Talvine algebra õppesessioon (vanem rühm)
Polünoomid

Urve Kangro

20. detsember 2025

Teooria

Ühe muutuja n astme polünoom: $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, kus $a_n \neq 0$.

1. **Polünoomi juur** e. **nullkoht** on selline x_0 väärtus, et $P(x_0) = 0$. Arvu x_0 nimetatakse polünoomi k-kordseks juureks, kui $P(x_0) = 0$, $P'(x_0) = 0$, $\ldots$, $P^{(k-1)}(x_0) = 0$, $P^{(k)}(x_0) \neq 0$.

2. Kui x_0 on n astme polünoomi $P(x)$ juur, siis $P(x)$ **jagub polünoomiga** $x - x_0$, s.t. $P(x) = (x - x_0)Q(x)$, kus $Q(x)$ on $n-1$ astme polünoom.

   Kui x_0 on n astme polünoomi $P(x)$ k-kordne juur, siis $P(x)$ **jagub polünoomiga** $(x - x_0)^k$, s.t. $P(x) = (x - x_0)^k Q(x)$, kus $Q(x)$ on $n - k$ astme polünoom.

3. Jagades täisarvuliste kordajatega polünoomi täisarvuliste kordajatega polünoomiga, mille pealiikme kordaja on 1, on nii jagatis kui ka jääk täisarvuliste kordajatega polünoomid.

4. **Algebra põhiteoreem.** Igal kompleksarvuliste kordajatega polünoomil leidub vähemalt üks kompleksarvuline juur.

   Järeldusi. Igal kompleksarvuliste kordajatega polünoomil leidub täpselt n kompleksarvulist juurt (lugedes juuri koos kordsusega). Igal (reaalarvuliste kordajatega) n astme polünoomil leidub ülimalt n reaalarvulist juurt.
   Iga reaalarvuliste kordajatega polünoomi saab esitada reaalarvuliste kordajatega lineaarsete ja taandumatute ruutpolünoomide korrutisena. Iga kompleksarvuliste kordajatega polünoomi saab esitada kompleksarvuliste kordajatega lineaarsete polünoomide korrutisena.

5. Kõik täisarvuliste kordajatega polünoomi ratsionaalarvulised juured avalduvad kujul $\frac{p}{q}$, kus p ja q on vastavalt vabaliikme ja pealiikme kordaja täisarvulised jagajad (kui $a_0 = 0$, siis tuleks polünoom kõigepealt sobiva x astmega läbi jagada).

6. Olgu $P(x)$ täisarvuliste kordajatega polünoom ning olgu m suvaline täisarv. Kui $x \equiv y \pmod{m}$, siis $P(x) \equiv P(y) \pmod{m}$.

7. **Viète'i valemid.** Olgu polünoomi $P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ juured $x_1, \ldots, x_n$. Siis

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \cdots + x_n = -a_{n-1}, \\ x_1x_2 + x_1x_3 + \cdots + x_{n-1}x_n = a_{n-2} \\ \cdots \\ x_1x_2 \cdots x_n = (-1)^n a_0. \end{cases}$$

8. **Horneri skeem.** Seda kasutatakse polünoomi väärtuse arvutamiseks mingil kohal x_0 ja polünoomi jagamiseks lineaarpolünoomiga $x - x_0$.

   Olgu $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots a_1 x + a_0$. Leiame

$$b_n = a_n,\ b_{n-1} = a_{n-1} + b_n x_0,\ \ldots,\ b_1 = a_1 + b_2 x_0,\ b_0 = a_0 + b_1 x_0.$$

   Arvutused organiseerime tabelina:

x_0	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	$\cdots$	a_0
		$b_n x_0$	$b_{n-1}x_0$	$\cdots$	$b_1 x_0$
	b_n	b_{n-1}	b_{n-2}	$\cdots$	b_0

   Nüüd $P(x) = \left(b_n x^{n-1} + b_{n-1}x^{n-2} + \cdots b_1\right)(x - x_0) + b_0$ ja $p(x_0) = b_0$.

Ülesanded

1. Lahutada teguriteks polünoom $P(x) = 2x^8 + 3x^7 - 8x^6 + 3x^5 + 2x^4 + 3x^3 - 8x^2 + 3x$.

2. a) Kas leidub täisarvuliste kordajatega polünoom $P(x)$, mille korral $P(2024) = 1$, $P(2025) = 2025$ ja $P(2026) = 2026$?

   b) Kas leidub täisarvuliste kordajatega polünoom $P(x)$, mille korral $P(2024) = 2$, $P(2025) = 2025$ ja $P(2026) = 2026$?

3. Olgu $P(x)$ kuni 2025 astme täisarvuliste kordajatega polünoom, mille pealiikme kordaja on 1 ja mis rahuldab tingimusi $P(0) = 2025$, $P(1) = 2024$, $P(2) = 2023, \ldots, P(2024) = 1$. Leida kõik võimalikud $P(2025)$ väärtused.

4. Näidata, et iga naturaalarvu n korral on vähemalt üks polünoomi $P_n(x) = (x^4 + x^3 - 3x^2 + x + 2)^n$ kordajatest negatiivne.

5. a) Näidata, et kõigi positiivsete reaalarvude a, b, c korral on võrrandil

   $$(x - a)(x - b) + (x - b)(x - c) + (x - c)(x - a) = 0$$

   vähemalt 1 reaalarvuline lahend.
   b) Näidata, et kõigi positiivsete reaalarvude a_i, $i = 1, \ldots, n$ korral on võrrandil

   $$(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_{n-1})+(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_{n-2})(x-a_n)+\cdots+(x-a_2)(x-a_3)\cdots(x-a_n) = 0$$

   täpselt $n - 1$ reaalarvulist lahendit, loetud koos kordsustega.

6. Leida kõik polünoomid $P(x)$, mis rahuldavad $P(x)P(1/x) = P(x) + P(1/x)$.

7. Polünoomil $P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + 1$ kõik kordajad on mittenegatiivsed ning tal on täpselt n reaalarvulist juurt. Näidata, et $P(2) \geq 3^n$.

8. Leida kõik sellised reaalarvuliste kordajatega polünoomid $P(x)$, et

   $$(x - 2025)P(x + 23) = (x - 1)P(x)$$

   iga täisarvu x korral.

9. Leida kõik polünoomid $P(x)$, mille puhul polünoom $(x + 1)P(x - 1) - (x - 1)P(x)$ on konstantne.

10. a) Olgu $P(x)$ ruutpolünoom, mis rahuldab tingimust $|P(x)| \leq 1$ kõigi $|x| \leq 1$ korral. Milliseid väärtusi saab omada polünoomi $P(x)$ pealiikme kordaja?
    b) Olgu $P(x)$ 3. astme polünoom, mis rahuldab tingimust $|P(x)| \leq 1$ kõigi $|x| \leq 1$ korral. Milliseid väärtusi saab omada polünoomi $P(x)$ pealiikme kordaja?
    c) Kas seda saab üldistada n astme polünoomide peale?

11. Olgu $P(x)$ polünoom, mis rahuldab tingimust $P(x)P(2x^2) = P(2x^3 + x)$.
    a) Näidata, et sellel polünoomil pole reaalarvulisi juuri.
    b) Näidata, et leidub seda tingimust rahuldavaid polünoome.