# Kombinatoorika

## Eliitrühm

19. dets 2025

1. ☐ Kas kuubi küljepikkusega 4 ühe tipu ümber asuvad kolm tahku saab katta 16 mittekattuva ristkülikuga suuruses $1 \times 3$? Ristkülikuid võib "painutada" üle kuubi külgede.

2. ☐ Kolm nõida hõljuvad luudade seljas Tartu kohal, hoides end õhus konstantsel kõrgusel. Igal ajahetkel võib ainult üks neist korraga liikuda. Nõid võib sõita nii kaugele kui vähegi soovib, aga ainult suunas, mis on paralleelne sirgega, mis ühendab kaht ülejäänud nõida. Kui üks nõid alustab Delta kohal, teine 2 km põhja pool ja kolmas 4 km ida pool, siis kas on võimalik, et pärast mõne aja möödumist on esimene nõid jälle Delta kohal, teine 3 km kirde pool ja kolmas 3 km kagu pool? (Eelda, et maakera on lapik.)

3. ☐ Näita, et iga tasandi kahe värviga värvimise korral leidub kolmnurk, mille kõik kolm tippu ja mediaanide lõikepunkt on kõik sama värvi.

4. ☐ Tõesta, et
$$\sum_{k=q}^{n} \binom{n}{k}\binom{k}{q} = 2^{n-q}\binom{n}{q}$$

5. ☐ Jahimees ja nähtamatu jänes mängivad tasandil järgmist mängu. Jänese alguspunkt $A_0$ ja jahimehe alguspunkt $B_0$ on samad. Pärast $n-1$ käiku on jänes punktis $A_{n-1}$ ja jahimees on punktis $B_{n-1}$. Järgmisel, $n$-ndal käigul toimub üksteise järel kolm asja.

   (a) Jänes liigub nähtamatult punkti $A_n$, nii et punktide $A_{n-1}$ ja $A_n$ vaheline kaugus on täpselt 1.

   (b) Jälitusseade näitab jahimehele punkti $P_n$. On teada, et punktide $P_n$ ja $A_n$ vaheline kaugus pole rohkem kui 1.

   (c) Jahimees liigub nähtavalt punkti $B_n$, nii et punktide $B_{n-1}$ ja $B_n$ vaheline kaugus on täpselt 1.

   Kas jahimees saab valida oma käigud nii, et ükskõik kuidas jänes liigub ja ükskõik milliseid punkte näitab jälitusseade, on tema kaugus jänesest pärast $10^9$ käiku mitte rohkem kui 100?

6. ☐ Graafil on $N$ tippu. Nähtamatu küülik istub ühes tipus. Jahimeeste punt proovib küülikut tappa. Iga käiguga tulistavad nad kõik üheaegselt: iga jahimees laseb üht tippu, sihttipud on jahimeestel kooskõlastatud. Kui küülik oli lasu ajal ühes sihttipus, siis jaht lõppeb. Vastasel juhul võib küülik oma tipus püsida või mõnda naabertippu hüpata. Jahimeestel on teada algoritm, mille abil tabavad nad küüliku maksimaalselt $N!$ käiguga. Tõesta, et sel juhul leidub algoritm, mille abil saab küüliku tabada maksimaalselt $2^N$ käiguga.

7. ☐ Olgu meil $2000 \times 2002$ piksliga ekraan. Alguses on rohkem kui $1999 \cdot 2001$ pikslit sisse lülitatud. Igas $2 \times 2$ piksliga ruudukeses kehtib järgmine reegel: kohe, kui kolm pikslit on välja lülitatud, lülib välja ka neljas piksel. Tõesta, et selle reegliga ei lüli välja kogu ekraan.

8. ☐ Olgu $m$ positiivne täisarv. Vaatame malelauda, mis koosneb $m \times m$ ühikruudust. Mõningate ühikruutude keskpunktides on sipelgad. Ajahetkel 0 hakkab iga sipelgas liikuma kiirusega 1 paralleelselt mõne malelaua äärega. Kui kaks vastassuundades liikuvat sipelgat kohtuvad, siis pööravad nad mõlemad $90^\circ$ võrra päripäeva ja jätkavad liikumist kiirusega 1. Kui kohtuvad korraga rohkem kui kaks sipelgat või kaks ristisuundades liikuvat sipelgat, siis jätkavad nad liikumist samas suunas nagu enne kohtumist. Kui sipelgas jõuab malelaua ääreni, kukub ta maha.

   Vaadates kõiki võimalikke algseise, leia viimane võimalik ajahetk, mil viimane sipelgas maha kukub, või tõesta, et sellist hetke pole olemas.