XXI Astronoomia lahtine võistlus 2025 – vanem rühm

Juhised

Ülesannete lahendamiseks on aega 3 tundi. Kokku on võimalik saada **120 punkti**. Ülesandeid ei pea lahendama järjest ning ei pea lahendama ka kõiki ülesandeid. Hindamisel arvestatakse ainult puhtandit, välja arvatud juhul, kui puhtandile on lisatud märge, et tuleks vaadata mustandit. Sama märge peab olema lisatud ka mustandile. Ülesannete lahendamisel on lubatud kasutada vabalt valitud kalkulaatorit, aga kalkulaatoriks ei või olla internetiühendusega või muude mitte-arvutuslike võimekustega seade. Kahtluse korral küsi järelevaatajalt. Lahendus tuleb kirjutada kas sinise või musta pastakaga. Kõigis lahendustes võib teha mõistlikke lihtsustusi, näiteks modelleerida kanasid ideaalse sfäärina, ignoreerida atmosfääride optilisi iseärasusi jne.

Lahendamiseks vajalike konstantide ja astronoomiliste suuruste tabel on allpool.

NB!

- **Igale lehele peab olema kirjutatud õpilase nimi.**
- **Iga ülesanne peab olema lahendatud eraldi lehele.**

Punktid

Ülesanded annavad järgnevalt punkte:

- 1. ülesanne 10 ,
- 2. ülesanne 10 ,
- 3. ülesanne 15 ,
- 4. ülesanne 15 ,
- 5. ülesanne 20 ,
- 6. ülesanne 20 ,
- 7. ülesanne 30 .

Konstandid

Fundamentaalkonstandid

Valguse kiirus vaakumis	c	=	2.998×10^{8} m s^{-1}
Plancki konstant	h	=	6.626×10^{-34} J s
Boltzmanni konstant	k_B	=	1.381×10^{-23} J K^{-1}
Stefan-Boltzmanni konstant	σ	=	5.670×10^{-8} W m^{-2} K^{-4}
Elementaarlaeng	e	=	1.602×10^{-19} C
Gravitatsioonikonstant	G	=	6.674×10^{-11} N m^{2} kg^{-2}
Vaakumi dielektriline läbitavus	ϵ_0	=	8.854×10^{-12} m^{-3}kg^{-1}s^{4}A^{2}
Universaalne gaasi konstant	R	=	8.315 J mol^{-1} K^{-1}
Avogadro arv	N_A	=	6.022×10^{23} mol^{-1}
Wieni nihkeseadus	$b = \lambda_m T$	=	2.898×10^{-3} m K
Elektroni mass	m_e	=	9.109×10^{-31} kg
Prootoni mass	m_p	=	1.673×10^{-27} kg
Neutroni mass	m_n	=	1.675×10^{-27} kg
Heeliumi aatomituuma mass	m_He	=	6.645×10^{-27} kg
Aatommassiühik (a.m.ü.)		=	1.661×10^{-27} kg

Astronoomilised andmed

Hubble'i konstant	H_0	=	70 km s^{-1} Mpc^{-1}
Ekliptilise põhjapooluse koordinaadid	(α_E, δ_E)	=	$(18^h 00^m 00^s, +66°33'39'')$
Galaktilise põhjapooluse koordinaadid	(α_G, δ_G)	=	$(12^h 51^m 26^s, +27°7'42'')$
1 jansky	1 Jy	=	10^{-26} W m^{-2} Hz^{-1}
1 parsek	1 pc	=	3.086×10^{16} m 206 265 aü 3.262 ly
1 astronoomiline ühik	1 aü	=	1.496×10^{11} m
1 sideeriline päev	T_SD	=	23.934 44 h $23^h 56^m 04^s$
1 troopiline aasta		=	365.2422 päeva
1 sideeriline (tähe-) aasta		=	365.2564 päeva

Lähendused

$(1+x)^n \approx 1 + nx$

$(1+x)(1+y) \approx 1 + x + y$ kui $x \ll 1$ ja $y \ll 1$

Gaussi valemid

Sfääriline koosinusteoreem: $\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A$

Sfääriline siinusteoreem: $\frac{\sin A}{\sin a} = \frac{\sin B}{\sin b} = \frac{\sin C}{\sin c}$

Päike

Päikese heledus	$L_\odot$	=	3.826×10^{26} W
Päikese näiv nurkläbimõõt	$\theta_\odot$	=	$32'$
Päikese efektiivne temperatuur	$T_{\mathrm{eff},\odot}$	=	5778 K
Näiv tähesuurus		=	-26.75
Absoluutne tähesuurus		=	$+4.82$
Näiv bolomeetriline tähesuurus		=	-26.83
Absoluutne bolomeetriline tähesuurus		=	$+4.74$
Päikese kaugus Galaktika keskmest		$\approx$	8 kpc

Maa ja Kuu

Maa telje kaldenurk	ϵ	=	$23.5'$
Platooniline aasta (Maa telje pretsessiooni periood)		=	25 765 aastat
Täiskuu näiv tähesuurus		=	-12.74
Kuu näiv nurkläbimõõt	θ_{L}	=	$31'$
Kuu orbiidi kalle ekliptika suhtes		=	$05°08'43''$
Kuu ekvaatori kaldenurk Kuu orbiidi tasandi suhtes		=	$6.687°$
Sideeriline kuu	T_{SL}	=	27.321661päeva 655.71986 h
Sünoodiline kuu		=	29.530589 päeva
Troopiline kuu		=	27.321582 päeva
Anomaalne kuu (keskmine aeg kahe Kuu perigee läbimise vahel)		=	27.554550 päeva
Drakooniline kuu (Kuu ekliptikaga lõikumise periood)		=	27.212221 päeva

Päikesesüsteem

Taeva-keha	**Keskmine raadius** [km]	**Mass** [kg]	**Pikem pooltelg** [aü]	**Ekstsentrilisus**
Päike	695 700	1.988×10^{30}	—	—
Merkuur	2 440	3.301×10^{23}	0.387	0.206
Veenus	6 052	4.867×10^{24}	0.723	0.007
Maa	6 378	5.972×10^{24}	1.000	0.016 710
Kuu	1 737	7.346×10^{22}	3.844×10^{5} km	0.054 900 (vahemik $0.026 - 0.077$)
Marss	3 390	6.417×10^{23}	1.524	0.093
Jupiter	69 911	1.898×10^{27}	5.203	0.048
Saturn	58 232	5.683×10^{26}	9.537	0.054
Uraan	25 362	8.681×10^{25}	19.189	0.047
Neptuun	24 622	1.024×10^{26}	30.070	0.009

1 Lühiküsimused

10 punkti

All on toodud 5 väidet märgi ära kas väide on õige või vale kasutades õige vastuse tähistamiseks „ÕIGE“ või „+“ ja vale vastuse tähistuseks „VALE“ „-“. Vastuseid põhjendama ei pea.

1. Ekvaatoril olles saab 1 aasta jooksul näha kõiki geostatsionnarseid sateliite.
2. Veega, Deeneb ja Altair moodustavad suvekolmnurga.
3. 2000 aastat tagasi oli Maa pöörlemistelg suunatud Põhjanaelast 10 kraadi lõunapoole.
4. Kevadpunkt asub Kalade tähtkujus.
5. Suur Suur Magalhaesi pilv paistab Maalt vadeldes heledamana kui Andromeeda galaktika.

1. Ekvaatoril ühes punktis olles saab 1 aasta jooksul näha kõiki geostatsionnarseid sateliite. - **EI** - 2p
2. Veega, Deeneb ja Altair moodustavad suvekolmnurga. **JAH** - 2p
3. 2000 aastat tagasi oli Maa pöörlemistelg suunatud Põhjanaelast 10 kraadi lõunapoole. **EI** - 2p
4. Kevadpunkt asub Kalade tähtkujus. **JAH** - 2p
5. Suur Suur Magalhaesi pilv paistab Maalt vadeldes heledamana kui Andromeeda galaktika. **JAH** - 2p

2 Galaktika sünd

Kui galaktika tekib, siis ta muudab oma olekut lihtsalt gravitatsiooniliselt seotud olekust $\mathrm{E_{kin}} = |\mathrm{E_{pot}}|$ viriaalsesse olekusse $\mathrm{E_{kin}} = 0.5 \cdot |\mathrm{E_{pot}}|$. Üleliigne seoseenergia kiiratakse ära. Uurime ideaaliseeritud ketasgalaktika teket, mis pöörleb ühtlaselt kiirusel $\mathrm{v_{rot}} = 250\mathrm{km/s}$, võime ignoreerida kõiki juhuslikke liikumisi ja massi jaotuse ebaühtluseid jne. Oletame, et kogu ta mass paikneb $\mathrm{R_{max}} = 80\mathrm{kpc}$ sees. Oletame, et ta tekkis 600 miljoni aastaga. Millise heledusega (Päikese heleduse ühikutes) kiirgab see galaktika seoses seoseenergia vabanemisega selle aja jooksul.

Lahendus: Kõigepealt leiame galaktika massi

$$\frac{mv^2}{R} = \frac{GmM}{R^2} \to M = \frac{R \cdot v^2}{G} = 1.2 \cdot 10^{12} M_\odot$$

Pool kiiratust kineetilisest energiast on

$$1/2Mv^2 = 3.7 \cdot 10^{22} J$$

Saame heleduse

$$L = E/t = 1.9 \cdot 10^6 W = 5 \cdot 10^{-21} L_\odot$$

3 Pluuto ja Charon

15 punkti

Pluuto kaaslane Charon avastati 1978. aastal. Maa orbiit on Pluuto orbiidi suhtes niiviisi kaldu, et Maalt on vaid harva võimalik vaadelda seda, kuidas Charon Pluutost üle liigub ja seepärast Pluuto näiv heledus muutub. Charoni orbitaalperiood on 6.39 päeva. Pluuto ja Charon tiirlevad ümber ühise punkti, mis ei asu Pluuto keskel. Charoni orbiit on ca 7.3 korda nii suur kui Pluuto orbiit.

1. Konstrueeri Tabelit 1 kasutades Pluuto heleduskõver.
2. Hinda, millisel ajahetkel toimusid Charoni ülemineku esimene, teine ja kolmas kontakt. Kui pikk aeg kulus esimese ja teise kontakti vahel? Kui pikk aeg kulus esimese ja kolmanda kontakti vahel?
3. Viimaste hinnangute järgi on Charoni kaugus Pluutost ca 19130km. Oletades, et Charoni orbiit on ringikujuline, leia Charoni orbiidi ümbermõõt, orbitaalkiirus ning hinda, kui suur on Charoni läbimõõt ja kui suur on Pluuto läbimõõt?.

Tabelis 1 on antud Pluuto heleduse muutumine ühe Charoni ülemineku ajal, 18. veebruaril 1987.

Aeg (UT)	Heleduse muutus	Aeg (UT)	Heleduse muutus
13:30	-0.010	17:15	-0.199
13:45	-0.001	17:30	-0.150
14:00	+0.012	17:45	-0.130
14:15	-0.011	18:00	-0.092
14:30	-0.033	18:15	-0.049
14:45	-0.050	18:30	-0.024
15:00	-0.097	18:45	-0.005
15:15	-0.128	19:00	-0.006
15:30	-0.155	19:15	-0.002
15:45	-0.180	19:30	-0.001
16:00	-0.218		
16:15	-0.220		
16:30	-0.221		
16:45	-0.219		
17:00	-0.220		

Tabel 1: Pluuto heleduse muutus

Lahendus:

2.Hinda, millisel ajahetkel toimusid Charoni ülemineku esimene, teine ja kolmas kontakt. Kui pikk aeg kulus esimese ja teise kontakti vahel? Kui pikk aeg kulus esimese ja kolmanda kontakti vahel? **Vastus: 14:15, 16:00, 17:00, 1h45min,2h45min**

3.Viimaste hinnangute järgi on Charoni kaugus Pluutost ca 19130km. Oletades, et Charoni orbiit on ringikujuline, leia Charoni orbiidi ümbermõõt, orbitaalkiirus ning hinda, kui suur on Charoni läbimõõt ja kui suur on Pluuto läbimõõt? Orbiidi ümbermõõdu leiame:

$$C = 2\pi R \tag{1}$$

$$C = 2\pi \cdot 19130km = 120197,33km \tag{2}$$

Charoni orbitaalkiiruse leidmiseks jagame orbiidi ümbermõõdu orbitaalperioodiga.

$$v_{orbitaal} = \frac{C}{P_{orbitaal}} \tag{3}$$

$$v_{orbitaal} = \frac{120197,33km}{6,39päeva = \frac{120197,33km}{153,36h} = 783,75km/h(4)}$$

Charoni läbimõõdu leidmiseks peame teadma, et selle leiame kasutades orbitaalkiirust ning aega, mis kulus esimesest kontaktist teiseni ning Pluuto läbimõõdu leidmiseks aega, mis kulus esimesest kontaktist kolmandani.

$$d_{Charon} = t_{II-I} \cdot v_{orbitaal} = 1,75h \cdot 783,75km/h = 1371,56km \tag{5}$$

$$d_{Pluuto} = t_{III-I} \cdot v_{orbitaal} = 2,75h \cdot 783,75km/h = 2115,31km \tag{6}$$

Vastus: Charoni orbiidi ümbermõõt on 120197,33km, orbitaalkiirus on 783,75km/h, Charoni läbimõõt on 1371,56km ja Pluuto läbimõõt on 2115,31km.

4 Eksokuu

15 punkti

Lahendus:

Sümbolid: v_p – planeedi orbitaalkiirus ümber tähe; a_p – planeedi orbiidi pikem pooltelg; Δa – planeedi kaugus planeet-kuu süsteemi massikeskmest; a_m – kuu kaugus planeet-kuu süsteemi massikeskmest.

(a) *Hindamisjuhend:*

- *Võrrand 7 – 6 p.*
- *Võrrand 8 – 3 p.*
- *Idee kasutada Kepleri seadust – 2 p.*
- *Kepleri seadus välja kirjutatud planeedi (0.5 p) ja kuu (0.5 p) jaoks.*
- *Lõplik õige vastus – 1 p.*

ΔTTV väärtuse leidmiseks arvutame meie vaatesihiga risti oleva kauguse planeedi massikeskme ja planeet-kuu süsteemi massikeskme vahel kahel ekstreemumjuhul.

$$\Delta \mathrm{TTV} = \max(\mathrm{TTV}) - \min(\mathrm{TTV}) = \frac{\Delta a}{v_p} - \left(-\frac{\Delta a}{v_p}\right) = \frac{2\Delta a}{v_p} \tag{7}$$

$$\Delta \mathrm{TTV} = \frac{2\Delta a P_p}{2\pi a_p} = \frac{P_p}{\pi}\frac{\Delta a}{a_p}$$

kus asendasime $v_p = 2\pi a_p / P_p$.

$$m a_m = M_p \Delta a \Rightarrow \Delta a = a_m \frac{m}{M_p} \tag{8}$$

Kasutame Kepleri III seadust, et leida a_m ja a_p.

$$P_p^2 = \frac{4\pi^2 a_p^3}{G(M_\star + M_p)} \Rightarrow a_p \approx \sqrt[3]{\frac{G}{4\pi^2} M_\star P_p^2}$$

$$P_m^2 = \frac{4\pi^2 a_m^3}{G(M_p + m)} \Rightarrow a_m \approx \sqrt[3]{\frac{G}{4\pi^2} M_p P_m^2}$$

$$\Delta \mathrm{TTV} = \frac{P_p}{\pi}\frac{\Delta a}{a_p} = \frac{P_p}{\pi}\frac{m}{M_p}\sqrt[3]{\frac{M_p P_m^2}{M_\star P_p^2}} = \frac{1}{\pi}\sqrt[3]{P_m^2 P_p \frac{m^3}{M_p^2 M_\star}}$$

(b) *Õige vastus: 2 p. Väike arvutusviga (nt elementaarne ühikute teisendus): –0.5 p.* $m = 7.346 \cdot 10^{22}$ kg, $M_p = 5.972 \cdot 10^{24}$ kg, $M_\star = 1.988 \cdot 10^{30}$ kg, $P_m = 27.32$ p, $P_p = 365.26$ p.

$$\Delta \mathrm{TTV} \approx 3.663 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{p} \approx \boxed{5.3\ \mathrm{min}}$$

5 Spektrid

20 punkti

Lahendus:

See ülesanne tuleks hinnata pigem tagurpidi: (b) esimesena ning siis (a).

(b) Iga õige ja täielik põhjendus annab 2 punkti, iga poolik või osaliselt õige põhjendus annab 1 punkti ning vale või puuduv vastus 0 punkti. Hindaja võib (põhjendatult) otsustada kasutada ka poolpunkte. Võimalikud vastused ja põhjendused võivad olla naiteks järgnevad, kuid punktid tuleks anda ka täielikele selgitustele, mis on sisuliselt õiged, kuid ei ole siin välja toodud.

- Peajada tähed. Spekter peaks lähedalt meenutama ideaalselt musta keha oma. Peajada tähtedel peaks üldjuhul selgelt näha olema Hα neeldumisjoon umber 6563 Å ümbruses. Hα joone asukoha põhjal on näha, et nende 3 graafiku Doppleri nihked (punanihked) on teistega võrreldes väikesed, seega peaksid nad asume meile lähemal.
- Galaktikad. Kuna galaktikad sisaldavad palju eri tüüpi tähti (eri heledus, värv ja keemiline koostis), peaks galaktika spekter olema tasasem kui tähe oma, aga mitte horisontaalne, kuna tähepopulatsioonide jaotus galaktikas ei ole ühtlane.
- Kvasarid. Spektrid on tüüpiliselt <u>väga</u> tasased (horisontaalsed), kuid esineb tugevaid, tihti laienenud kiirgusjooni. Galaktikate ja tähtede (erijuht) puhul ootaksime naha ainult Hα kiirgusjooni, kuid kvasaritele on omased ka eripärased kiirgusjooned, mida tüüpilistes galaktikates ja tähtedes ei esine.

(a) Iga õige annab...

- 1 punkti, kui selle objektitüübi arutelu/põhjendus sai osas (b) 1.5...2 punkti.
- 0.5 punkti, kui selle objektitüübi arutelu/põhjendus sai osas (b) 1 punkti.
- 0.25 punkti, kui selle objektitüübi arutelu/põhjendus sai osas (b) 0...0.5 punkti.

Vale vastus annab alati 0 punkti.

<u>Naide.</u> Säde määras kõigi 10 spektri klassid õigesti, kuid osas (b) arutas ta piisavalt vaid peajada tähtede juhtu (sai 2 p), kirjutas ühe lause kvasarite kohta, mis oli õige, aga mittespetsiifiline/ebatäielik (sai 1 p) ning ei maininud sõnagagi galaktikaid (sai 0 p). Sellisel juhul saab ta osa (a) eest $1 \cdot 4 + 2 \cdot 0.5 + 3 \cdot 0.25 = 5.75$ *p.*

(c) Spekter #10. Spekter ei ole piisavalt tasane, et vastata kvasari omale ning tugev Lyα kiirgusjoon on nende galaktikate tunnusmärk, kus on ulatuslikult tähetekke regioone. Tegu on ühtlasi pigem spiraalgalaktikaga (elliptilistes galaktikas ei ole aktiivset täheteket, tähepopulatsioonid on pigem vanemad).

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Peajada täht		X	X					X	X	
Galaktika	X					X	X			
Kvasar				X	X					X

Tabel 2: Ulesande 5(a) vastused.

6 SPECULOOS-3b

20 punkti

Lahendus:

(a) *(1 p).* Taevaekvaatori kõrgus põhjapoolkeral on leitav avaldisest

$$h_{ekv} = 90^\circ - \phi,$$

kus ϕ on vaatluskoha laiuskraad (positiivne). Mingi taevakeha, kääandega δ, ülemise kulminatsiooni kõrgus on seega:

$$h = 90^\circ - \phi + \delta.$$

Antud juhul siis: $h = 90 - 28.4744 + (33 + 36/60 + 50.96/3600) = 90 - 28.4744 + 33.6142 = 95.1398$. Kuna kõrgus on suurem, kui 90 kraadi, siis tähendab see seda, et ülemine kulminatsioon leiab aset seniidi ja taeva põhjapooluse vahel. Kõrgus horisondist on leitav siis $90 - h + 90 = 84.8602$

Kui lähtuda lahenduses sfäärilisest trigonomeetriast, siis on lahenduskäik järgnev:

$$\sin h = \sin\delta \sin\phi + \cos\delta \cos\phi \cos \mathrm{HA}$$

Ülemises kulminatsioonis $\mathrm{HA} = 0^\mathrm{h}$.

$$h_{\max} = \arcsin\big(\cos(\delta - \phi)\big) \approx \arcsin(\cos 5.14^\circ) \approx \boxed{84.9^\circ}$$

(b) *(2 p).* Näiv tähesuurus väljaspool atmosfääri (see, mis ülesandes antud) on alati arvuliselt väiksem kui Maa pinnalt vaadeldud näiv tähesuurus, atmosfäär hajutab ja neelab osa valgusest. Kirjutame selle kujul:

$$m_0 = m - kX,$$

kus m on tähe heledus vaadelduna maapinnalt, k on atmosfääri neeldumiskoefitsient vaadeldava lainepikkuse jaoks ning X on õhumass, mida arvutatakse:

$$X = \frac{1}{\cos z},$$

kus z on seniitkaugus (tähe nurkkaugus seniidist):

$$z = 90^\circ - h.$$

Pannes avaldisse arvud sisse:

$$\begin{aligned} m &= m_0 + kX \\ &= 17^m.8 + 0.13 \times \frac{1}{\cos\left(90^\circ - 84.8602^\circ\right)} \\ &= 17^m.8 + 0.13 \times 1.004 \\ &= 17^m.8 + 0^m.1305 = \boxed{17^m.83} \end{aligned}$$

(c) *Hindamisjuhend:*

- *Veega energiavoo (võrrand 9) oige teisendus – 1 p.*
- *Võrrand 10 (voi selle analoogne kujul) – 4 p.*
- *Õige arvuline väätus – 1 p.*
- *Iga arvutusvea või mittepõhimõttelise pisivea eest maha võtta –0.5 p max.*

$$\begin{aligned} F_0 &\approx f_0 \cdot \frac{\bar{\lambda}}{hc} = \\ &= 1.11 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{W\ m^{-2}\ nm^{-1}} \cdot \frac{910\ \mathrm{nm}}{6.626 \cdot 10^{-34}\ \mathrm{J\ s}\ \cdot 3 \cdot 10^8\ \mathrm{m\ s^{-1}}} \approx \\ &\approx 5.08 \cdot 10^7\ \text{footonit}\ \mathrm{s^{-1}\ m^{-2}\ nm^{-1}} \end{aligned} \tag{9}$$

$\Delta\lambda = 1080\ \mathrm{nm} - 740\ \mathrm{nm} = 340\ \mathrm{nm}$ Ühe vaatluspunkti SNR on $\approx \delta \cdot \mathrm{SNR}_\star$. Siis terve transiidi ($N$ vaatlust) SNR on

$$\mathrm{SNR_{tr}} = \delta \cdot \mathrm{SNR}_\star \cdot \sqrt{N} = \delta\sqrt{\frac{T}{\Delta t}} \cdot \mathrm{SNR}_\star = \frac{\delta}{2} \cdot 10^{-0.2m} \cdot \sqrt{\pi q D^2 \Delta\lambda F_0 T}, \tag{10}$$

kus asendasime peapeegli pindala $A = \pi D^2/4$.

$$\mathrm{SNR_{tr}} = \frac{5.3 \cdot 10^{-3}}{2} \cdot 10^{-0.2 \cdot 17.93} \cdot \sqrt{0.94\pi \cdot 1\ \mathrm{m}^2 \cdot 340\ \mathrm{nm} \cdot F_0 \cdot 27.4\ \mathrm{min}\ \cdot \frac{60\ \mathrm{s}}{1\ \mathrm{min}}} \approx \boxed{6.3}$$

(d) *(2 p).* Mõned võimalikud vastused on järgnevad ning täispunktide saamiseks piisab vaid uhe kaalutluse arutlusest:

- Ülesande püstituse kohaselt vaatlesime täpselt vaid transiiti. Kui vaatleksime ka transiidivalist *baseline*'i (mida kauem, seda parem), saaksime anda parema (täpsema) hinnangu taustamüra jaoks ning SNR suureneks.
- Võiksime vaadelda mitut transiiti ning need vaatlused kombineerida.

Täispunktid tuleks anda ka igale oigele vastusele, mida siin ei ole toodud.

(e) *(2 p).* Kui säriaeg on liiga pikk, võib detektor üleküllastuda. Kui üleküllastumine poleks probleem, võib liiga pikk säriaeg ikkagi viia teatud infromatsiooni kadumaminekuni (näiteks kaotame info ingressi ja egressi kohta).

(f) *(1 p).*

$$\delta_{\rm tr} = \left(\frac{R_p}{R_\star}\right)^2 \Rightarrow R_p = R_\star\sqrt{\delta_{\rm tr}} = 0.123R_\odot\sqrt{5.3\cdot 10^{-3}} \approx \boxed{0.98R_\oplus}$$

(g) *Hindamisjuhend:*

- *Võrrand 11 või selle ekvivalentne kuju (väärtus ei pea olema eraldi välja arvutatud) – 1.5 p.*
- *Võrrand 12 – 0.5 p*
- *Võrrand 13 – 0.5 p.*
- *Võrrand 14 – 0.5 p.*
- *Võrrand 15 – 1.5 p.*
- *Võrrand 16 – 1 p.*
- *Õige arvuline lõppvastus – 0.5 p.*
- *Iga arvutusvea või mittepõhimõttelise pisivea eest maha votta –0.5 p max.*

Kõigile ekvivalentsetele ning sisuliselt õigetele lahenduskäikudele tuleks anda maksimumpunktid.

Leiame esmalt planeedi orbiidi raadiuse (pikema pooltelje).

$$T = \frac{P}{\pi}\frac{R_\star}{a} \Rightarrow a = R_\star\frac{P}{\pi T} = 0.123R_\odot\cdot\frac{0.719\ \text{p}\ \cdot 1440\ \text{min/p}}{27.4\ \text{min}} \approx 1.03\cdot 10^9\ \text{m} \tag{11}$$

$$L_\star = 4\pi R_\star^2 F_\star = 4\pi\sigma R_\star^2 T_\star^4 \tag{12}$$

$$F_\star = \frac{L_\star}{4\pi a^2} = \sigma T_\star^4\left(\frac{R_\star}{a}\right)^2 \tag{13}$$

Planeedi ristlõike pindala on $A = \pi R_p^2$ ning kogupindala on $S = 4\pi R_p^2$. Planeet kiirgab

$$F_p = \sigma T_{\rm eq}^4. \tag{14}$$

Soojuslik tasakaal:

$$F_\star A(1-\alpha) = F_p S \tag{15}$$

$$\pi\sigma T_\star^4\left(\frac{R_\star R_p}{a}\right)^2(1-\alpha) = 4\pi\sigma R_p^2 T_{\rm eq}^4$$

$$T_{\rm eq} = T_\star\sqrt{\frac{R_\star}{2a}\sqrt{(1-\alpha)}} \tag{16}$$

$$T_{\rm eq} = 2800\ \text{K}\ \cdot\sqrt{\frac{0.123R_\odot}{2\cdot 1.03\cdot 10^9\ \text{m}}}\cdot\sqrt{0.8} \approx \boxed{540\ \text{K}}$$

7 Lamberti kera

30 punkti

Lahendus:

(a) Arvutame faasikõvera väärtused järgmistele faasinurkadele: $\alpha = 0°, 60°, 90°, 120°, 180°$.

- Kui $\alpha = 0°$:

$$\Phi(0°) = \frac{1}{\pi}\left[\sin(0°) + (\pi - 0°)\cos(0°)\right] = \frac{1}{\pi}[0 + \pi \cdot 1] = 1.000$$

- Kui $\alpha = 60°$:

$$\Phi(60°) = \frac{1}{\pi}\left[\sin(60°) + (\pi - 60°)\cos(60°)\right] \approx 0.609$$

- Kui $\alpha = 90°$:

$$\Phi(90°) = \frac{1}{\pi}\left[\sin(90°) + (\pi - 90°)\cos(90°)\right] = \frac{1}{\pi}[1 + 0] = \frac{1}{\pi} \approx 0.318$$

- Kui $\alpha = 120°$:

$$\Phi(120°) = \frac{1}{\pi}\left[\sin(120°) + (\pi - 120°)\cos(120°)\right] \approx 0.109$$

- Kui $\alpha = 180°$:

$$\Phi(180°) = \frac{1}{\pi}\left[\sin(180°) + (\pi - 180°)\cos(180°)\right] = 0.000$$

Selgitus: Võrreldes täisfaasiga ($\alpha = 0°$, siis $\Phi = 1$), on faasinurga $90°$ korral valgust peegeldunud vähem, sest ainult osa planeedi pinnast on vaataja poolt valgustatud. Seetõttu on faasikõvera väärtus väiksem. $\Phi(90°)$ on umbes kolmandik täisfaasi väärtusest.

(b) Kuna planeedi raadius on Maa raadiusega võrreldes sama, siis $R_{\text{planeet}} = R_{\text{Maa}}$ ja kaugus tähest $a = 1\,\text{AU}$, siis saame väljundi järgmiseks:

$$\frac{F_{\text{planeet}}}{F_{\text{täht}}} = 0.2 \cdot \frac{R_{\text{Maa}}^2}{(1\,\text{AU})^2} \cdot \Phi(\alpha)$$

Kuna raadius R_{Maa} ja kaugus a on konstantne, siis arvestame neid kui mastaabifaktoreid ja keskendume ainult faasifunktsiooni väärtuste arvutamisele. Arvutame F_{planeet} väärtusi vahemikus $\alpha = 0°$ kuni $180°$.

Arvutame ja joonistame graafikuna planeedi-tähe voog F_{planeet} vahemikus $\alpha = 0°$ kuni $180°$.

$$F_{\text{planeet}} = 0.2 \cdot \Phi(\alpha)$$

Faasikõverate väärtused erinevate α nurkade jaoks:

$$\begin{aligned}
\alpha = 0^\circ : \Phi(0^\circ) = 1, \quad F_{\text{planeet}} = 0.2 \cdot 1 = 0.2 \\
\alpha = 60^\circ : \Phi(60^\circ) \approx 0.609, \quad F_{\text{planeet}} \approx 0.2 \cdot 0.609 = 0.1218 \\
\alpha = 90^\circ : \Phi(90^\circ) \approx 0.318, \quad F_{\text{planeet}} \approx 0.2 \cdot 0.318 = 0.0636 \\
\alpha = 120^\circ : \Phi(120^\circ) \approx 0.109, \quad F_{\text{planeet}} \approx 0.2 \cdot 0.109 = 0.0218 \\
\alpha = 180^\circ : \Phi(180^\circ) = 0, \quad F_{\text{planeet}} = 0.2 \cdot 0 = 0
\end{aligned}$$

Graafiku joonistamine näitab, et planeedi-tähe voog F_{planeet} on maksimaalne $\alpha = 0^\circ$ ja minimaalne $\alpha = 180^\circ$.

(c) Lambert'i faasikõver ise $\Phi(\alpha)$ ei sõltu otseselt orbiidi kaldest i, kuid vaadeldav faasinurk α sõltub. Seos on järgmine:

$$\cos\alpha = \sin i \cdot \cos\theta,$$

kus θ on planeedi orbiidifaas. Orbiidi kalle määrab seega, milliseid faasinurki α me saame Maalt vaadelda. Näiteks:

- Kui $i = 90^\circ$ (serviti orbiit), muutub α vahemikus 0° kuni 180°.
- Kui $i = 0^\circ$ (orbiit taeva tasandil), on α kogu aeg 90° ja faasikõver on konstantne.

(d)

$$\begin{aligned}
\frac{d\Phi}{d\alpha} &= \frac{1}{\pi} \cdot \frac{d}{d\alpha}\left[\sin\alpha + (\pi - \alpha)\cos\alpha\right] \\
&= \frac{1}{\pi}\left[\cos\alpha + \frac{d}{d\alpha}((\pi - \alpha)\cos\alpha)\right] \\
&= \frac{1}{\pi}\left[\cos\alpha + (-1)\cdot\cos\alpha + (\pi - \alpha)(-\sin\alpha)\right] \\
&= \frac{1}{\pi}\left[\cos\alpha - \cos\alpha - (\pi - \alpha)\sin\alpha\right] \\
&= -\frac{1}{\pi}(\pi - \alpha)\sin\alpha
\end{aligned}$$

Kuna iga $\alpha \in (0, \pi)$ korral on:

- $(\pi - \alpha) > 0$,
- $\sin\alpha > 0$,

siis saame järeldada, et

$$\frac{d\Phi}{d\alpha} < 0 \quad \text{kõigil} \quad \alpha \in (0, \pi).$$

Kuna tuletis on negatiivne intervallis $\alpha \in (0^\circ, 180^\circ)$, järeldub, et faasifunktsioon $\Phi(\alpha)$ on selles vahemikus rangelt kahanev. Seega on maksimaalne heledus punktis $\alpha = 0^\circ$ (täisfaas) ning minimaalne punktis $\alpha = 180^\circ$ (uus faas, kui valgustatud külg on vaadeldavast punktist täielikult varjatud). See, et tuletis on null ka punktis $\alpha = 180^\circ$, tähendab vaid seda, et tegemist on teise statsionaarse punktiga -antud juhul miinimumiga.