1 Ülesanded

1.1 Soojendus

Ülesanne 1.1: Olgu ABC kolmnurk ning P on punkt selle kolmnurga sisemuses. Eeldame, et BC puutub kolmnurkade ABP ja ACP ümberringjooni. Tõestada, et AP poolitab külje BC.

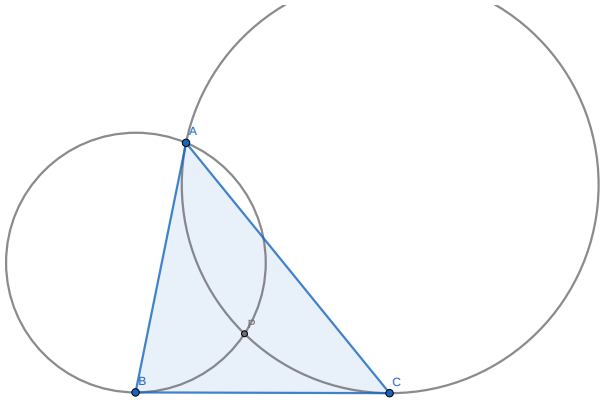
Lahendus. See, et AP poolitab külje BC, on ilmselt samaväärne sellega, et külje BC keskpunkt M asub sirgel AP. Paneme tähele, et AP on ringjoonte (ABP) ja (ACP) radikaaltelg. Seega ülesande lahendamiseks piisab nüüd näidata, et $\mathrm{Pow}_{(ABP)}(M) = \mathrm{Pow}_{(ACP)}(M)$. Kuna mõlemad ringjooned (ABP) ja (ACP) puutuvad külge BC vastavalt punktides B ja C, siis

$$\mathrm{Pow}_{(ABP)}(M) = |MB|^2, \quad \mathrm{Pow}_{(ACP)}(M) = |MC|^2$$

ning samuti $|MB| = |MC|$, kuna M on külje BC keskpunkt. Kokkuvõttes,

$$\mathrm{Pow}_{(ABP)}(M) = \mathrm{Pow}_{(ACP)}(M) = |MB|^2$$

ehk punkt M tõepoolest asub radikaalteljel AP.



Joonis 1: Ülesanne 1.1

1.2 Keskmise raskusastmega ülesanded

Ülesanne 1.2: Olgu ABC kolmnurk siseringjoone keskpunktiga I. Lõikugu sirgega AI ristuv sirge läbi punkti I sirgega BC punktis M. Punktist I tõmmatud ristsirge sirgele AM lõikab vastava sirge punktis D. Tõestada, et punkt D asub kolmnurga ABC ümberringjoonel.

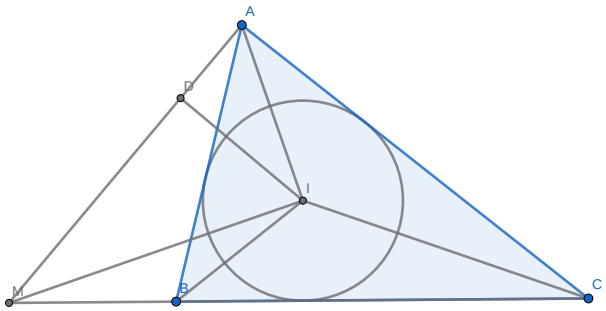
Lahendus. Esiteks, paneme tähele, et sirge MI puutub ringjoont (IDA) punktis I. See järeldub lihtsast nurkade arvutamisest ning puutuja ja kõõlu teoreemist. Seega meil kehtib järgmine võrdus:

$$|MI|^2 = |MD| \cdot |MA|.$$

Nüüd ülesande lahendamiseks piisab näidata, et $|MD| \cdot |MA| = |MB| \cdot |MC|$.
Selleks näitame kõigepealt, et sirge MI tegelikult puutub ringjoont (BIC). Tõepoolest, ringjoone (BIC) ümberringjoone keskpunkt on Olegi punkt (mida selles lahenduses tähistame nt tähega O), mis asub sirgel AI. Siis $MI \perp OI$, kus OI on ringjoone raadius ja I on ringjoone punkt. Järelikult, MI on tõepoolest puutuja ringjoonele (BIC), millest järeldub, et $|MI|^2 = |MB| \cdot |MC|$. Kokkuvõttes,

$$|MA| \cdot |MD| = |MB| \cdot |MC|$$

ehk $ABCD$ on kõõlnelinurk, nagu vaja.



Joonis 2: Ülesanne 1.3

Ülesanne 1.3 (EGMO 2019/4)**:** Olgu I kolmnurga ABC siseringjoon. Punkti B läbiv ringjoon, mis puutub sirget AI punktis I, lõikab külge AB punktis P. Punkti C läbiv ringjoon, mis puutub sirget AI punktis I, lõikab külge AC punktis Q. Tõestage, et sirge PQ puutub kolmnurga ABC siseringjoont.

Lahendus. Selle ülesande lahendamiseks näitame, et I on nelinurga $BPQC$ siseringjoone keskpunkt ehk nurgapoolitajate lõikepunkt. Nurkade $\angle B$ ja $\angle C$ poolitajad juba lõikuvad seal. Seega ülesande lahendamiseks piisab näidata, et PI ja QI on vastavalt nurkade BPQ ja PQC poolitajad. Alustame järgmisest tähelepanekust:

Lemma 1. *Nelinurk $BPQC$ on kõõlnelinurk.*

Tõestus. Kasutame selleks punkti potentsi. Kuna sirge AI puutub ringjooni (CIQ) ja (BIP) punktis I, siis järelikult kehtivad võrdused:

$$|AP| \cdot |AB| = |AI|^2 = |AQ| \cdot |AC|$$

ehk võrdus $|AP| \cdot |AB| = |AQ| \cdot |AC|$, mis on tõepoolest samaväärne sellega, et $BPQC$ on kõõlnelinurk. □

Tähistame kolmnurga nurgad tavalisel viisil:

$$\begin{cases} \angle B = 2\beta, \\ \angle A = 2\alpha, \\ \angle C = 2\gamma. \end{cases}$$

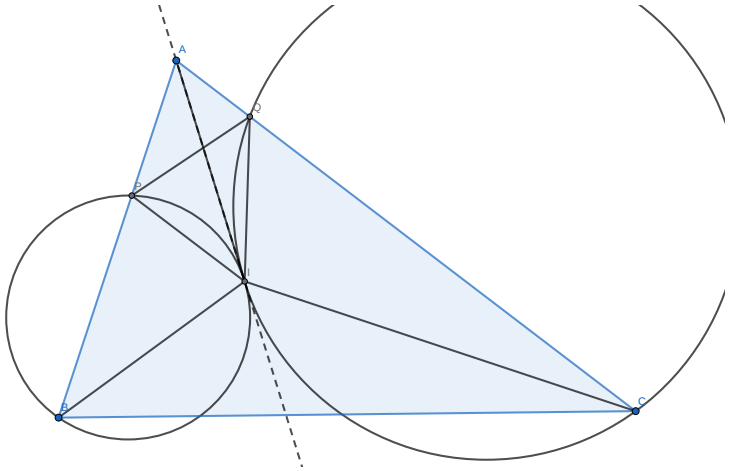
Kuna $BPQC$ on kõõlnelinurk, siis $\angle BQC = 180^\circ - 2\beta$. Samas aga

$$\angle IQC = 180^\circ - \angle AQI = \angle IAQ + \angle AIQ = \angle IAQ + \angle QCI = \alpha + \gamma.$$

Nüüd arvutame välja nurga IQP suuruse:

$$\angle IQP = \angle PQC - \angle IQC = 180^\circ - 2\beta - \alpha - \gamma = 90 - \beta = \alpha + \beta$$

ehk näeme, et $\angle PQI = \angle CQI$ ehk IQ on tõepoolest nurga PQC nurgapoolitaja. Täpselt analoogiliselt näitame, et ka IP on nurga BPQ poolitaja. Sellega on ülesanne lahendatud.



Joonis 3: Ülesanne 1.4

1.3 Raskemad ülesanded

Ülesanne 1.4: Kolmnurgas ABC on tõmmatud kõrgused BP ja CQ ning mediaan AM. Olgu R lõigu AM keskpunkt. Sirge PQ lõikab sirget BC punktis T. Tõestage, et $OR \perp TA$, kus O on kolmnurga ABC ümberringjoone keskpunkt.

Lahendus. Kuna O on (ABC) keskpunkt, siis ülesande lahendamiseks piisaks leida mingi teine ringjoon Ω, mille keskpunktiks oleks R ning TA oleks (ABC) ja Ω radikaaltelg. Osutub, et selleks ringjooneks on ringjoon keskpunktiga R ning raadiusega $|RM| = |RA|$. Selle väite tõestamiseks vajame esmalt mõningaid lemmasid.

Lemma 2. *Punktid A, D, Q, H ja P asuvad kõik ühel ringjoonel.*

Tõestus. Me teame, et $ADBC$ ja $PQBC$ on mõlemad kõõlnelinurgad, seega punkti potentsist nende ringjoonte suhtes saame võrdused

$$|TD| \cdot |TA| = |TB| \cdot |TC|, \qquad |TQ| \cdot |TP| = |TB| \cdot |TC|$$

ehk $|TD| \cdot |TA| = |TQ| \cdot |TP|$, mis omakorda tähendab, et nelinurk $ADQP$ on kõõlnelinurk. Lisaks nelinurk $APHQ$ on ka kõõlnelinurk. Seega tõepoolest kõik punktid A, D, Q, H ja P asuvad ühel ringjoonel. □

Lemma 3. *Punktid D, H ja M asuvad ühel sirgel.*

Tõestus. Kuna $\angle APH = 90°$, siis ka $\angle HDA = 90°$ (sest ringjoone $(ADQHP)$ diameeter on lõik AH). Olgu $A' = HD \cap (ABC)$. Siis $\angle AA'D = 90°$ ehk A' on punkti A diametraalne vastand. Samas aga on üsna tuntud fakt (proovige see iseseisvalt ära tõestada, kui varem seda näinud ei ole), et sirge HM lõikab ringjoont (ABC) samuti punktis A'. Me saime, et

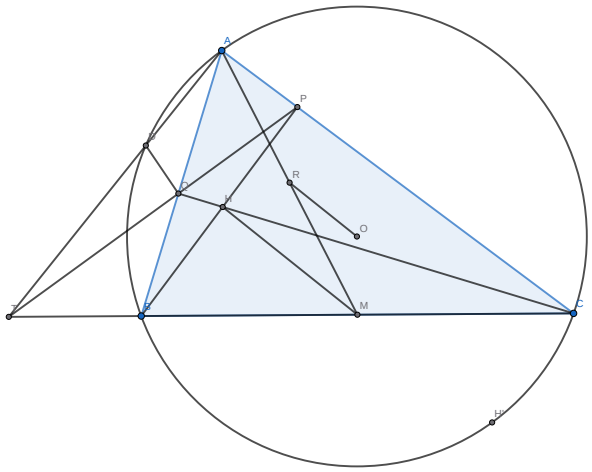
$$D - H - A' \quad \text{ja} \quad H - M - A'$$

Kokkuvõttes, punktid D, H ja M tõepoolest asuvad ühel sirgel. □

Lemmadest (2) ja (3) järeldub nüüd, et kolmnurk MDA on täisnurkne, seega tema ümberringjoone keskpunkt on hüpotenuusi keskpunkt, milleks on R. Samuti ringjooned (ABC) ja (ADM) lõikuvad üksteisega just punktides A ja D. Seega nende kahe ringjoone radikaalteljeks on TA ning kuna ringjoonte keskpunktidesk on O ja R, siis saamegi, et

$$TA \perp OR,$$

nagu vaja (see kehtib, sest radikaaltelg on alati risti sirgega, mis ühendab vastavate ringjoonte keskpunkte).



Joonis 4: Ülesanne 1.4

Ülesanne 1.5 (IMO 2009/2)**:** Olgu ABC kolmnurk ümberringjoone keskpunktiga O. Olgu P ja Q kolmnurga tippudest erinevad punktid vastavalt külgedel CA ja AB. Olgu K, L ja M vastavalt lõikude BP, CQ ja PQ keskpunktid ning olgu Γ ringjoon, mis läbib punkte K, L ja M. Oletame, et sirge PQ puutub ringjoont Γ. Tõestada, et $|OP| = |OQ|$.

Lahendus. Selle ülesande lahendus põhineb ühel kavalal ideel, mida me sõnastame järgmise lemmana:

Lemma 4. *Ülesande lahendamiseks piisab näidata, et* $\mathrm{Pow}_{(ABC)}(Q) = \mathrm{Pow}_{(ABC)}(P)$.

Tõestus. Punkti potentsi definitsioonist järeldub, et

$$\begin{aligned}\mathrm{Pow}_{(ABC)}(Q) = \mathrm{Pow}_{(ABC)}(P) &\iff |OP|^2 - R^2 = |OQ|^2 - R^2 \\ &\iff |OP|^2 = |OQ|^2 \\ &\iff |OP| = |OQ|.\end{aligned}$$

□

Seega nüüd katsume tõestada, et $|QB| \cdot |QA| = |PC| \cdot |PA|$, sest kui selle ära näitame, siis, arvestades seda, et mõlemad punktid P ja Q asuvad ringjoone (ABC) sees, saaksime kohe kätte võrduse $\mathrm{Pow}_{(ABC)}(Q) = \mathrm{Pow}_{(ABC)}(P)$. Osutub, et kehtib järgmine tulemus:

Lemma 5. *Kolmnurgad PAQ ja KML on sarnased.*

Tõestus. Paneme tähele, et KM ja ML on kesklõigud vastavalt kolmnurkades BQP ja CPQ, seega

$$\angle QMK = \angle AQP, \qquad \angle PML = \angle APQ;$$

ning samas, kuna sirge PQ puutub ringjoont (KLM) punktis M, puutuja ja kõõlu teoreemi kohaselt meil kehtivad lisaks võrdused

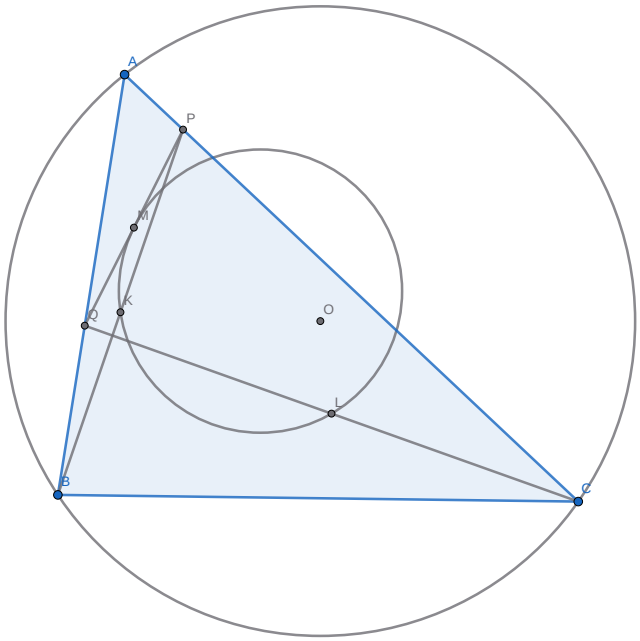
$$\angle QMK = \angle KLM, \qquad \angle PMl = \angle MKL.$$

Kokkuvõttes, $\angle MKL = \angle APQ$ ning $\angle KLM = \angle AQP$ ehk kolmnurgad PAQ ja KML on tõepoolest sarnased NN tunnuse põhjal. □

Nüüd kolmnurkade sarnasusest tuleneb järgmine võrdus:

$$\frac{|QA|}{|PA|} = \frac{|ML|}{|MK|} = \frac{2|ML|}{2|MK|} = \frac{|PC|}{|QB|},$$

mis on küll samaväärne võrdusega $|QA| \cdot |QB| = |PA| \cdot |PC|$, millest järeldub ülesande küsimus!



Joonis 5: IMO 2009/2