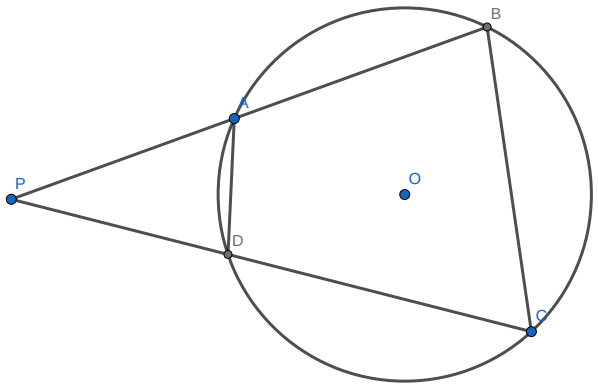
1 Punkti potents

Olgu meile antud ringjoon Ω ning punkt P, mis võiks asuda kas väljaspool ringjoont Ω, ringjoone Ω sees või selle peal (kaks esimest võimalust on kujutatud joonistel (1) ja (3)). Praegu eeldame, et punkt P asub väljaspool ringjoont Ω, kuid kõik analoogilised tulemused kehtivad ka juhul, kui P asub ringjoone sees. Joonestame suvalise sirge l läbi punkti P, mis lõikab ringjoont Ω punktides A ja B. Meie praegune eesmärk on aru saada, millega võiks võrduda korrutis $|PA| \cdot |PB|$.

Selleks joonestame veel ühe sirge läbi punkti P, mis lõikab ringjoont Ω punktides C ja D (vt joonist 1). Siis kehtib järgmine võrdus:

$$|PA| \cdot |PB| = |PC| \cdot |PD|$$

Tõestus. Selleks, et see seos ära tõestada, märkame, et $|PA| \cdot |PB| = |PC| \cdot |PD|$ on samaväärne võrdusega $\frac{|PA|}{|PC|} = \frac{|PD|}{|PB|}$. Aga $\triangle PAD \sim \triangle PCB$, kuna $\angle BPC$ on neil kolmnurkadel ühine ning $\angle PAD = \angle PCB$, kuna punktid A, B, C ja D asuvad ühel ringjoonel. Nüüd võrdus $\frac{|PA|}{|PC|} = \frac{|PD|}{|PB|}$ tuleneb kohe kolmnurkade $\triangle PAD$ ja $\triangle PCB$ sarnasusest. □



Joonis 1: Punkt P asub väljaspool ringjoont

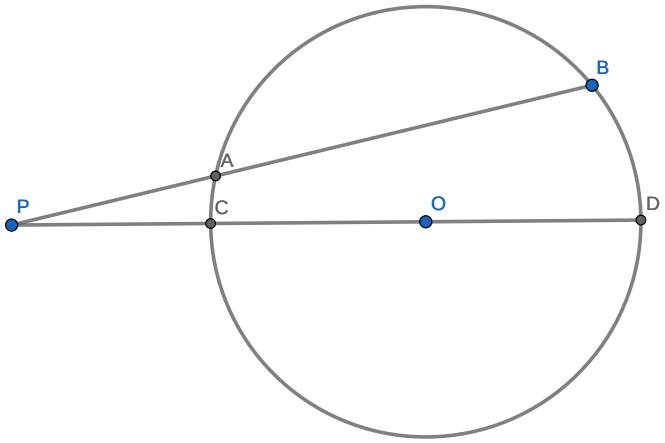
Tõestatud võrdusest järeldub, et ükskõik millised kaks sirget me ringjoonega ei lõikaks, kui me arvutame lõikude korrutist eelnevalt näidatud viisil, tulemus tuleb **alati** sama. Seega võime selleks, et aru saada, millega see korrutis täpsemalt võrdub, joonestada sellise sirge läbi punkti P, mis läbiks ringjoone Ω keskpunkti (vt joonist 2). Tähistame ringjoone Ω raadiust r-ga ning olgu $|PO| = d$. Siis $|PC| \cdot |PD| = (d - r)(d + r) = d^2 - r^2$.

See teadmine võimaldab meil sõnastada järgmise teoreemi:

Teoreem 1. *Olgu P suvaline punkt väljaspool ringjoont Ω ning olgu l suvaline sirge läbi punkti P, mis lõikab ringjoont Ω punktides A ja B, siis*

$$|PA| \cdot |PB| = d^2 - r^2$$

kus d on kaugus ringjoone keskpunkti ja punkti P vahel ning R on ringjoone raadius.



Joonis 2: Punkti potentsi arvutamine

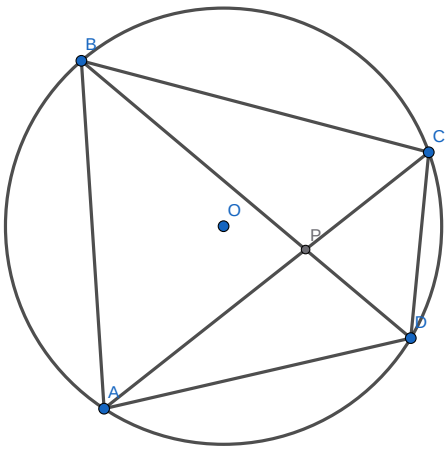
Analoogiline tulemus kehtib ka juhul, kui punkt P asub ringjoone Ω sees.

Teoreem 2. *Olgu P suvaline punkt ringjoone Ω sees ning olgu l suvaline sirge läbi punkti P, mis lõikab ringjoont Ω punktides A ja B, siis*

$$|PA| \cdot |PB| = r^2 - d^2$$

kus d on kaugus ringjoone keskpunkti ja punkti P vahel ning r on ringjoone raadius.

Tõestus. Iseseisvalt! □



Joonis 3: Punkt P asub ringjoone sees.

Me näeme, et $|PA| \cdot |PB|$ ei sõltu sellest, mis sirget me esialgu tõmbame. See sõltub ainult punktist ja ringjoonest. Täpsemalt, teoreemidest (1) ja (2) järeldub, et $|PA| \cdot |PB| = |d^2 - r^2|$. See motiveerib meid sisse tuua järgmine mõiste:

Definitsioon 1.1: Punkti P **potentsiks** ringjoone Ω suhtes nimetatakse suurust

$$\mathrm{Pow}_\Omega(P) = |OP|^2 - r^2 = d^2 - r^2.$$

Märkus. Punkti potents võib olla ka negatiivne. Potentsi märk näitab meile, kas antud punkt asub ringjoone sees või väljaspool seda. Samuti punkti potentsi definitsioonist järeldub, et $|PA| \cdot |PB| = |\mathrm{Pow}_\Omega(P)|$.

Teoreem 3 (Punkti potents aitab näidata, kas mõni nelinurk on kõõlnelinurk!)**.** *Olgu A, B, C ja D erinevad punktid tasandil ning lõikugu sirged AB ja CD punktis P. Kui*

$$|PA| \cdot |PB| = |PC| \cdot |PD|,$$

siis punktid A, B, C ja D asuvad ühel ringjoonel.

1.1 Harjutused

Harjutus 1.1: Tõestada teoorem (3).

Harjutus 1.2 (Puutuja seos punkti potentsiga)**:** Näidata, et kui punkt P asub väljaspool ringjoont Ω ning lõik PA puutub ringjoont Ω, siis kehtib võrdus

$$|PA|^2 = \mathrm{Pow}_\Omega(P).$$

2 Radikaaltelg

Nüüd olgu meile antud kaks ringjoont ω_1 ja ω_2, mille keskpunktid on erinevad. Üritame vastata küsimusele, mida kujutab endast selliste punktide hulk, millel on sama potents mõlema ringjoone ω_1 ja ω_2 suhtes. Osutub, et see on väga huvitav geomeetriline objekt, mida nimetatakse ringjoonte ω_1 ja ω_2 **radikaalteljeks**.

Teoreem 4 (Radikaaltelg)**.** *Ringjoonte ω_1 ja ω_2 radikaaltelg on sirge, mis on risti sirgega O_1O_2, kus O_1 ja O_2 on vastavalt ringjoonte ω_1 ja ω_2 keskpunktid.*

Tõestus. Seda teoreemi saab üsna lihtsasti tõestada koordinaatmeetodi abil. Huvi korral võite see tõestus iseseisvalt läbi teha. □

Järeldus 2.1: Kui ringjooned ω_1 ja ω_2 lõikuvad punktides A ja B, siis nende ringjoonte radikaaltelg on sirge AB.

Vaatleme kolme ringjoont ω_1, ω_2 ja ω_3 keskpunktidega O_1, O_2 ja O_3, mis ei asu kõik ühel sirgel. Siis kehtib järgmine tulemus:

Teoreem 5 (Radikaalkese)**.** *Olgu l_1 ringjoonte ω_1 ja ω_2 radikaaltelg, sirge l_2 ω_2 ja ω_3 radikaaltelg ning sirge l_3 ringjoonte ω_1 ja ω_3 radikaaltelg, siis sirged l_1, l_2 ja l_3 lõikuvad ühes punktis, mida nimetatakse ringjoonte ω_1, ω_2 ja ω_3 **radikaalkeskmeks**.*

2.1 Harjutused

Harjutus 2.1: Tõestada teoreem (5).

Harjutus 2.2: Tõestada, et suvalise kolmnurga ABC kõrgused lõikuvad ühes punktis.

Harjutus 2.3: Tõestada, et suvalisel kolmnurgal ABC leidub ümberringjoon, kasutades radikaaltelgi. (*Vihje:* ringjooned raadiusega 0).

3 Ülesanded

Nüüd meil on kõik vajalikud teadmised olemas, et alustada tõsisemate ülesannete lahendamisega!

3.1 Soojendus

Ülesanne 3.1: Olgu ABC kolmnurk ning P on punkt selle kolmnurga sisemuses. Eeldame, et BC puutub kolmnurkade ABP ja ACP ümberringjooni. Tõestada, et AP poolitab külje BC.

3.2 Keskmise raskusastmega ülesanded

Ülesanne 3.2: Olgu ABC kolmnurk siseringjoone keskpunktiga I. Lõikugu sirgega AI ristuv sirge läbi punkti I sirgega BC punktis M. Punktist I tõmmatud ristsirge sirgele AM lõikab vastava sirge punktis D. Tõestada, et punkt D asub kolmnurga ABC ümberringjoonel.

Ülesanne 3.3 (EGMO 2019/4)**:** Olgu I kolmnurga ABC siseringjoon. Punkti B läbiv ringjoon, mis puutub sirget AI punktis I, lõikab külge AB punktis P. Punkti C läbiv ringjoon, mis puutub sirget AI punktis I, lõikab külge AC punktis Q. Tõestage, et sirge PQ puutub kolmnurga ABC siseringjoont.

3.3 Raskemad ülesanded

Ülesanne 3.4: Kolmnurgas ABC on tõmmatud kõrgused BP ja CQ ning mediaan AM. Olgu R lõigu AM keskpunkt. Sirge PQ lõikab sirget BC punktis T. Tõestage, et $OR \perp TA$, kus O on kolmnurga ABC ümberringjoone keskpunkt.

Ülesanne 3.5 (IMO 2009/2)**:** Olgu ABC kolmnurk ümberringjoone keskpunktiga O. Olgu P ja Q kolmnurga tippudest erinevad punktid vastavalt külgedel CA ja AB. Olgu K, L ja M vastavalt lõikude BP, CQ ja PQ keskpunktid ning olgu Γ ringjoon, mis läbib punkte K, L ja M. Oletame, et sirge PQ puutub ringjoont Γ. Tõestada, et $|OP| = |OQ|$.