarte lõikepunktid määravad võrdkülgsed kolmnurgad või midagi analoogset: *1 p*
- Kujundi pindala leidmine taandatud võrdkülgsete kolmnurkade pindalade arvutamisele: 3 p

  Sealhulgas:
    - Leitud kujund õigesti jaotatud võrdkülgseteks kolmnurkadeks: *2 p*
    - Ammendavalt põhjendatud, et antud jaotamine annab kujundi pindala: *1 p*
- Kujundi pindala õigesti leitud: 1 p

Skeemi teise rea järgi anti 1 punkt, kui lahenduses esines idee kujund kolmnurkadeks jaotada.

Žürii lahendusega 2 sarnaste tööde allpool märgitud osade eest antud punktid liideti.

- Näidatud, et kaarte keskpunktid on ringjoonte keskpunktid: 3 p

  Sealhulgas:
    - Märgatud, et lühem kaar on pikema täiendi peegeldus või midagi analoogset: *1 p*
    - Põhjendatud, et lühema kaare keskpunkt ning kaarte lõikepunktid määravad võrdkülgsed kolmnurgad või midagi analoogset: *1 p*

- Kujundi pindala leidmine taandatud ovaalide pindala leidmisele: 2 p

  Sealhulgas:
  - Põhjendatud, et kolm ovaalikujulist ala on sama pindalaga: *1 p*
  - Järeldatud, et kujundi pindala on võrdne avaldisega $2\pi - 3S$, kus S on ühe ovaali pindala: *1 p*
- Kujundi pindala õigesti leitud: 2 p

  Sealhulgas:
  - Saadud õige algoritm ovaali pindala leidmiseks: *1 p*

Ainult õige vastuse eest ilma seletuseta punkte ei antud. Mõlema skeemi esimese rea eest anti 1 punkt, kui vastav väide oli lahenduses selgelt sõnastatud.

Mõned õpilased lahendasid ülesannet väga sarnaselt žürii lahendusega 2, jaotades ovaali kaheks võrdkülgseks kolmnurgaks ning ülejäänud võrdseks neljaks jupiks. Seejärel leiti ühe jupi pindala ning nende kaudu oli kujundi pindala leitud. Sellised lahendused hinnati skeemi 2 abil.

Ülesanne osutus oodatult raskeks. Kuigi ülesande arvutusliku osaga said paljud õpilased ilusasti hakkama, ei pööranud enamus lahendajatest tähelepanu oma väidete põhjendamisele. Vaid üksikud õpilased said aru, et lahenduses väga suurt rolli mängiv asjaolu, et lühemate kaarte keskpunktid osutuvad vastavate ringjoonte keskpunktideks, tuleb ära põhjendada ning ainult üks õpilane jõudis sellele lähemale. Enamus õpilastest aga, vaadates joonist, eeldas selle väite kehtivust kohe oma lahenduse alguses ning need, kes siiski üritasid seda väidet põhjendada, mingil oma tõestuse sammul oletasid, et see väide kehtib.

Isegi, kui joonisel paistab, et mingi väide ilmselgelt kehtib, tuleb see alati ka korrektselt ära põhjendada. Kuigi sel juhul intuitiivne väide osutus õigeks, ei pruugi see kindlasti alati nii juhtuda.

6. *(Toomas Tennisberg)*

Punkte anti vastavalt sellele all toodud skeemile, mis andis kõige rohkem punkte. Skeemi rakendamisel temas märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

Skeem lahendusele, mis kasutab fakti, et ridade ja veergude vahel on arvude suhted võrded (žürii lahendus 1):

- Märgitud, et ühes 2×2 ruudus on reas või veerus olevate arvude suhted võrdsed: 1 p
- Järeldatud, et kahe rea või veeru vahel on naaberruutude suhted võrdsed: 4 p
- Lahendus lõpuni viidud: 2 p

Skeem lahendusele, mis avaldab kogu ruudustiku üldistatud kujul:

- Leitud näide, mis vastab ülesande tingimustele: 1 p
- Näide avaldatud kujul, kus vähemalt ühes uuritavas nurgaruudus on kasutatud tundmatu või tundmatutest avaldatud väärtus: 3 p
- Näide avaldatud kujul, kus kõik ruudud on vabalt valitud tundmatud või avaldatud teadaolevate ruutude ning valitud tundmatute kaudu: 3 p

Skeem lahendusele, mis leiab, et 5×5 *ruudus on vastasnurkade korrutised alati võrdsed:*

- Põhjendatud, et kui 2×2 ruudus on vastasnurkade korrutised võrdsed, siis on ka 3×3 ruudus vastasnurkade korrutised võrdsed: 4 p
- Põhjendatud, et kui 3×3 ruudus on vastasnurkade korrutised võrdsed, siis on ka 5×5 ruudus vastasnurkade korrutised võrdsed: 2 p
- Lahendus lõpuni viidud: 1 p

Ainult õige vastuse (2025) eest ilma selgitusteta anti 0 punkti.

Ülesanne osutus võrdlemisi raskeks, kuid paigutus komplekti lõpus võis mõjutada, kui palju aega jõuti sellele pühendada. Enamik lahendusi kasutasid meetodeid, mis ei vastanud žürii ametlikele lahendustele. Enim levinud oli tundmatute paigutamine ülejäänud 23 ruudu hulka ning siis nende omavaheliste suhete tuletamine. Kui selline lahendus tõepoolest täitis ruudud nii, et iga ruut on kas vabalt valitud või ülesannete tingimuste tõttu sunnitud väärtusega, sai see 7 punkti.

Esines ka lahendusi, mis näitasid või üritasid näidata, et kuna 2×2 ruudus on vastasnurkades olevate arvude korrutised võrdsed, on ka kogu 5×5 ruudus vastasnurkades olevate arvude korrutised võrdsed. Iseenesest on need sarnased žürii lahendusele 1, millest järeldub, et mistahes $a \times b$ ristkülikus on vastasnurkades olevate arvude korrutised võrdsed. Kuna üldine metoodika oli natuke erinev, said need lahendused eraldi skeemi.

Kasutatud hindamisskeemid ja kontrollijate kommentaarid

1. *(Ave Külter)*

Lahenduse allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Taandatud antud arvude võrdlemine selliste arvude võrdlemisele, kus esineb kokku vaid üks ruutjuur (näiteks antud arvude ruudud, kus teostatud lihtsustamine): 2 p
- Taandatud saadud arvude võrdlemine selliste arvude võrdlemisele, kus juuri ei esine: 2 p
- Teostatud õigesti ülejäänud arvutused: 2 p
- Tehtu põhjal esitatud õige vastus: 1 p

Skeemi ridadest 1–3 igaühe järgi anti 1 punkt, kui lahenduse vastavas osas esines mõni arvutusviga, kuid mõni vahetulemus oli ka õigesti leitud.

Ainult õige vastuse (esimene) eest ilma selgitusteta anti 0 punkti.

2. *(Andres Talts)*

Lahenduse allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Aru saadud, et mängulaua sobiva osa valimine on samaväärne kahe rea ja kahe veeru valimisega: 1 p
- Õigesti leitud kahe veeru (või kahe rea) valikuvõimaluste arv: 3 p
- Märgitud, et teise suuna valikuvõimaluste arv on sama: 1 p
- Järeldatud, et mängulaua sobiva osa valikuvõimaluste arv on selle arvu ruut: 2 p

Ainult õige vastuse (2025) eest ilma selgitusteta anti 1 punkt. Vastuse lihtsustamata jätmise eest (esitatud kujul $\left(C_{10}^{2}\right)^{2}$ või 45^{2} vms) punkte maha ei võetud.

3. *(Hendrik Vija)*

Erinevate lähenemiste hindamiseks kasutati kolme erinevat skeemi.

Žürii lahendusega 1 sarnaste mõttekäikude allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Saadud võrrand $100x + y = (x + y)^2$: 2 p

  Sealhulgas:

  - Saadud analoogne võrrand, kus arvu kõik numbrid on tundmatuteks: *1 p*

- Saadud võrrand $99x = (x + y)(x + y - 1)$: 2 p
- Vaadeldes jaguvusi 9-ga ja 11-ga, leitud võimalikud $x + y$ väärtused: 2 p
- Õige vastus: 1 p

Žürii lahendusega 2 sarnaste mõttekäikude allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Leitud, et arv, mille ruut on n, on vähemalt 32 ja maksimaalselt 99: 2 p
- Nende arvude ruudud korrektselt välja arvutatud: 4 p

  Sealhulgas karistused:
  - Üksikud vead: *-1 p*
  - Rohkem vigu: *-2 p*
- Õige vastus: 1 p

Žürii lahendusega 3 sarnaste mõttekäikude allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Saadud võrrand $100x + y = (x + y)^2$: 2 p
- Avaldatud x ruutvõrrandi lahendina y suhtes: 1 p
- Leitud, milliste y väärtuste korral on diskriminant täisruut ehk x täisarv: 3 p
- Õige vastus: 1 p

Ainult õige vastuse eest (2025 ja 3025) ilma põhjenduseta anti 1 punkt. Õigeks loeti ka arvu 9801 sisaldavad vastused ja lahendused.

Paljudes lahendustes kirjutati ülesande tekstis kirjutatud seos välja kujul $ABCD = (AB + CD)^2$. Niimoodi kirjutada pole õige, sest avaldised $ABCD$, AB, CD tähendavad korrutisi, mitte kümnendsüsteemis kirjutatud mitmekohalisi arve. Nendes lahendustes, kus seda viga ei tehtud, kirjutati ülesande tingimus kõige sagedamini välja kõiki numbreid muutujatena sisaldava võrrandina. See on samm õiges suunas, aga 4 muutujaga võrrandiga on raske midagi peale hakata. Nendes lahendustes, kus jõuti võrrandini $100x + y = (x + y)^2$, suudeti sageli ka jätkata täislahenduse suunas. Enamikus täislahendustes aga arvutati hoopis välja arvude 32 kuni 99 ruudud ning veenduti igaühe kohta, kas ülesande tingimused on rahuldatud. Sellistes lahendustes tekkis aga sageli palju arvutusvigu, mistõttu läks kergesti punkte kaduma.

4. *(Härmel Nestra)*

Selle ülesande erinevate lahenduste hindamiseks kasutati nelja erinevat skeemi. Iga skeemi kasutamisel temas märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

Skeem lahendusele asendusega esimesest võrrandist teise (analoogselt žürii lahendusega 1):

- Asenduse tulemusel saadud lihtne võrdus, mille üks pool on tegurdatud ja teine on 0 või on mõlemad pooled tegurdatud ja omavad mittetriviaalset ühist tegurit (nt $yz = 0$ või $y(x + y) = 0$ või $(x - z)^2 = (x - z)(x + z)$ või midagi ilmselgelt samaväärset): 4 p

  Sealhulgas:
  - Tehtud ühe muutuja asendus esimesest võrrandist teise: *1 p*
  - Asendamise tulemusena saadud võrduses avatud sulud: *1 p*
  - Koondatud sarnased liikmed: *1 p*
- Aru saadud, et tekib kaks juhtu (vastavalt sellele, kumb tegur on null, või sellele, kas avaldis, millega võrdus läbi jagatakse, on null või ei ole): 1 p
- Analüüsitud juht, mis taandub võrdusele $y = 0$: 1 p
- Analüüsitud juht, mis taandub võrdusele $z = 0$: 1 p

Skeem lahendusele asendusega esimesest võrrandist kolmandasse (analoogselt žürii lahendusega 2):

- Asenduse tulemusel saadud võrrand, mida on võimalik vaadelda ruutvõrrandina ühe muutuja suhtes (nt $3xy^2 + 3x^2y + 2x^3 = 0$ või $3xz^2 + 3x^2z + 2x^3 = 0$ või midagi ilmselgelt samaväärset): 3 p

  Sealhulgas:
  - Tehtud y või z asendus esimesest võrrandist kolmandasse: *1 p*
  - Avatud sulud summa (või vahe) kuubi valemi järgi: *1 p*
- Lahendus lõpule viidud: 4 p

  Sealhulgas:
  - Avaldatud võrrandi lahendid lahendivalemist või kirjutatud välja diskriminant: *1 p*

Kuna x asendamine esimesest võrrandist kolmandasse viib keerulisema võrrandini, siis selle eest eraldi punkti ei antud.

Skeem lahendusele asendusega esimesest võrrandist teise ja kolmandasse (analoogselt žürii lahendusega 3):

- Tehtud sama muutuja asendus esimesest võrrandist teise ja kolmandasse: 1 p
- Ühe asenduse tulemuses avatud sulud: 1 p
- Teise asenduse tulemuses avatud sulud: 1 p
- Saadud seosed kokku pandud ja näidatud, et igal juhul $x = 0$: 3 p

  Sealhulgas:
  - Saadud seoseid teisendatud viisil, mis toob neis esile sarnasused, mis aitavad edasist lahendust läbi viia: *1 p*
  - Näidatud $x = 0$ juhtudel, mis moodustavad ligikaudu poole kõigist võimalustest: *1 p*
- Analüüsitud juht $x = 0$: 1 p

Skeem lahendusele märkide analüüsi kaudu (analoogselt žürii lahendusega 4):

- ∘ Analüüsitud juht $x = 0$: 1 p
- ∘ Analüüsitud juht $y = 0$: 1 p
- ∘ Analüüsitud juht $z = 0$: 1 p
- ∘ Tõestatud, et juhul $x \neq 0$, $y \neq 0$, $z \neq 0$ lahendid puuduvad: 4 p

Skeemide 1–3 rakendamisel ei antud asenduse eest punkte, kui asenduse tulemus oli jäetud liiga keerulisele kujule, et seda sammu käsitleda lihtsustusena, nt kui tulemus sisaldas juuri.

Ainult täieliku õige vastuse ($x = y = z = 0$) eest ilma selgitusteta anti 1 punkt. Mustandeid selles ülesandes ei arvestatud.

Ülesanne osutus üsna lihtsaks ja enamus õpilastest sai vähemalt osalisi punkte. Väga palju esines aga ka elementaarseid vigu, mistõttu täispunkte saanud töid väga palju polnud. Üks tüüpviga oli muutujat sisaldava avaldisega läbijagamine ilma analüüsimata, mis juhtub siis, kui selle avaldise väärtus on null. Sageli mäletati valesti summa (või vahe) ruudu, summa (või vahe) kuubi, ruutude vahe ja kuupide summa (või vahe) valemeid; mõnel juhul tunnistas õpilane töös ise, et kahjuks neid valemeid ei mäleta. See ei peaks olümpiaadil küll olema takistuseks, et ülesandeid õigesti lahendada, sest niisugused valemid on kergesti tuletatavad. Paljudel juhtudel seda ka tehti, nt oli töödes märgata, et kui summa (või vahe) kuubi valemit ei mäletatud, siis tuletati see sulgude lahtikorrutamise teel kohapeal.

5. *(Kristjan-Erik Kahu)*

Lahenduse allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- ∘ Kirja pandud, et $k\alpha = (n - k)\beta$: 1 p
- ∘ Kirja pandud, et $k\alpha + (n - k)\beta = (n - 2) \cdot 180^\circ$: 1 p
- ∘ Antud üldine konstruktsioon paaritu n jaoks: 2 p

  Sealhulgas:
  - Antud konstruktsioon mõne spetsiifilise n korral: *1 p*
- ∘ Tõestatud, et n ei saa olla paaris: 3 p

6. *(Richard Luhtaru)*

Lahenduse allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- ∘ Tõestatud, et kahest püüdjast ei piisa: 3 p

  Sealhulgas:
  - Idee loendada põgeneja teede või liikumisvõimaluste arvu peatuses: *1 p*
- ∘ Tõestatud, et kolmest püüdjast piisab: 4 p

  Sealhulgas:

- Põhjendatud, et kui põgeneja on kahe püüdja vahel „kinni“, siis sõltumata kolmanda püüdja asukohast saab ta põgeneja alati kinni püüda: *2 p*

Õige vastuse eest ilma põhjenduseta sai 1 punkti. Kahe püüdja juht oli tihti tõestatud mitteformaalselt – näiteks vaadeldes ainult juhtu, kus põgeneja on kahe püüdja vahel ja üks püüdja liigub põgeneja poole ning vahetab põgenejaga kohad. Sellised põhjendused said reeglina skeemi esimese rea eest 2 punkti. Samuti põhjendasid paljud õpilased, et kuna nurkades on põgenejal neli võimalust liikuda, siis on vaja ka neli püüdjat (ning põhjendati, et kolm püüdjat saavad põgeneja peatusesse „kinni“ jätta ning neljas püüdja ta siis kinni püüda). Sellised lahendused aga eeldasid ekslikult, et kolm püüdjat ei saa sundida põgenejat peatusesse, kus käiguvõimalusi on vähem kui neli. Tüüpiliselt said sellised tööd 3 punkti.

Punkte ei antud strateegia eest rohkem kui kolme püüdja jaoks või tõestuse eest, et ühest püüdjast ei piisa. Samuti ei saanud punkte tööd, kus vaadeldi konkreetseid käike ilma juhte süsteemselt analüüsimata või üldiseid tähelepanekuid tõestamata.

Kasutatud hindamisskeemid ja kontrollijate kommentaarid

1. *(Urve Kangro)*

Erinevate lähenemiste hindamiseks kasutati kaht erinevat skeemi.

Žürii lahendusele 1 sarnase lähenemise puhul allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Laiendatud murde vastavate ruutjuurte vahedega: 4 p
- Pandud tähele, et vahepealsed liikmed summas koonduvad: 2 p
- Leitud lõppvastus 2: 1 p

Siin võis viimase rea eest ette nähtud punkti kaotada, kui lõppvastus oli esitatud lihtsustamata kujul, näiteks $\sqrt{9} - 1$.

Žürii lahendusele 2 sarnase lähenemise puhul allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Õigesti kokku liidetud esimesed kolm liidetavat: 2 p
- Tulemus lihtsustatud ja saadud 1: 1 p
- Õigesti kokku liidetud viimased viis liidetavat: 3 p
- *Sealhulgas:*
  - Õigesti kokku liidetud mingid kolm ja mingid kaks liidetavat: *1 p*
- Tulemus lihtsustatud ja saadud 1: 1 p

Lahendusele 2 sarnaselt ei olnud keegi lõpuni jõudnud, sest see on väga töömahukas. Üksikutes töödes oli siiski esimesed kolm liidetavat õigesti kokku liidetud.

Mitmetes töödes oli liidetud murde kokku kahekaupa. Kui seda oli tehtud õigesti, siis sai selle eest 1 punkti. Kui need kahekaupa summad olid veel omakorda kahekaupa õigesti kokku liidetud, siis sai selle eest 1 punkti lisaks. See lähenemine võib põhimõtteliselt lõpuks sihile viia, kuid on veelgi töömahukam kui lahendus 2.

Lihtsalt idee eest nimetajatest irratsionaalsus kaotada, kui see oli tehtud vigaselt, sai 1 punkti.

Kui millegi muu eest punkte ei saanud, siis õige vastuse eest sai 1 punkti.

Üllatavalt palju esines elementaarseid teisendusvigu nagu $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{a+b}$ või $\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{a+b}$. Mitmetes töödes püüti kasutada aritmeetilise jada summa valemit, aga siin pole ju tegu aritmeetilise jadaga.

2. *(Ülle Hüva)*

Lahenduse allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Pindala avaldis lihtsustatud kujule $S = \dfrac{ab\cos\gamma}{2}$ või ilmselgelt samaväärsele kujule: 2 p

  Sealhulgas:

  - Pindala avaldise lugejas rakendatud koosinusteoreemi: *1 p*
- Jõutud võrrandini $\cos\gamma = \sin\gamma$: 2 p
- Lahendatud võrrand $\cos\gamma = \sin\gamma$ ja saadud õige vastus: 3 p

Skeemi viimase rea järgi anti punktid ka võrrandi graafilise lahendamise eest, kui oli ammendavalt põhjendatud mõlemad järgnevad osad:

- miks $\gamma = 45^\circ$ on lahend (piisas tuua välja, et nii koosinuse kui ka siinuse väärtus on $\frac{\sqrt{2}}{2}$);
- miks rohkem lahendeid pole (seda pidi argumenteerima graafikute käitumise põhjal piirkonnas $0^\circ < \gamma < 180^\circ$, toetudes seejuures õpitud faktidele, mitte jooniselt silmaga välja loetavale; joonis ei olnud kohustuslik).

Ainult õige vastuse (45°) eest ilma selgitusteta anti 1 punkt.

3. *(Toomas Herodes)*

Lahenduse allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Juhu $a = 10$ analüüs: 1 p
- Juhu $a = 15$ analüüs: 2 p
- Juhu $a = 20$ analüüs: 2 p
- Juhu $a >= 25$ analüüs: 1 p
- Juhu $5 \mid d$ analüüs: 1 p

Ainult õige vastuse eest ilma selgitusteta anti 1 punkt.

4. *(Raul Kangro)*

Erinevate lähenemiste hindamiseks kasutati viit erinevat skeemi. Punktid anti selle skeemi järgi, mis andis suurima skoori.

Skeemi 1 allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Näidatud, et iga päev söödi 45 g šokolaadi: 1 p
- Järeldatud (ilma eelduseta, et järgi jääb väikseim), et esimesel kolmel päeval oli allesjäänud tüki mass 15 g: 2 p
- Näidatud, et keskmise suurusega tüki mass oli 20 g: 2 p
- Põhjendatud eelnevat kasutades, et suurima tüki mass oli 25 g: 2 p

Skeemi 2 allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Pandud kirja võrrandisüsteem jada ühe liikme ja vahe määramiseks eeldusel, et järgi jääb iga päev jada väikseim liige: 2 p
- Lahendatud süsteem, leitud suurima tüki mass: 2 p
- Tõestatud, et esimesel kolmel päeval ei saanud järgi jääda jada keskmine liige: 2 p
- Tõestatud, et esimesel kolmel päeval ei saanud järgi jääda jada suurim liige: 1 p

Viimase kahe osa eest ei antud punkte lihtsalt väidete eest stiilis, et keskmine või kolmas liige ei saanud järgi jääda, sest muidu jääb viimaseks päevaks liiga palju (või süüakse esimesel kolmel päeval liiga vähe, või kuna viimasel päeval söödi rohkem tükke kui esimesel kolmel päeval).

Skeemi 3 allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Näidatud, et iga päev söödi 45 g šokolaadi: 1 p
- Näidatud, et keskmise suurusega tüki mass oli 20 g: 2 p
- Tõestatud, et esimesel kolmel päeval järgi jäänud tükk ei saanud olla keskmine: 2 p
- Näidatud eelnevat kasutades, et teise esimesel kolmel päeval ärasöödud tüki mass oli 25 g: 1 p
- Põhjendatud, et 25 g on suurima tüki mass: 1 p

Skeemi 4 allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Näidatud, et iga päev söödi 45 g šokolaadi: 1 p
- Järeldatud, et esimesel kolmel päeval jäi söömata tükk massiga 15 g: 2 p
- Tõestatud, et tükk massiga 15 g ei saa olla keskmine: 2 p
- Põhjendatud, et tükk massiga 15 g ei saa olla suurim: 1 p
- Tuletatud võrrandite abil jada vahe ja suurima tüki mass juhul, kui tükk massiga 15 g oli väikseim: 1 p

Skeemi 5 allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Väidetud, et jada 15, 20, 25 vastab ülesande tingimustele ja seega suurima tüki mass on 25 g: 1 p
- Näidatud, et kõik tingimused on rahuldatud: 1 p
- Tõestatud, et ükski teine aritmeetiline jada ei saa vastata ülesande tingimustele: 5 p

Lihtsalt mingi hulga jadade läbiproovimine ei ole viimase punkti tõestuse osa, selle eest punkte juurde ei saadud.

Ainult õige vastuse (25 g) eest anti 1 punkt.

Päris palju oli õpilasi, kes arvasid, et kui nad leiavad mingi ülesande tingimustele vastava jada, siis on ülesanne täielikult lahendatud. Nii see siiski ei ole, sest täieliku lahenduse korral tuleb leida kõik võimalikud lahendused. Seega peab lahenduskäigust selguma, et rohkem võimalusi ei ole.

5. *(Artur Avameri)*

Lahenduse allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Pakutud vastuseks üks või mitu väärtust, mitte intervallvahemik: 0 p
- Näidatud, et üks kolmnurga külg on täpselt kaks korda pikem mingist teisest kolmnurga küljest: 0 p
- Aru saadud, et vastus on intervallvahemik ning üritatud seda intelligentselt määrata: 1 p
- Mainitud kolmnurgavõrratust ja/või üritatud seda kasutada: 1 p
- Näidatud üks kahest tingimusest $h_C > 2$ ja $h_C < 6$: 3 p
- Näidatud ka teine tingimustest $h_C > 2$ ja $h_C < 6$: 2 p

Pisivigade eest (näiteks intervalli $(2, 6)$ asemel antud intervall $[2, 6]$) võeti 1 punkt maha. Punkte ei võetud maha selle eest, et jäeti tõestamata (või mainimata), et kõik väärtused vahemikus $(2, 6)$ on tõepoolest saavutatavad, kuna selle formaalne tõestamine hõlmab kooliprogrammiväliseid pidevusargumente.

Levinud viga oli eeldada, et tegu on täisnurkse kolmnurgaga, mille kaatetite pikkusteks on 3 cm ja 6 cm. Lisaks pakuti vastuseks võrdhaarseid kolmnurki ehk seeläbi kõrguste pikkuseid 3 cm ja 6 cm: kui neid väärtuseid pakkunud lahendajad oleks teinud täpsemaid jooniseid, oleks nad võinud märgata, et kolmas kõrgus 6 cm ei ole tegelikult võimalik.

Ülesanne osutus sobivalt eristatavaks, kuna lahenduseni jõudmiseks oli vaja täheldada kahte lihtsat, kuid erinevat ideed: et vastuseks on intervallvahemik (ja mitte lõplik arv väärtuseid) ning et ülesandes saab rakendada kolmnurgavõrratust.

6. *(Marko Tsengov)*

Erinevate lähenemiste hindamiseks kasutati kaht erinevat skeemi.

Žürii lahendustega 1 ja 2 sarnaste lahenduste allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Märgitud ainus sobiv võimaluste klass nelja kiireima võistleja jaotumiseks gruppide vahel: 2 p
- Avaldatud sobivate võimaluste arv: 4 p

  Sealhulgas:
  - Loendatud kooskõlas tingimusega, et kõik *gruppidesse jagunemise* võimalused on võrdtõenäolised: *1 p*
- Avaldatud sobiv kõigi võimaluste arv: 1 p

Lahendusi, mis keskendusid ebasobivate juhtude eemaldamisele, hinnati analoogse skeemi järgi.

Žürii lahendusega 3 sarnaste lahenduste puhul märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Märgitud ainus sobiv võimaluste klass nelja kiireima võistleja jaotumiseks gruppide vahel: 2 p
- Avaldatud tahetud tõenäosus: 5 p

  Sealhulgas:
  - Avaldatud vähemalt ühe sobiva juhu tõenäosus: *1 p*

Ainult õige vastuse eest ilma põhjenduseta anti 1 punkt.

Ülesanne osutus oodatult üsna raskeks. Kõige sagedasem eksimiskoht oli eeldus, et tõenäosus, et kindel võistleja finaali pääseb, on kõigi võistlejate jaoks sama.

Samuti valmistas probleeme tingimus, et kõik gruppidesse jagunemise viisid on võrdtõenäolised: mitmetes töödes leiti küll õiged jagunemiste klassid, mida loendada, kuid juhte määrati nende jagunemiste põhjal, lugedes iga sellise jaotuse võrdvõimalikuks; kuna eri klassidele vastab erinev arv gruppideks jagunemisi, ei andnud see õiget vastust.

Sellistest juhtudest kõige sagedasem oli loendamine, kus leiti kiireimate nelikusse kuuluvate võistlejate arvud igas grupis. Vastavate lähenemistega on võimalik üldiselt küll õige vastuseni jõuda, kuid selleks peab ettevaatlikult loendatud juhte esinemise kordadega läbi korrutama (mõnes töös selline lähenemine ka õnnestus).

Kokkuvõte

Üleriigilisele žüriile laekus hindamise ühtlustamiseks kokku 7. klassi töid 73, 8. klassi töid 79 ja 9. klassi töid 84. Üleriigilise žürii poolsed põhikooli tööde kontrollijad olid järgmised.

7. klass:	Evely Kirsiaed
	Kadi Siigur
8. klass:	Oleg Košik
	Andres Alumets
9. klass:	Aleksei Ganyukov
	Birgit Veldi

Sel aastal vaatas üleriigiline žürii iga klassi igas töös läbi kõik ülesanded. Hindamisjuhis osutus ebasobivaks kõigi klasside I osa 3. ülesandes, sest eesti- ja venekeelsed tekstid polnud täpselt vastavuses. Eesti keeles küsiti võistkonna liikme vanust ja hindamisjuhis oli ühiku puudumisel ette näinud 1 punkti mahavõtmise. Samas venekeelne tekst küsis 7.–8. klassides sõna-sõnalt, mitmeaastane see liige on. Kuna vene keeles oli ühik küsimuses ette antud, siis polnud vastajal loogiliselt võttes vaja seda korrata. Seetõttu oli ettenähtud juhis vene õpilaste suhtes ebaõiglane. Ühtluse mõttes otsustas üleriigiline žürii kõigi klasside I osa 3. ülesannetes ühiku puudumise eest punkti mitte kellelgi maha võtta.

Järgnevad žürii esimehe ja tööde hindajate kommentaarid on kirjutatud üleriigilise žürii käes olnud tööde põhjal. Iga klassi II osa iga ülesande kohta on eraldi kommentaarid järgnevatel lehekülgedel.

7. klass

Testi punktimuutuste peamine põhjus oli žürii otsus muuta hindamisjuhendit ning mitte karistada 3. ülesandes õpilasi, kes andsid vastuse ilma ühikuta.

Komplekt osutus tervikuna oodatust raskemaks ja olulist rolli mängis selles just test.

8. klass

Testi kõige raskemateks ülesanneteks osutusid 2 ja 4.

Nagu 7. klassiski, osutus komplekt tervikuna oodatust raskemaks.

9. klass

Nagu öeldud, muutsime hindamisjuhendit ja 3. ülesandes ühiku puudumist enam veaks ei lugenud. Muudes kohtades kaotati punkte ühikute puudumise tõttu suhteliselt harva. Üheks paremini lahendatud ülesandeks osatuski 3. ülesanne, rohkem valmistas raskusi 4. ülesanne.

Komplekt tervikuna 9. klassis eriti raskeks ei kujunenud.

Kontrollijate kommentaarid

1. Palju oli lahendusi, mis seisnesid õige vastuse äraarvamises ning kontrollimises. Säärase lahenduse eest nägi hindamisskeem ette 2 punkti. Esines ka vormistuslikke vigu, kus ei eristatud osamäära osast ning nende vahele kirjutati võrdusmärk.

2. Imeilusate arvude korral on lihtne kontrollida, et tegemist on imeilusa arvuga, kuid puudulikuks jäid põhjendused, et tegemist on suurima tingimustele vastava imeilusa arvuga. Kasutati palju ka väära väidet, et imeilusast arvust imeilusa arvu saamiseks peaks algsele arvule liitma imeilusa arvu. Näiteks on arv 77777 imeilus, kuid liites talle arvu 1089, mis ei ole imeilus (ka numbrite summa ei jagu 7-ga), saame ikkagi imeilusa arvu 78866.

3. Ülesanne 3 oli üldiselt üsna hästi lahendatud. Peamiseks probleemiks oli ammendavalt põhjendamine, miks kujundis ei saa olla 12 musta ruutu.

4. Ülesandes 4 oli tihti probleeme ülesande tekstist arusaamisega. Nimelt ei saadud aeg-ajalt aru, et alumise rea viimane arv on 2031. Samuti ei olnud tihtipeale põhjendatud, miks leitud tsükkel tekib. Tihtipeale jäi ka põhjendamata, miks sobivaid arvupaare rohkem kui 101 ei saa olla.

Eesti 72. matemaatikaolümpiaad

29. jaanuar 2025 Piirkonnavoor **8. klass**

Kontrollijate kommentaarid

1. Päris mitmed tööd kaotasid punkte võrreldes piirkondlike žüriide antud skooridega. Peamiseks komistuskohaks oli see, et mitmete tähtede väärtuste tuletuskäike polnud piisavalt põhjendatud. Näiteks kui tõestati, et just E peab olema 5 ja A olema 3, siis oli toodud põhjenduseks, et kui $A = 5$, siis D peaks olema 4, sest $A + D = 9$. Kuid seal polnud arvestatud võimalusega või polnud seda mainitud, et kümneliste summast võib tekkida ülekandumine. Sellise vea eest küll punkte maha ei võtnud, aga see oli siiski viga. Üks levinud viga oli ka see, et eeldati kohe, et $G = 9$ ja $B = 1$. Jäeti kõrvale variant, et B võib ka 0 olla. Lõpuks viis see küll õige tulemuseni, aga peaks läbi vaatama kõik võimalused. Sarnane oli ka suurem põhimõtteline probleem mitmete lahendustega. Leiti üks võimalus, kuidas asendada tähed numbritega, ning ei tõestatud, et muud moodi ei saagi asendada. Selle tõttu kaotasid mitmed eelnevalt täislahendusena hinnatud tööd palju punkte ning ainult konstruktsiooni kirjeldavad lahendused said meilt üldiselt ainult 1 punkti.

2. Ülesanne oli lahendatud küllalt hästi. Paljud kasutasid žürii lahendusega sarnaseid mõttekäike, kuid oli kasutusel ka alternatiivne lahendusviis, mida hinnati järgmiselt.

- Leitud tunni- ja minutiosuti nurkkiirused: 1 p
- Leitud tunni- ja minutiosuti vaheline nurk kell 8:25: 2 p
- Leitud tunni- ja minutiosuti vaheline nurk kell 9:05: 2 p
- Selgitatud, miks on 9:05 esimene kord, kui nurk osutite vahel on 15 kraadi suurem: 2 p

Viimaseks põhjenduseks piisas näiteks märkida, et kuna minutiosuti liigub kiiremini, siis algul nurk väheneb ning peale minutiosuti möödumist tunniosutist hakkab jälle kasvama. Selline põhjendamine on küll lihtne ja võib tunduda isegi küllalt ilmne, kuid korrektse lahenduse jaoks on kindlasti oluline seda teha.

Lisaks ülalmainitud põhjenduse puudumisele esines mõnedes töödes vahel ka teisi puudujääke, näiteks ümardamine või ligikaudsed arvutused, mida matemaatikaolümpiaadi ülesannetes aga teha ei tohi. Mõnikord unustati arvestada tunniosuti pideva liikumisega ning arvati, et kell 8:25 on tunniosuti numbri 8 juures.

3. Žürii lahendusega 2 sarnaseid mõttekäike hindasime järgmiselt.

- Eeldades, et tahvlile on kirjutatud arvud 97 kuni 116, tuletatud, et peab kustutama arvu 105: 3 p
- Põhjendatud, et tahvlile ei saanud kirjutada väiksemaid arve: 2 p
- Põhjendatud, et tahvlile ei saanud kirjutada suuremaid arve: 2 p

Paljud lahendajad, lähtudes 19 allesjäänud arvu summast 2025, arvutasid nende arvude aritmeetilise keskmise ning selle põhjal väitsid, et tahvlile kirjutati algselt arvud 97 kuni 116. Kuigi sellise loogikaga oli võimalik jõuda õige arvuhulgani, ei tõesta see siiski, et polnud võimalik, et algul olid kirjutatud väiksemad või suuremad arvud. Samamoodi ei saa eeldada, et ülesandel on ainult üks võimalik vastus, peab kindlasti analüüsima kõiki võimalusi.

4. Peamine viga, mida töödes tehti oli, et kohe joonise põhjal eeldati, et F poolitab külje AD. Tegelikult peaks seda arvutuslikult tõestama. Tööd, mis tegid sellise eelduse ja lahendasid sealt lõpuni, said meilt ainult 2 punkti hindamisskeemi viimase rea järgi. Millegipärast tehti ka mitmetes töödes eeldusi rööpküliku külgede kohta, näiteks et külg DC on pikkusega 8 cm ja kõrgus on 6 cm. Sellist eeldust ei tohiks üldiselt teha. Võib küll külje DC pikkuse asendada mingi muutujaga, kuid arvulist väärtust asemele panna ei tohiks.

Eesti 72. matemaatikaolümpiaad

29. jaanuar 2025 | Piirkonnavoor | **9. klass**

Kontrollijate kommentaarid

1. Ülesanne oli hästi lahendatud. Kuigi esimene osa lahendati enamasti ühtemoodi, esitati teisele osale mitmeid erinevaid lahendusi. Mitmed võistlejad kasutasid aga lahendamisel valet paarsuspõhist argumentatsiooni. Sellest, et ühtede arvude paarsus saadud võrrandi erinevates pooltes on erinev, ei järeldu, et arv ei ole eriline. Näiteks numbrite järjestusest 10 on võimalik moodustada nii paarisarv 10 kui ka paaritu arv $1 + 0$.

   Aritmeetiliste vigade ja ebaselguste esinemise korral võtsime 1 punkti maha, suuremate puudujääkide korral aga 2 punkti. Kui osale b) puudus õige lahendus, andsime kasulike tähelepanekute eest 1 punkti.

2. Suurem osa lahendustest sarnanes žürii lahendusega 2, kuid punkte kaotasid vähem lahendusega 1 sarnanenud lahendused.

   Lahendusega 2 sarnanenud töödes kaotati punkte peamiselt põhjendamise eest, miks $n < 7$. Hindamisjuhis nägi ette 3 punkti põhjenduse eest, miks juhul $n > 6$ on võrrandi vasaku poole väärtus negatiivne. Mittetäielike põhjenduste korral andsime selle rea järgi punkte järgmiselt:

   - lihtsalt väite eest, et kui $n > 6$, siis on vasak pool negatiivne, punkte ei andnud, kui see tehti algsel kujul võrrandi või võrrandi, kus üks liige oli teisele poole viidud, põhjal ilma lisaselgitusteta;
   - kui oli lisaks leitud ka väärtus $n = 7$ korral ja tehtud selle põhjal järeldus, andsime 1 punkti;
   - tööd, mis põhjendasid, et juhul $n > 6$ on $6n - n^2$ negatiivne, kuid ei tegelenud $+1$-ga vasakul pool, said meilt põhjenduse eest 2 punkti.

   Samuti esines palju töid, kus vaadati mittenegatiivsete täisarvude asemel ainult positiivseid täisarve.

3. Piirkondades pandud punktidega võrreldes oli muutusi mõlemas suunas. Esines lahendusi, mis tegelesid juhtudega, kus kahes või kolmes tingimuses kehtib teine pool, korraga ja edukalt, kuid punkte oli piirkonnas antud vaid ühe juhu eest. Samas oli mitmetes töödes vaja ka punkte alandada. Lihtsalt väite eest, et kehtima peavad tingimuste esimesed pooled ja seetõttu on kolmnurgad sarnased, ei saa anda täispunkte. Ülesande sisu seisnebki selle näitamises. Samuti ei ole piisav põhjendus, et nurkade summa läheb liiga suureks. Seda tuleks ikkagi näidata ning näidata üldjuhul, mitte paari näite varal konkreetsete arvudega.

Mitmetel õpilastel oli probleeme ka ülesande tekstis „või“ tähenduse mõistmisega. Kui just teistmoodi kirjas pole, siis „A või B“ tähendab, et kehtib vähemalt üks väidetest A ja B, aga võivad kehtida ka mõlemad. Seega saades kahe tingimuse esimese poole ja ühe tingimuse teise poole puhul, et kolmas nurk on täisnurk ja kehtib ka esimene pool, ei tähenda see, et selline kolmnurk ei sobi tekstiga, vaid et sellist juhtu oleme juba vaadanud.

4. Ülesanne osutus keeruliseks. Hindamisel kasutasime etteantud põhjalikku hindamisskeemi.

   Oluline on rõhutada, et Annal on võiduks üksainus strateegia: avakäigul asendada mõni number 5 nulliga. Kui Anna teeb mõne muu avakäigu, leidub Berdil võitev strateegia. Lahendused, mis toetusid mängu lõpuni jäävate käikude suurima võimaliku arvu paarsuse argumentatsioonile, said meie käest 0 punkti. Kasulike tähelepanekute eest, mis käsitlesid nullist erinevate numbrite arvude paarsust, andsime aga 1 punkti.