

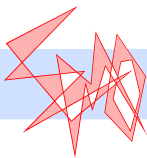
# Piirkonnavor 2026

<b>Ülesanded</b>	<b>1</b>	<b>Lahendused</b>	<b>36</b>
7. klass . . . . .	1	7. klass . . . . .	36
8. klass . . . . .	3	8. klass . . . . .	38
9. klass . . . . .	5	9. klass . . . . .	40
7. klass . . . . .	7	7. klass . . . . .	42
8. klass . . . . .	8	8. klass . . . . .	47
9. klass . . . . .	9	9. klass . . . . .	51
10. klass . . . . .	10	10. klass . . . . .	56
11. klass . . . . .	11	11. klass . . . . .	65
12. klass . . . . .	12	12. klass . . . . .	74
<b>Ülesanded vene keeles</b>	<b>13</b>	<b>Põhikooli hindamisjuhised</b>	<b>80</b>
7 класс . . . . .	13	Üldjuhend . . . . .	80
8 класс . . . . .	15	7. klass . . . . .	82
9 класс . . . . .	17	8. klass . . . . .	83
7 класс . . . . .	19	9. klass . . . . .	84
8 класс . . . . .	20	7. klass . . . . .	85
9 класс . . . . .	21	8. klass . . . . .	87
10 класс . . . . .	22	9. klass . . . . .	89
11 класс . . . . .	23	<b>Gümnaasiumi hindamiskeemid</b>	<b>91</b>
12 класс . . . . .	24	10. klass . . . . .	91
<b>Ülesanded inglise keeles</b>	<b>25</b>	11. klass . . . . .	95
Grade 7 . . . . .	25	12. klass . . . . .	100
Grade 8 . . . . .	27	<b>Põhikooli kommentaarid</b>	<b>104</b>
Grade 9 . . . . .	29	Kokkuvõte . . . . .	104
Grade 7 . . . . .	31	7. klass . . . . .	105
Grade 8 . . . . .	32	8. klass . . . . .	107
Grade 9 . . . . .	33	9. klass . . . . .	109
Grade 11 . . . . .	34		
Grade 12 . . . . .	35		

## Võistluskomplekti valmimisse panustasid:

Artur Avameri  
Artur Bentsa  
Alekssei Ganyukov  
Maksim Ivanov  
Raul Kangro

Urve Kangro  
Oleg Košik  
Härmel Nestra  
Hendrik Vija  
Jan Villemson



# Eesti 73. matemaatikaolümpiaad

28. jaanuar 2026

Piirkonnavoore

7. klass

**I osa.** Lahendamisaega on 30 minutit.

Sellele lehele kirjuta ainult vastused, lahendamiseks võid kasutada lisapaberit.

Iga ülesande õige ja lihtsustatud kujul vastus on väärt 2 punkti.

Elektroonilised ega kirjalikud abivahendid ei ole lubatud.

Kood

1. Arvuta:

$$(777 - 77 \cdot 7 + 7 \cdot 7 \cdot 7) : 7 = \dots\dots\dots$$

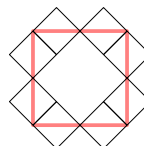
2. Arvude  $a$ ,  $b$  ja  $c$  aritmeetiline keskmine on 7. Arvude  $a$  ja  $b$  aritmeetiline keskmine on 5. Leia arv  $c$ .

.....

3. Arvu 2026 jagamisel naturaalarvuga  $n$  saame sama jäägi mis arvu 2026 jagamisel arvuga 3. Leia vähim võimalik  $n$ , kui on teada, et  $n \neq 3$ .

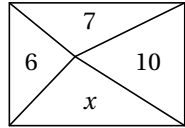
.....

4. Lauril on 8 ruudukujulist kaarti küljepikkusega 1 dm. Igal kaardil tõmbab ta ühe diagonaali ja paigutab siis kõik kaardid lauale nii, et tõmmatud diagonaalidest tekib üks ruut (vt joonis). Leia selle ruudu pindala.



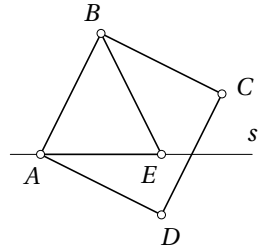
.....

5. Ristküliku sees olevast punktist tõmmatakse lõigud ristküliku kõigisse tippudesse. Saadud nelja kolmnurga pindalad on  $6 \text{ cm}^2$ ,  $7 \text{ cm}^2$ ,  $10 \text{ cm}^2$  ja  $x \text{ cm}^2$  (vt joonis). Leia  $x$ .



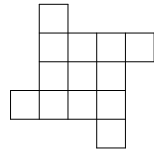
.....

6. Joonisel on ruut  $ABCD$  ja võrdhaarne kolmnurk  $AEB$ , mille alus asub sirgel  $s$ . On teada, et nurga  $DAE$  suurus on  $24^\circ$ . Leia nurga  $DBE$  suurus.



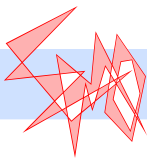
.....

7. Joonisel ülal on ruudustik, mis koosneb 13 ühikruudust, all aga 3 ühikruudust koosnev nurgik. Mitu erinevat võimalust on nurgiku paigutamiseks ruudustikule nii, et nurgiku kõik ühikruudud kataksid täpselt ruudustiku ruute? Nurgikut võib pöörata.



.....





# Eesti 73. matemaatikaolümpiaad

28. jaanuar 2026

Piirkonnavoore

8. klass

**I osa.** Lahendamisaega on 30 minutit.

Sellele lehele kirjuta ainult vastused, lahendamiseks võid kasutada lisapaberit.

Iga ülesande õige ja lihtsustatud kujul vastus on väärt 2 punkti.

Elektroonilised ega kirjalikud abivahendid ei ole lubatud.

Kood

1. Arvuta:

$$\frac{7}{8} \cdot \frac{6}{7} \div \frac{5}{6} \div \frac{4}{5} \div \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} \div \frac{1}{2} = \dots\dots\dots$$

2. Leia arv  $c$  võrdustest

$$a + b + 2c = -8$$

ja

$$2a + 2b + c = 8.$$

.....

3. Kalev kirjutab paberile kõik numbritest 2, 0, 2 ja 6 moodustuvad ühe- ja kahekohalised positiivsed täisarvud (kokku 7 arvu). Seejärel kustutab ta ühe kahekohalise arvu nii, et järelejäänud arvude summa jagub arvuga 3. Millise arvu Kalev kustutab?

.....

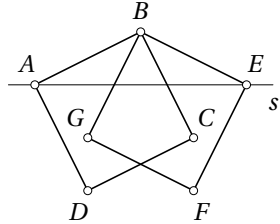
4. Arv 2026 võrdub nelja järjestikuse paaritu arvu aritmeetilise keskmisega. Leia neist neljast arvust suurim.

.....

5. Võrdhaarsete kolmnurkade  $ABC$  ja  $ABD$  alused, vastavalt  $BC$  pikkusega 8 cm ja  $AD$  pikkusega 18 cm, lõikuvad punktis  $O$  ja on omavahel risti. Leia viisnurga  $ABDOC$  pindala.

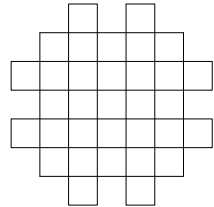
.....

6. Kahe võrdse ruudu  $ABCD$  ja  $BEFG$  tipud  $A$  ja  $E$  asuvad sirgel  $s$  (vt joonist). On teada, et nurk  $AEF$  on 2 korda suurem nurgast  $GBC$ . Leia nurga  $GBC$  suurus.



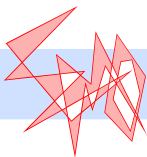
.....

7. Joonisel ülal on ruudustik, mis koosneb 33 ühikruudust, all aga 5 ühikruudust koosnev rist. Mitu erinevat võimalust on risti paigutamiseks ruudustikule nii, et risti kõik ühikruudud kataksid täpselt ruudustiku ruute? Loeme, et risti pööramine  $90^\circ$  võrra ümber oma keskpunkti paigutust ei muuda.



.....





# Eesti 73. matemaatikaolümpiaad

28. jaanuar 2026

Piirkonnavoore

9. klass

**I osa.** Lahendamisaega on 30 minutit.

Sellele lehele kirjuta ainult vastused, lahendamiseks võid kasutada lisapaberit.

Iga ülesande õige ja lihtsustatud kujul vastus on väärt 2 punkti.

Elektroonilised ega kirjalikud abivahendid ei ole lubatud.

Kood

1. Leia  $x$  võrdusest  $5 - (6 - (7 - (8 - x))) = 9$ .

.....

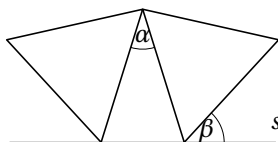
2. Leia vähim naturaalarv  $n$ , mille korral summa  $2026 + n$  jagub arvuga 5 ja vahe  $2026 - n$  jagub arvuga 9.

.....

3. Tehe  $\diamond$  on kõigil arvuadel defineeritud võrdusega  $a \diamond b = 10a - b$ . Leia  $x$  võrdusest  $2 \diamond (x \diamond 6) = 2026$ .

.....

4. Joonisel on kaks võrdset võrdkülgset kolmnurka. Mõlema kolmnurga üks tipp asub sirgel  $s$ . Märgitud nurkade suuruste  $\alpha$  ja  $\beta$  summa on  $90^\circ$ . Leia  $\alpha$ .



.....

5. Võrdhaarse kolmnurga tipunurga suurus on  $30^\circ$  ja aluse pikkus on 30 cm. Leia selle kolmnurga ümberringjoone pikkus.

.....

6. Arvud  $a$ ,  $b$ ,  $c$  ja  $d$  rahuldavad tingimusi

$$\frac{ab}{cd} = 8$$

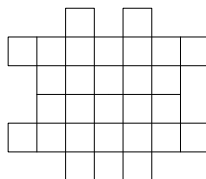
ja

$$\frac{a}{c} + \frac{d}{b} = 1.$$

Leia  $\frac{b}{d}$ .

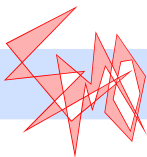
.....

7. Joonisel ülal on ruudustik, mis koosneb 28 ühikruudust, all aga 5 ühikruudust koosnev kujund. Mitu erinevat võimalust on kujundi paigutamiseks ruudustikule nii, et kujundi kõik ühikruudud kataksid täpselt ruudustiku ruute? Kujundit võib pöörata.



.....





## Eesti 73. matemaatikaolümpiaad

28. jaanuar 2026

Piirkonnavoor

7. klass

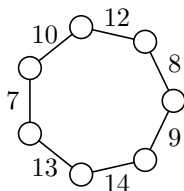
**II osa.** Lahendamisaega on 3 tundi.

Ülesannete lahendused kirjuta eraldi lehele.

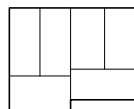
Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti. Ainult vastusest ei piisa!

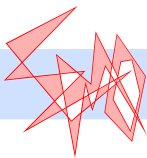
Elektroonilised ega kirjalikud abivahendid ei ole lubatud.

1. Kui ostetakse korraga 10 kuni 20 paari sokke, siis kogu ostule kehtib allahindlus 20%. Kui ostetakse korraga rohkem kui 20 paari sokke, siis kehtib allahindlus 30%. Andri ostab 5 paari, Oliver 10 paari ja Kevin 15 paari sokke, kusjuures iga poiss teeb oma ostu eraldi. Kõik sokid on ühesugused. Mitme protsendi võrra kolme arve summast väiksem oleks koondarve, kui poisid sooritaksid ostu ühiselt?
2. Igasse ringi kirjutatakse üks arv nii, et iga lõigu juurde märgitud arv võrdub selle lõigu otstes olevatesse ringidesse kirjutatud arvude summaga.
  - a) Leia kõigisse ringidesse kirjutatavate arvude summa.
  - b) Leia kõik arvud, mis esinevad mitmes ringis.
3. Arvus 2026 tuleb üks number suurendada ja mingi teine number vähendada nii, et saadud neljakohaline arv jaguks arvuga 4. Mitu erinevat võimalust selleks on?



4. Joonisel on kuusnurk jaotatud kuueks võrdse pindalaga ristkülikuks. Neist kolm ristkülikut on omavahel võrdsed ja ka ülejäänud kolm ristkülikut on omavahel võrdsed. Iga ristküliku iga külje pikkus on täisarv sentimeetreid ning pikema ja lühema külje pikkuste jagatis on väiksem kui 3. Leia selle kuusnurga pindala, kui kuusnurga ümbermõõt on 272 cm.





## Eesti 73. matemaatikaolümpiaad

28. jaanuar 2026

Piirkonnavoore

8. klass

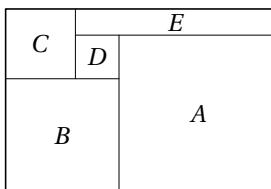
**II osa.** Lahendamisaega on 3 tundi.

Ülesannete lahendused kirjuta eraldi lehele.

Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti. Ainult vastusest ei piisa!

Elektroonilised ega kirjalikud abivahendid ei ole lubatud.

1. Suures pähklikapis on 3 korda rohkem pähkleid kui väikses ja suur pakk maksab 6,3 euro võrra rohkem kui väike. Suure paki pähkli keskmine hind on väikse paki pähkli keskmisest hinnast 20% võrra madalam, kusjuures pähkli keskmine hind kummaski pakis on täisarv sente. Leia suurim võimalik pähklite arv väikses pakis.
2. Tehe  $\diamond$  on kõigil arvudel defineeritud võrdusega  $a \diamond b = a^2 - b$ . Leia avaldise  $x \diamond y$  kõik võimalikud väärtused, kui  $x$  ja  $y$  on täisarvud, mille korral  $44 \diamond (x \diamond (y \diamond 26)) = 2026$ .
3. Laual on 6 kivi, mis nummerdatud naturaalarvudega 1 kuni 6. Ats ja Pets teevad kordamööda käike, Ats alustab. Oma käigul võib mängija võtta laualt ühe kivi endale, kuid kivi numbriga  $k$  tohib võtta vaid juhul, kui sama mängija ei ole endale varem võtnud ühtegi kivi, mille number on  $k$  kordne. Kui mängija ei saa reeglipäraselt ühtegi kivi võtta, siis jätab ta käigu vahele. Mäng lõpeb, kui kumbki mängija ei saa reeglipäraselt kive võtta. Mängu võidab see, kelle kivide numbrite summa mängu lõpul on suurem (võrdse summa korral jääb mäng viiki). Kas emmal-kummal mängijal on võimalik võita vastase mistahes vastumängu korral ja kui jah, siis kellel?
4. Suur ristkülik on jagatud neljaks ruuduks  $A$ ,  $B$ ,  $C$  ja  $D$  ning ristkülikuks  $E$ .



- a) Sirge, millel asub ruudu  $B$  diagonaal, jaotab ristküliku  $E$  kaheks osaks. Kas vasakpoolse osa pindala on suurem, väiksem või niisama suur kui parempoolse osa pindala?
- b) On teada, et suure ristküliku pindala on ruudu  $B$  pindalast 3,8 korda suurem. Kas ruudu  $D$  pindala on suurem, väiksem või niisama suur kui ristküliku  $E$  pindala?



## Eesti 73. matemaatikaolümpiaad

28. jaanuar 2026

Piirkonnavoor

9. klass

**II osa.** Lahendamisaega on 4 tundi.

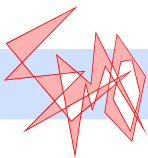
Ülesannete lahendused kirjuta eraldi lehele.

Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti. Ainult vastusest ei piisa!

Elektroonilised ega kirjalikud abivahendid ei ole lubatud.

1. Mari kirjutab paberile vahedeta üksteise järel kõik positiivsed täisarvud, mis ei jagu arvuga 3, alustades vähimast ja jätkates järjest suurematega. Leia saadava pika arvu 2026. number.
2. Kui palju leidub erinevaid täisarvukolmikuid  $(a, b, c)$ , mis rahuldavad võrdsi  $ab + bc + ca = 1$  ja  $a + b = c$  ning kus üks arvudest  $a$ ,  $b$  ja  $c$  on 3?
3. Teravnurkse kolmnurga  $ABC$  tippudest  $B$  ja  $C$  tõmmatud kõrguste pikendused üle aluspunkti lõikavad kolmnurga  $ABC$  ümberringjoont vastavalt punktides  $M$  ja  $N$ , mis on kolmnurga  $ABC$  ümberringjoone diameetri ots-punktid. Leia nurga  $BAC$  suurus.
4. Joonisel on ruudustik mõõtmetega  $8 \times 6$ , millel on näha kolme nupu 1, 2 ja 3 esialgsed asukohad. Iga nupu saab ühe käiguga liigutada vaid naaberruudule üle ühise külje, kusjuures käia ei tohi ruudule, millel on mängu käigus mõni nupp juba olnud. Juku sooritab reeglite kohaselt iga nupuga ühe ja sama arvu käike. Lõpptulemusena on nupud ruutudel A, B ja C mingis järjestuses. Leia kõik võimalused, mitu käiku võib Juku iga nupuga teha.

	①				
		②		③	
	A			B	C



## Eesti 73. matemaatikaolümpiaad

28. jaanuar 2026

Piirkonnavoore

10. klass

*Lahendamisaega on 5 tundi.*

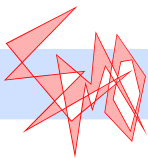
*Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti.*

*Elektroonilised ega kirjalikud abivahendid ei ole lubatud.*

1. Järjesta kasvavalt arvud  $\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{12}{7}}$ ,  $\left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{12}{5}}$  ja 2.
2. Leia kõik sellised reaalarvude paarid  $(p, q)$ , mille korral on ruutvõrrandi  $x^2 + px + q = 0$  lahendiks nii  $p$  kui ka  $q$ .
3. Kalkulaatori ekraanil on alul arv 1. Kalkulaatoril on kaks nuppu:
  - 1) esimene nupp liidab ekraanil olevale arvule 3;
  - 2) teine nupp korrutab ekraanil oleva arvu 4-ga.Kas kalkulaatori ekraanile on võimalik saada
  - a) arv 2025?
  - b) arv 2026?
4. Leia kõik positiivsete täisarvude paarid  $(a, b)$ , mille korral

$$a + ab + b = a^2 + b^2.$$

5. Täisnurkse trapetsi diagonaalid pikkusega 3 cm ja 4 cm on omavahel risti. Leia selle trapetsi kõrgus ja aluste pikkused.
6. On antud positiivne täisarv  $n$ ,  $n \geq 3$ . Juku kirjutab korrapärase  $n$ -nurga igasse tippu ühe positiivse täisarvu, mis pole suurem kui  $n$ , nii et erinevates tippudes on erinevad arvud. Seejärel kirjutab ta  $n$ -nurga sisse suurima arvu, mis esitub  $n$ -nurga mingi külje otspunktidesse kirjutatud kahe arvu summana. Leia vähim võimalik  $n$ -nurga sisse kirjutatav arv.



## Eesti 73. matemaatikaolümpiaad

28. jaanuar 2026

Piirkonnavoore

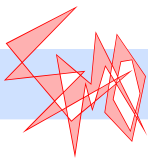
11. klass

Lahendamisaega on 5 tundi.

Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti.

Elektroonilised ega kirjalikud abivahendid ei ole lubatud.

1. Leia avaldise  $\frac{1}{a} - a$  väärtus, kui  $a = \sqrt{2026} - \sqrt{2025}$ .
2. Võrdkülgne kolmnurk  $ABC$  küljepikkusega 1 asub koordinaattasandil nii, et mediaanide lõikepunkt asub koordinaatide alguspunktis ja tipp  $A$  asub  $x$ -teljel. Leia kõik võimalused, millised saavad olla kolmnurga  $ABC$  tippude koordinaadid.
3. Leia kõik sellised erinevate numbritega kahekohalised naturaalarvud  $n$ , et arvu  $n$  ja temast numbrite järjekorra ümberpööramisele saadud arvu ruutu-  
de vahe on samuti mingi täisarvu ruut.
4. Leia kõik positiivsed reaalarvud  $k$ , mille korral leiduvad sellised positiivsed reaalarvud  $a$ ,  $b$  ja  $c$ , et ruutvõrranditest  $ax^2 + kbx + c = 0$ ,  $bx^2 + kcx + a = 0$  ja  $cx^2 + kax + b = 0$  igal juhul on kaks erinevat reaalarvulist lahendit.
5. Kolmnurga  $ABC$  siseringjoone puutepunktid külgedega  $BC$ ,  $CA$  ja  $AB$  on vastavalt  $D$ ,  $E$  ja  $F$  ning ümberringjoone lõikepunktid tippude  $A$ ,  $B$  ja  $C$  juures olevate sisenurkade poolitajatega on vastavalt  $K$ ,  $L$  ja  $M$  ( $K \neq A$ ,  $L \neq B$ ,  $M \neq C$ ). Tõesta, et kolmnurgad  $DEF$  ja  $KLM$  on sarnased.
6. Kooli tenniseõhtule saabub 4 mängijat, kellest üks on Juku. Nende mängijate seast loositakse välja 2 erinevat paari (vähemalt üks mängija on neis paarides erinev). Kumbki paar mängib omavahel ühe näidismatši. Leia tõenäosus, et Juku ei osale kummaski matšis, kui iga võimaliku 2 paari kombinatsiooni väljaloosimise tõenäosus on üks ja sama.



## Eesti 73. matemaatikaolümpiaad

28. jaanuar 2026

Piirkonnavoor

12. klass

Lahendamisaega on 5 tundi.

Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti.

Elektroonilised ega kirjalikud abivahendid ei ole lubatud.

### 1. Leia avaldise

$$(1 + 2 + \dots + 20) \cdot 26 - (1 + 2 + \dots + 26) \cdot 20$$

väärtus.

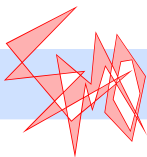
2. Sirged, mis puutuvad funktsiooni  $y = ax^2 + bx + c$  graafikut erinevates punktides  $A$  ja  $B$ , lõikuvad punktis  $L$ . Leia punkti  $L$  ja lõigu  $AB$  keskpunkti  $x$ -koordinaatide vahe.

### 3. Leia kõik tingimust

$$p^a + p^b = q^2$$

rahuldavad nelikud  $(p, q, a, b)$ , kus  $p$  ja  $q$  on algarvud ning  $a$  ja  $b$  on mitte-negatiivsed täisarvud.

4. Arno ja Teele mängivad lumesõda. Esimesel rünnakul viskab Arno Teele suunas ühe lumekuuli. Alati, kui kumbki neist saab vastase rünnakul pih-ta mingi arvu lumekuulidega, viskab ta oma järgneval rünnakul teise suunas sellest kaks korda suurema arvu kuule. Mõlemad mängijad tabavad alati vähemalt 75% enda rünnakul visatud kuulidest. Tõesta, et Arno ja Teele jõuavad mängida vähem kui 13 täisvooru, enne kui õues pimedaks läheb (voor koosneb Arno rünnakust ja sellele järgnevast Teele rünnakust). Eeldame, et valget aega on päeval 8 tundi ning iga lumekuuli viskamiseks kulub 1 sekund.
5. Lõpmatu jada liikmed on teravnurksed kolmnurgad. Alates teisest liikmest on iga kolmnurga tippudeks eelmise kolmnurga kõrguste aluspunktid. Tõesta, et selle jada kõik kolmnurgad on võrdkülgised.
6. Juku kirjutab vihikusse  $n$  erinevat täisarvu,  $n > 1$ . Miku vaatab Juku vihikut ning kirjutab tahvliile omal valikul ühe avaldise kujul  $a + b$  või  $a - b$ , kus  $a$  ja  $b$  on mingid erinevad täisarvud Juku vihikus. Miku võidab, kui tema kirjutatud avaldise väärtus jagub arvuga 2026, vastasel juhul võidab Juku. Leia vähim  $n$ , mille korral Mikul on võimalik võita, ükskõik millised arvud Juku ka ei kirjutaks.



# 73-я Олимпиада Эстонии по математике

28 января 2026 г.

Региональный тур

7 класс

**I часть.** *Время, отводимое для решения: 30 минут.*

*На этом листке написать только ответы, для реше-*

*ния можно использовать дополнительную бумагу.*

*Верный и в упрощённом виде ответ каждой задачи даёт 2 балла.*

*Вспомогательные письменные материалы или электронные приборы не разрешены.*

Код

1. Вычислить:

$$(777 - 77 \cdot 7 + 7 \cdot 7 \cdot 7) : 7 = \dots\dots\dots$$

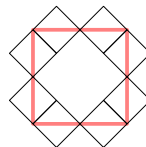
2. Среднее арифметическое чисел  $a$ ,  $b$  и  $c$  равно 7. Среднее арифметическое чисел  $a$  и  $b$  равно 5. Найти число  $c$ .

.....

3. При делении числа 2026 на натуральное число  $n$  получается тот же остаток, что и при делении числа 2026 на число 3. Найти наименьшее возможное значение  $n$ , если известно, что  $n \neq 3$ .

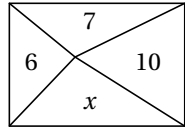
.....

4. У Леры есть 8 квадратных карточек со стороной 1 дм. На каждой карточке она проводит одну диагональ, а затем располагает все карточки на столе так, что из проведённых диагоналей образуется один квадрат (см. рисунок). Найти площадь этого квадрата.



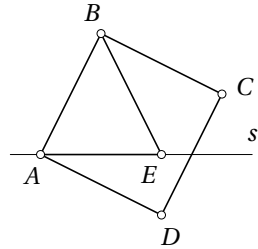
.....

5. Из точки внутри прямоугольника проведены отрезки ко всем вершинам прямоугольника. Площади полученных четырёх треугольников равны  $6 \text{ см}^2$ ,  $7 \text{ см}^2$ ,  $10 \text{ см}^2$  и  $x \text{ см}^2$  (см. рисунок). Найти  $x$ .



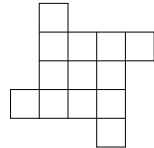
.....

6. На рисунке изображены квадрат  $ABCD$  и равнобедренный треугольник  $AEB$ , основание которого лежит на прямой  $s$ . Известно, что величина угла  $DAE$  равна  $24^\circ$ . Найти величину угла  $DBE$ .



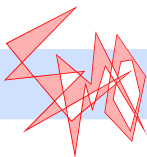
.....

7. На рисунке сверху изображена сетка, состоящая из 13 единичных квадратов, а снизу — уголок, состоящий из 3 единичных квадратов. Сколько существует различных способов поместить уголок на сетку так, чтобы все единичные квадраты уголка точно покрывали квадраты сетки? Уголок можно поворачивать.



.....





## 73-я Олимпиада Эстонии по математике

28 января 2026 г.

Региональный тур

8 класс

**I часть.** *Время, отводимое для решения: 30 минут.*

*На этом листке написать только ответы, для решения можно использовать дополнительную бумагу.*

*Верный и в упрощённом виде ответ каждой задачи даёт 2 балла.*

*Вспомогательные письменные материалы или электронные приборы не разрешены.*

Код

1. Вычислить:

$$\frac{7}{8} \cdot \frac{6}{7} : \frac{5}{6} : \frac{4}{5} : \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} : \frac{1}{2} = \dots\dots\dots$$

2. Найти число  $c$  из равенств

$$a + b + 2c = -8$$

и

$$2a + 2b + c = 8.$$

.....

3. Калев выписывает на бумагу все однозначные и двузначные положительные целые числа, которые можно составить из цифр 2, 0, 2 и 6 (всего 7 чисел). Затем он стирает одно двузначное число так, что сумма оставшихся чисел делится на число 3. Какое число стирает Калев?

.....

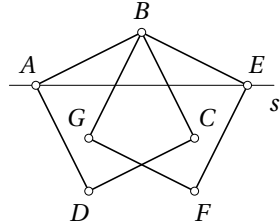
4. Число 2026 равно среднему арифметическому четырёх последовательных нечётных чисел. Найти наибольшее из этих четырёх чисел.

.....

5. Основания равнобедренных треугольников  $ABC$  и  $ABD$  — соответственно  $BC$  длиной 8 см и  $AD$  длиной 18 см — пересекаются в точке  $O$  и перпендикулярны друг другу. Найти площадь пятиугольника  $ABDOC$ .

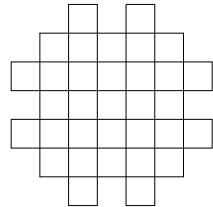
.....

6. Вершины  $A$  и  $E$  двух равных квадратов  $ABCD$  и  $BEFG$  лежат на прямой  $s$  (см. рисунок). Известно, что угол  $AEF$  в 2 раза больше угла  $GBC$ . Найти величину угла  $GBC$ .



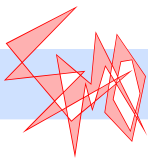
.....

7. На рисунке сверху изображена сетка, состоящая из 33 единичных квадратов, а снизу — крест, состоящий из 5 единичных квадратов. Сколько существует различных способов поместить крест на сетку так, чтобы все единичные квадраты креста точно покрывали квадраты сетки? Считаем, что поворот креста на  $90^\circ$  вокруг своего центра не меняет расположения.



.....





# 73-я Олимпиада Эстонии по математике

28 января 2026 г.

Региональный тур

9 класс

**I часть.** *Время, отводимое для решения: 30 минут.*

*На этом листке написать только ответы, для решения можно использовать дополнительную бумагу.*

*Верный и в упрощённом виде ответ каждой задачи даёт 2 балла.*

*Вспомогательные письменные материалы или электронные приборы не разрешены.*

Код

1. Найти  $x$  из равенства  $5 - (6 - (7 - (8 - x))) = 9$ .

.....

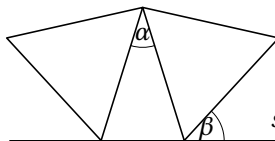
2. Найти наименьшее натуральное число  $n$ , при котором сумма  $2026 + n$  делится на число 5, а разность  $2026 - n$  делится на число 9.

.....

3. Операция  $\diamond$  определена для всех чисел равенством  $a \diamond b = 10a - b$ . Найти  $x$  из равенства  $2 \diamond (x \diamond 6) = 2026$ .

.....

4. На рисунке изображены два равных равнобедренных треугольника. У обоих треугольников одна вершина лежит на прямой  $s$ . Сумма величин отмеченных углов  $\alpha$  и  $\beta$  равна  $90^\circ$ . Найти  $\alpha$ .



.....

5. Величина угла при вершине равнобедренного треугольника равна  $30^\circ$ , а длина основания равна 30 см. Найти длину описанной около этого треугольника окружности.

.....

6. Числа  $a$ ,  $b$ ,  $c$  и  $d$  удовлетворяют условиям

$$\frac{ab}{cd} = 8$$

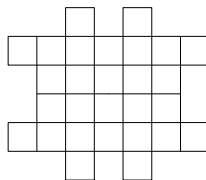
и

$$\frac{a}{c} + \frac{d}{b} = 1.$$

Найти  $\frac{b}{d}$ .

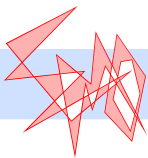
.....

7. На рисунке сверху изображена сетка, состоящая из 28 единичных квадратов, а снизу — фигура, состоящая из 5 единичных квадратов. Сколько существует различных способов поместить фигуру на сетку так, чтобы все единичные квадраты фигуры точно покрывали квадраты сетки? Фигуру можно поворачивать.



.....





## 73-я Олимпиада Эстонии по математике

28 января 2026 г.

Региональный тур

7 класс

**II часть.** *Время, отводимое для решения: 3 часа.*

*Решения задач написать на отдельном листе.*

*Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи даёт 7 баллов. Написать только ответ недостаточно!*

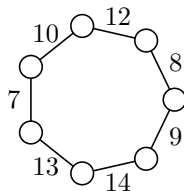
*Вспомогательные письменные материалы или электронные приборы не разрешены.*

1. Если покупают за один раз от 10 до 20 пар носков, то на всю покупку действует скидка 20%. Если покупают за один раз более 20 пар носков, то действует скидка 30%. Андрей покупает 5 пар, Оливер — 10 пар, и Кирилл — 15 пар носков, причём каждый мальчик совершает свою покупку отдельно. Все носки одинаковые. На сколько процентов общий счёт был бы меньше суммы трёх отдельных счетов, если бы мальчики совершили покупку вместе?

2. В каждый кружок записали одно число так, что число, отмеченное у каждого отрезка, равно сумме чисел, записанных в кружках на концах этого отрезка.

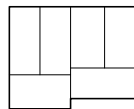
а) Найти сумму чисел, записанных во всех кружках.

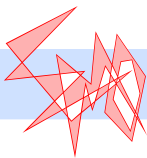
б) Найти все числа, записанные в нескольких кружках.



3. В числе 2026 нужно одну цифру увеличить, а какую-то другую цифру уменьшить так, чтобы полученное четырёхзначное число делилось на число 4. Сколько для этого существует различных возможностей?

4. На рисунке шестиугольник разделён на шесть прямоугольников равной площади. Три из этих прямоугольников равны между собой, и остальные три прямоугольника также равны между собой. Длина каждой стороны каждого прямоугольника равняется целому числу сантиметров, а частное от деления длины большей стороны на длину меньшей стороны всегда меньше числа 3. Найти площадь этого шестиугольника, если периметр шестиугольника равен 272 см.





## 73-я Олимпиада Эстонии по математике

28 января 2026 г.

Региональный тур

8 класс

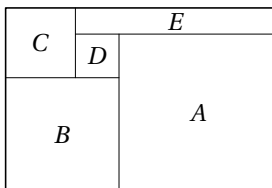
**II часть.** *Время, отводимое для решения: 3 часа.*

*Решения задач написать на отдельном листе.*

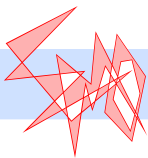
*Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи даёт 7 баллов. Написать только ответ недостаточно!*

*Вспомогательные письменные материалы или электронные приборы не разрешены.*

1. В большой упаковке с орехами в 3 раза больше орехов, чем в маленькой, и большая упаковка на 6,3 евро дороже маленькой. Средняя цена ореха в большой упаковке на 20% ниже средней цены ореха в маленькой упаковке, причём средняя цена ореха в каждой из упаковок равняется целому числу центов. Найти наибольшее возможное количество орехов в маленькой упаковке.
2. Операция  $\diamond$  определена для всех чисел равенством  $a \diamond b = a^2 - b$ . Найти все возможные значения выражения  $x \diamond y$ , если  $x$  и  $y$  — такие целые числа, при которых  $44 \diamond (x \diamond (y \diamond 26)) = 2026$ .
3. На столе лежат 6 камней, пронумерованных натуральными числами от 1 до 6. Артём и Петя делают ходы по очереди, начинает Артём. Своим ходом игрок может взять со стола один камень, но камень с номером  $k$  разрешается взять лишь в том случае, если этот игрок ранее не взял ни одного камня, номер которого кратен  $k$ . Если игрок не может взять ни одного камня по правилам, он пропускает ход. Игра заканчивается, когда ни один из игроков не может взять камень по правилам. Побеждает тот, у кого сумма номеров камней в конце игры больше (при равной сумме — ничья). Может ли кто-то из игроков выиграть при любой контригре соперника, и если да, то кто?
4. Большой прямоугольник разделён на четыре квадрата  $A$ ,  $B$ ,  $C$  и  $D$ , а также на прямоугольник  $E$ .



- а) Прямая, на которой лежит диагональ квадрата  $B$ , делит прямоугольник  $E$  на две части. Площадь левой части больше, меньше или равна площади правой части?
- б) Известно, что площадь большого прямоугольника в 3,8 раза больше площади квадрата  $B$ . Площадь квадрата  $D$  больше, меньше или равна площади прямоугольника  $E$ ?



## 73-я Олимпиада Эстонии по математике

28 января 2026 г.

Региональный тур

9 класс

**II часть.** *Время, отводимое для решения: 4 часа.*

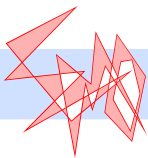
*Решения задач написать на отдельном листе.*

*Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи даёт 7 баллов. Написать только ответ недостаточно!*

*Вспомогательные письменные материалы или электронные приборы не разрешены.*

1. Маша записывает на бумагу без пропусков друг за другом все положительные целые числа, которые не делятся на число 3, начиная с наименьшего и продолжая последовательно возрастающими числами. Найти 2026-ю цифру полученного длинного числа.
2. Сколько существует различных троек целых чисел  $(a, b, c)$ , удовлетворяющих равенствам  $ab + bc + ca = 1$  и  $a + b = c$ , в которых одно из чисел  $a$ ,  $b$  и  $c$  равно 3?
3. Высоты остроугольного треугольника  $ABC$ , проведённые из вершин  $B$  и  $C$ , продлили за их основания до пересечения с описанной окружностью соответственно в точках  $M$  и  $N$ . Известно, что  $M$  и  $N$  являются концами диаметра описанной окружности треугольника  $ABC$ . Найти величину угла  $BAC$ .
4. На рисунке изображена сетка размером  $8 \times 6$ , на которой показаны начальные положения трёх фишек 1, 2 и 3. Каждую фишку можно за один ход переместить только на соседнюю по стороне клетку, причём нельзя ходить на клетку, на которой в ходе игры уже побывала какая-либо фишка. Следуя правилам, Юра делает каждой фишкой одинаковое количество ходов. В конечном итоге фишки оказываются на клетках А, В и С в некотором порядке. Найти все возможности, сколько ходов может сделать Юра каждой фишкой.

	①				
		②	③		
	А			В	С



## 73-я Олимпиада Эстонии по математике

28 января 2026 г.

Региональный тур

10 класс

*Время, отводимое для решения: 5 часов.*

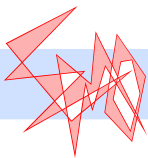
*Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи даёт 7 баллов.*

*Вспомогательные письменные материалы или электронные приборы не разрешены.*

1. Расположить числа  $\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{12}{7}}$ ,  $\left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{12}{5}}$  и 2 в порядке возрастания.
2. Найти все такие пары действительных чисел  $(p, q)$ , при которых решениями квадратного уравнения  $x^2 + px + q = 0$  являются как  $p$ , так и  $q$ .
3. Изначально на экране калькулятора число 1. У калькулятора есть две кнопки:
  - 1) первая кнопка прибавляет к числу на экране 3;
  - 2) вторая кнопка умножает число на экране на 4.Можно ли получить на экране калькулятора
  - а) число 2025?
  - б) число 2026?
4. Найти все пары положительных целых чисел  $(a, b)$ , удовлетворяющие условию

$$a + ab + b = a^2 + b^2.$$

5. Диагонали прямоугольной трапеции длиной 3 см и 4 см перпендикулярны друг другу. Найти высоту и длины оснований этой трапеции.
6. Дано положительное целое число  $n$ ,  $n \geq 3$ . Юра записывает в каждую вершину правильного  $n$ -угольника одно положительное целое число, не превосходящее  $n$ , таким образом, что в разных вершинах записаны разные числа. Затем он записывает внутри  $n$ -угольника наибольшее число, которое является суммой двух чисел, записанных в концах какой-либо стороны  $n$ -угольника. Найти наименьшее возможное число, которое может быть записано внутри  $n$ -угольника.



## 73-я Олимпиада Эстонии по математике

28 января 2026 г.

Региональный тур

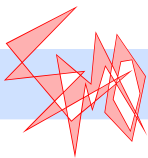
11 класс

*Время, отводимое для решения: 5 часов.*

*Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи даёт 7 баллов.*

*Вспомогательные письменные материалы или электронные приборы не разрешены.*

1. Найти значение выражения  $\frac{1}{a} - a$ , если  $a = \sqrt{2026} - \sqrt{2025}$ .
2. Равносторонний треугольник  $ABC$  со стороной 1 расположен на координатной плоскости так, что точка пересечения медиан находится в начале координат, а вершина  $A$  лежит на оси  $x$ . Найти все возможности, какими могут быть координаты вершин треугольника  $ABC$ .
3. Найти все такие двузначные натуральные числа  $n$  с различными цифрами, что разность квадратов числа  $n$  и числа, полученного из него перестановкой цифр в обратном порядке, также является квадратом некоторого целого числа.
4. Найти все положительные действительные числа  $k$ , при которых существуют такие положительные действительные числа  $a$ ,  $b$  и  $c$ , что каждое из квадратных уравнений  $ax^2 + kbx + c = 0$ ,  $bx^2 + kcx + a = 0$  и  $cx^2 + kax + b = 0$  имеет два различных действительных решения.
5. Точки касания вписанной окружности треугольника  $ABC$  со сторонами  $BC$ ,  $CA$  и  $AB$  — это соответственно  $D$ ,  $E$  и  $F$ , а точки пересечения описанной окружности с биссектрисами внутренних углов при вершинах  $A$ ,  $B$  и  $C$  — это соответственно  $K$ ,  $L$  и  $M$  ( $K \neq A$ ,  $L \neq B$ ,  $M \neq C$ ). Доказать, что треугольники  $DEF$  и  $KLM$  подобны.
6. На школьный теннисный вечер приходят 4 игрока, один из которых — Юра. Из этих игроков жребием выбирают 2 разные пары (по крайней мере один игрок в этих парах отличается). Каждая пара играет между собой один показательный матч. Найти вероятность того, что Юра не будет участвовать ни в одном из матчей, если вероятность выбора любой возможной комбинации из 2 пар одинакова.



## 73-я Олимпиада Эстонии по математике

28 января 2026 г.

Региональный тур

12 класс

*Время, отводимое для решения: 5 часов.*

*Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи даёт 7 баллов.*

*Вспомогательные письменные материалы или электронные приборы не разрешены.*

### 1. Найти значение выражения

$$(1 + 2 + \dots + 20) \cdot 26 - (1 + 2 + \dots + 26) \cdot 20.$$

2. Прямые, которые касаются графика функции  $y = ax^2 + bx + c$  в различных точках  $A$  и  $B$ , пересекаются в точке  $L$ . Найти разность  $x$ -координат точки  $L$  и середины отрезка  $AB$ .

3. Найти все четвёрки  $(p, q, a, b)$ , удовлетворяющие условию

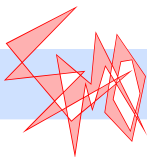
$$p^a + p^b = q^2,$$

где  $p$  и  $q$  — простые числа, а  $a$  и  $b$  — неотрицательные целые числа.

4. Артём и Таня играют в снежки. В первой атаке Артём бросает в сторону Тани один снежок. Каждый раз, когда в кого-то из них во время атаки соперника попадает некоторое количество снежков, он в своей следующей атаке бросает в ответ в два раза больше снежков, чем в него попало. У обоих игроков всегда попадают в цель не менее 75% брошенных снежков. Доказать, что Артём и Таня успеют сыграть менее 13 полных раундов, прежде чем на улице стемнеет (раунд состоит из атаки Артёма и следующей за ней атаки Тани). Предположим, что светлое время суток длится 8 часов, а на бросок каждого снежка уходит 1 секунда.

5. Члены бесконечной последовательности — остроугольные треугольники. Начиная со второго члена, вершинами каждого треугольника являются основания высот предыдущего треугольника. Доказать, что все треугольники этой последовательности являются равносторонними.

6. Юра записывает в тетрадь  $n$  различных целых чисел,  $n > 1$ . Миша смотрит в тетрадь Юры и выписывает на доску по своему выбору выражение вида  $a + b$  или  $a - b$ , где  $a$  и  $b$  — какие-то различные целые числа из тетради Юры. Миша выигрывает, если значение выписанного им выражения делится на число 2026, в противном случае выигрывает Юра. Найти наименьшее  $n$ , при котором Миша сможет выиграть независимо от того, какие числа записал Юра.



# Estonian Mathematical Olympiad No. 73

January 28, 2026

Regional round

Grade 7

**Part I.** Working time: 30 minutes.

Please write only answers here. An additional piece of paper is provided for solving.

A correct answer in simplified form to each question is worth 2 points.

Written materials or electronic devices are not permitted.

Code

1. Evaluate:

$$(777 - 77 \cdot 7 + 7 \cdot 7 \cdot 7) : 7 = \dots\dots\dots$$

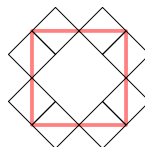
2. The arithmetic mean of numbers  $a$ ,  $b$  and  $c$  equals 7. The arithmetic mean of numbers  $a$  and  $b$  equals 5. Find  $c$ .

.....

3. The remainder of 2026 upon division by a natural number  $n$  equals the remainder of 2026 upon division by 3. Find the least possible  $n$ , provided that  $n \neq 3$ .

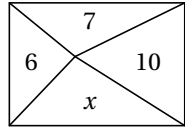
.....

4. Laurent has 8 cards of square shape with side length 1 dm. He draws one diagonal on each card and then places all cards on the table in such a way that the drawn diagonals form a square (see figure). Find the area of that square.



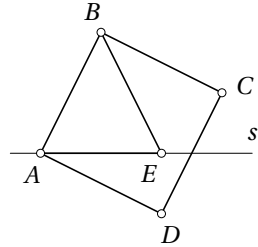
.....

5. From a point inside a rectangle, line segments are drawn to all vertices of the rectangle. This splits the rectangle into triangles of areas  $6 \text{ cm}^2$ ,  $7 \text{ cm}^2$ ,  $10 \text{ cm}^2$  and  $x \text{ cm}^2$  (see figure). Find  $x$ .



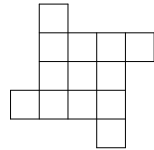
.....

6. The figure depicts a square  $ABCD$  and an isosceles triangle  $AEB$  whose base lies on line  $s$ . Given that the size of the angle  $DAE$  equals  $24^\circ$ , find the size of the angle  $DBE$ .



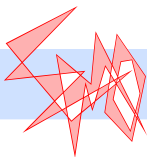
.....

7. The upper figure depicts a grid of 13 unit squares and the lower figure depicts an L-shape made up of 3 unit squares. In how many distinct ways can one place the L-shape onto the grid in such a way that all unit squares of the L-shape precisely cover the squares of the grid? The L-shape can be rotated.



.....





# Estonian Mathematical Olympiad No. 73

January 28, 2026

Regional round

Grade 8

**Part I.** Working time: 30 minutes.

Please write only answers here. An additional piece of paper is provided for solving.

A correct answer in simplified form to each question is worth 2 points.

Written materials or electronic devices are not permitted.

Code

1. Evaluate:

$$\frac{7}{8} \cdot \frac{6}{7} \div \frac{5}{6} \div \frac{4}{5} \div \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} \div \frac{1}{2} = \dots\dots\dots$$

2. Find the number  $c$  from the equations

$$a + b + 2c = -8$$

and

$$2a + 2b + c = 8.$$

.....

3. Kalev wrote down all positive one-digit and two-digit integers formed using the digits 2, 0, 2 and 6 (getting 7 numbers in total). Then he erased a two-digit number so that the sum of all remaining numbers was divisible by 3. Which number did Kalev erase?

.....

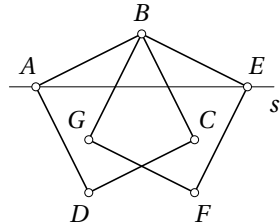
4. The number 2026 equals the arithmetic mean of four consecutive odd numbers. Find the largest of the four numbers.

.....

5. Isosceles triangles  $ABC$  and  $ABD$  have bases  $BC$  of length 8 cm and  $AD$  of length 18 cm, respectively, which are perpendicular to each other and intersect at point  $O$ . Find the area of the pentagon  $ABDOC$ .

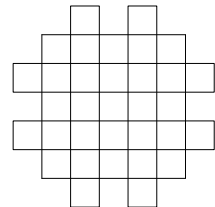
.....

6. Vertices  $A$  and  $E$  of two equal squares  $ABCD$  and  $BEFG$  both lie on line  $s$  (see figure). Given that the angle  $AEF$  is 2 times larger than the angle  $GBC$ , find the size of the angle  $GBC$ .



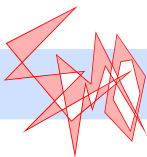
.....

7. The upper figure depicts a grid of 33 unit squares and the lower figure depicts a plus sign made up of 5 unit squares. In how many distinct ways can one place the plus onto the grid in such a way that all unit squares of the plus precisely cover the squares of the grid? We consider rotation of the plus by  $90^\circ$  around its centre as not changing the placement.



.....





# Estonian Mathematical Olympiad No. 73

January 28, 2026

Regional round

Grade 9

**Part I.** Working time: 30 minutes.

Please write only answers here. An additional piece of paper is provided for solving.

A correct answer in simplified form to each question is worth 2 points.

Written materials or electronic devices are not permitted.

Code

1. Find  $x$  from the equation  $5 - (6 - (7 - (8 - x))) = 9$ .

.....

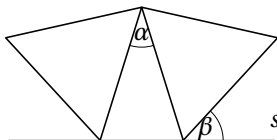
2. Find the least natural number  $n$  such that  $2026 + n$  is divisible by 5 and  $2026 - n$  is divisible by 9.

.....

3. The operation  $\diamond$  is defined on all numbers by the equation  $a \diamond b = 10a - b$ . Find  $x$  from the equation  $2 \diamond (x \diamond 6) = 2026$ .

.....

4. The figure depicts two equal equilateral triangles. One vertex of each triangle lies on line  $s$ . The sizes of angles labelled  $\alpha$  and  $\beta$  sum up to  $90^\circ$ . Find  $\alpha$ .



.....

5. The size of the vertex angle of an isosceles triangle is  $30^\circ$ , and the length of its base is 30 cm. Find the length of the circumcircle of this triangle.

.....

6. Numbers  $a$ ,  $b$ ,  $c$  and  $d$  satisfy the conditions

$$\frac{ab}{cd} = 8$$

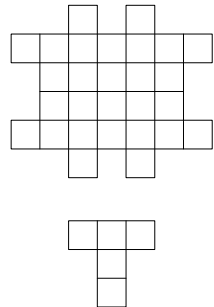
and

$$\frac{a}{c} + \frac{d}{b} = 1.$$

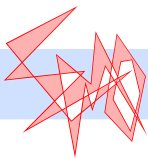
Find  $\frac{b}{d}$ .

.....

7. The upper figure depicts a grid of 28 unit squares and the lower figure depicts a T-shape made up of 5 unit squares. In how many distinct ways can one place the T-shape onto the grid in such a way that all unit squares of the T-shape precisely cover the squares of the grid? The T-shape can be rotated.



.....



# Estonian Mathematical Olympiad No. 73

January 28, 2026

Regional round

Grade 7

**Part II.** Working time: 3 hours.

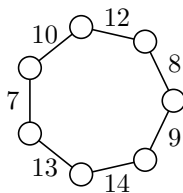
Please write your solutions to a separate paper.

A correct and sufficiently explained solution to each problem is worth 7 points.  
Just the answer is not enough!

Written materials or electronic devices are not permitted.

1. When the number of pairs of socks bought is from 10 up to 20, a discount of 20% applies to the whole purchase. When the number of pairs of socks bought exceeds 20, a discount of 30% applies to the whole purchase. Andy bought 5 pairs, Oliver bought 10 pairs and Kevin bought 15 pairs of socks. Each boy made his purchase separately. All socks are identical. By which percentage would the joint bill have been smaller than the sum of the three bills if the boys had made their purchases jointly?

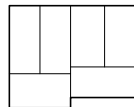
2. A number is written into each circle in such a way that every number written to a line segment equals the sum of the numbers written into the circles at both ends of the segment.

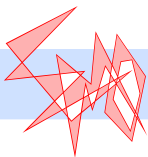


- a) Find the sum of the numbers written to all circles.  
b) Find all numbers written into several circles.

3. In the number 2026, one digit is to be increased and another digit is to be decreased in such a way that the four-digit number obtained be divisible by 4. In how many ways can this be achieved?

4. The hexagon in the figure is split into six rectangles of equal area. Three rectangles are equal to each other and the remaining three rectangles are equal to each other as well. The length of each side of each rectangle is a whole number of centimetres and the ratio of the lengths of the longer and the shorter side of each rectangle is less than 3. Find the area of the hexagon, provided that the perimeter of the hexagon is 272 cm.





# Estonian Mathematical Olympiad No. 73

January 28, 2026

Regional round

Grade 8

**Part II.** Working time: 3 hours.

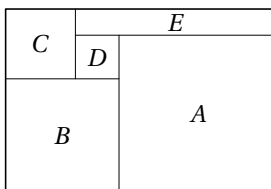
Please write your solutions to a separate paper.

A correct and sufficiently explained solution to each problem is worth 7 points.

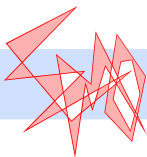
Just the answer is not enough!

Written materials or electronic devices are not permitted.

1. A large package of nuts contains 3 times more nuts than a small one and the large package costs 6.3 euros more than the small one. The average price of a nut in the large package is 20% less than the average price of a nut in the small package. The average price of a nut is a whole number of cents in both cases. Find the largest possible number of nuts in the small package.
2. The operation  $\diamond$  is defined for all numbers by the equation  $a \diamond b = a^2 - b$ . Find all possible values of the expression  $x \diamond y$ , provided that  $x$  and  $y$  are integers such that  $44 \diamond (x \diamond (y \diamond 26)) = 2026$ .
3. There are 6 stones on a table, labelled by natural numbers 1 through 6. Andy and Pete make moves alternately, Andy starts. On his move, each player can take one stone from the table, but it is allowed to take a stone with number  $k$  only if the same player has never taken any stone whose number is a multiple of  $k$ . Whenever a player cannot take any stone, he skips the move. When no player can take any stone, the game ends. The player whose sum of all stones taken during the game is larger wins (in the case of equal sums, the game is drawn). Can either of the players win the game regardless of the opponent's moves and, if yes, which player?
4. A large rectangle is split into four squares  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  and a rectangle  $E$ .



- a) A line containing a diagonal of the square  $B$  splits the rectangle  $E$  into two parts. Is the area of the leftmost part larger than, smaller than or equal to the area of the rightmost part?
- b) Given that the area of the large rectangle is 3.8 times the area of the square  $B$ , is the area of the square  $D$  larger than, smaller than or equal to the area of the rectangle  $E$ ?



# Estonian Mathematical Olympiad No. 73

January 28, 2026

Regional round

Grade 9

**Part II.** Working time: 4 hours.

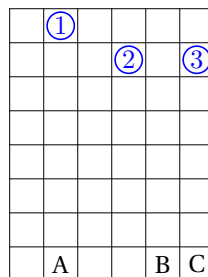
Please write your solutions to a separate paper.

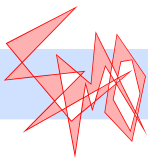
A correct and sufficiently explained solution to each problem is worth 7 points.

Just the answer is not enough!

Written materials or electronic devices are not permitted.

1. Mary writes down, one after another without spaces, all positive integers that are not divisible by 3, starting from the least one and continuing with larger and larger ones. Find the 2026th digit of the resulting long number.
2. How many distinct triples  $(a, b, c)$  of integers satisfying both  $ab+bc+ca = 1$  and  $a + b = c$  are there such that one of  $a, b, c$  equals 3?
3. The altitudes of an acute triangle  $ABC$  drawn from vertices  $B$  and  $C$  are extended beyond their feet until intersecting the circumcircle of the triangle  $ABC$  at points  $M$  and  $N$ , respectively. Points  $M$  and  $N$  turn out to be the endpoints of a diameter of the circumcircle of the triangle  $ABC$ . Find the size of the angle  $BAC$ .
4. The figure depicts an  $8 \times 6$  grid and shows the initial positions of three pieces 1, 2 and 3. Each piece can be moved to a neighbouring square over the common side. It is not allowed to move a piece to a square where any piece has been before. John makes with every piece the same number of moves following the rules. As a result, pieces appear at the squares A, B and C in some order. Find all possibilities of how many moves John can do with every piece.





## Estonian Mathematical Olympiad No. 73

January 28, 2026

Regional round

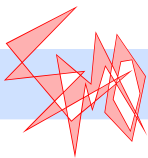
Grade 11

*Working time: 5 hours.*

*A correct and sufficiently explained solution to each problem is worth 7 points.*

*Written materials or electronic devices are not permitted.*

1. Find the value of the expression  $\frac{1}{a} - a$ , provided that  $a = \sqrt{2026} - \sqrt{2025}$ .
2. An equilateral triangle  $ABC$  with side length 1 is drawn on the coordinate plane in such a way that the centroid lies at the origin of coordinates and the vertex  $A$  lies on the  $x$ -axis. Find all possibilities of what can be the coordinates of the vertices of the triangle  $ABC$ .
3. Find all two-digit natural numbers  $n$  with distinct digits such that the difference of the squares of the number  $n$  and the number obtained from it via changing the order of digits is the square of an integer, too.
4. Find all positive real numbers  $k$  for which there exist positive real numbers  $a, b, c$  such that each of the quadratic equations  $ax^2 + kbx + c = 0$ ,  $bx^2 + kcx + a = 0$  and  $cx^2 + kax + b = 0$  has two distinct real solutions.
5. The sides  $BC, CA, AB$  of a triangle  $ABC$  touch the incircle at points  $D, E, F$ , respectively, and the bisectors of the internal angles at  $A, B, C$  of the triangle  $ABC$  intersect the circumcircle at points  $K, L, M$ , respectively ( $K \neq A, L \neq B, M \neq C$ ). Prove that the triangles  $DEF$  and  $KLM$  are similar.
6. There are 4 players, John being one of them, taking part in the tennis night of a school. From among these players, 2 distinct pairs are raffled (at least one player is different in these pairs). Each pair plays a show match. Find the probability of John taking part in neither of the matches, provided that each possible combination of 2 pairs can appear with equal probability as the result of raffling.



## Estonian Mathematical Olympiad No. 73

January 28, 2026

Regional round

Grade 12

*Working time: 5 hours.*

*A correct and sufficiently explained solution to each problem is worth 7 points.*

*Written materials or electronic devices are not permitted.*

1. Find the value of the expression

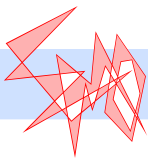
$$(1 + 2 + \dots + 20) \cdot 26 - (1 + 2 + \dots + 26) \cdot 20.$$

2. Lines tangent to the graph of the function  $y = ax^2 + bx + c$  at distinct points  $A$  and  $B$  intersect at point  $L$ . Find the difference of the  $x$ -coordinates of the point  $L$  and the midpoint of the line segment  $AB$ .
3. Find all quadruples  $(p, q, a, b)$  satisfying the equation

$$p^a + p^b = q^2,$$

provided that  $p, q$  are prime numbers and  $a, b$  are non-negative integers.

4. Arnold and Adelaide play snowballs. On his first attack, Arnold throws one snowball towards Adelaide. Whenever a player hits the opponent with some number of snowballs, the opponent will throw on his/her next attack twice this number of snowballs back. Both players always hit the opponent with at least 75% of the snowballs they throw during an attack. Prove that Arnold and Adelaide can play less than 13 full rounds before it gets dark (a round consists of Arnold's attack and the immediately following Adelaide's attack). Assume that a day contains 8 hours of daylight and throwing a snowball takes 1 second.
5. The members of an infinite sequence are acute triangles. Starting from the second member, the vertices of each triangle are the feet of the altitudes of the previous triangle. Prove that all triangles of the sequence are equilateral.
6. Johnny writes  $n$  distinct integers into his notebook,  $n > 1$ . Mickey looks into Johnny's notebook and writes, at Mickey's own discretion, an expression of the form  $a + b$  or  $a - b$  on the blackboard, where  $a$  and  $b$  are some distinct integers in Johnny's notebook. Mickey wins if the value of the expression he writes is divisible by 2026, otherwise Johnny wins. Find the least  $n$  such that Mickey can win regardless of the numbers written by Johnny.



# Eesti 73. matemaatikaolümpiaad

28. jaanuar 2026

Piirkonnavoor

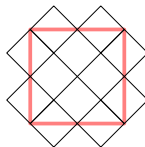
7. klass

## I osa vastused

- |                       |                |
|-----------------------|----------------|
| 1. 83.                | 5. 9.          |
| 2. 11.                | 6. $3^\circ$ . |
| 3. 5.                 | 7. 20.         |
| 4. $8 \text{ dm}^2$ . |                |

## Lahendused

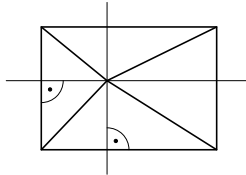
- $(777 - 77 \cdot 7 + 7 \cdot 7 \cdot 7) : 7 = (111 - 77 + 7 \cdot 7) \cdot 7 : 7 = 111 - 77 + 49 = 83$ .
- Kui  $\frac{a+b+c}{3} = 7$ , siis  $a+b+c = 21$ . Kui  $\frac{a+b}{2} = 5$ , siis  $a+b = 10$ . Seega  $c = (a+b+c) - (a+b) = 21 - 10 = 11$ .
- Arv 2026 annab jagamisel arvuga 3 jäägi 1, sest  $2026 = 2025 + 1$  ja arv 2025 jagub arvuga 3. Et arv 2026 annaks jagamisel arvuga  $n$  samuti jäägi 1, peab arv 2025 jaguma ka arvuga  $n$ . Kuna  $n \neq 3$ , siis vähim sobiv arv on  $n = 5$  ( $n = 1$  ei tule arvesse, sest arvuga 1 jagub ka arv 2026, mitte ei anna jääki).
- Lahendus 1.* Täiendame joonist nelja samasuguse kaardiga (joonis 1). Nii selgub, et diagonaalidest moodustuva ruudu saab kokku panna 4 tervest ruudust küljepikkusega 1 dm ja 8 poolikust samasugusest ruudust. Kuna ühe sellise ruudu pindala on  $1 \text{ dm}^2$ , siis diagonaalidest moodustuva ruudu pindala on  $4 \cdot 1 + 8 \cdot \frac{1}{2}$  ehk 8 ruutdetsimeetrit.



Joonis 1

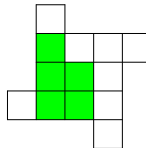
*Lahendus 2.* Tekkinud ruudu diagonaalid on pikkusega 4 dm. Kasutades rombi pindala valemit, saame selle ruudu pindalaks  $\frac{1}{2} \cdot 4^2$  ehk 8 ruutdetsimeetrit.

5. Tõmbame läbi kolmnurkade ühise tippu sirged, mis on paralleelsed ristküliku külgedega (joonis 2). Need jaotavad ristküliku 4 väiksemaks ristkülikuks. Iga lõik, mis ühendab kolmnurkade ühist tippu suure ristküliku tipuga, on ühe väikse ristküliku diagonaal ja poolitab ta. Seega kolmnurk pindalaga 6 sisaldab poolt kummastki vasakpoolsest ristkülikust, kolmnurk pindalaga 10 aga poolt kummastki parempoolsest ristkülikust. Ülejäänud pooltest moodustuvad ülejäänud kaks kolmnurka. Seega kolmnurgad pindalaga 6 ja 10 katavad kokku niisama suure ala kui kolmnurgad pindalaga 7 ja  $x$ . Saame võrrandi  $6 + 10 = 7 + x$ , kust  $x = 6 + 10 - 7 = 9$ .

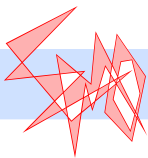


Joonis 2

6. Ülesande tingimustest saame  $\angle EAB = \angle DAB - \angle DAE = 90^\circ - 24^\circ = 66^\circ$  ja seega ka  $\angle BEA = 66^\circ$ . Järelikult  $\angle ABE = 180^\circ - 2 \cdot 66^\circ = 48^\circ$ . Samas  $\angle ABD = 45^\circ$ , sest ruudu diagonaal poolitab nurga. Kokkuvõttes saame  $\angle DBE = 48^\circ - 45^\circ = 3^\circ$ .
7. Pööramata on nurgikut võimalik ruudustikule paigutada 5 viisil (joonisel 3 on roheliseks värvitud kõik need ühikruudud, mida saab katta nurgiku nurgaruut). Kuna  $90^\circ$ ,  $180^\circ$  või  $270^\circ$  pöörates on ruudustik algsega identne, on pärast igat sellist pööret samuti 5 võimalust nurgikut ruudustikule paigutada. Kokku on võimalusi  $4 \cdot 5$  ehk 20.



Joonis 3



## Eesti 73. matemaatikaolümpiaad

28. jaanuar 2026

Piirkonnavoor

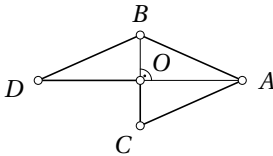
8. klass

### I osa vastused

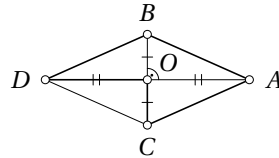
- 2.
- 8.
- 60.
- 2029.
- 54 cm<sup>2</sup>.
- 36°.
- 17.

### Lahendused

- $\frac{7}{8} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{7}{8} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{1} = \frac{6 \cdot 6 \cdot 2 \cdot 2}{8 \cdot 3 \cdot 3} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}{8} = 2$ .
- Teine võrdus on esitatav kujul  $2(a + b) + c = 8$ . Kuna esimesest võrdusest tuleneb  $a + b = -8 - 2c$ , siis saame teisest võrdusest  $2(-8 - 2c) + c = 8$ , kust  $-3c = 24$  ehk  $c = -8$ .
- Erinevad ühekohalised positiivsed täisarvud numbritest 2, 0, 2, 6 on 2 ja 6. Erinevad kahekohalised positiivsed täisarvud neist numbritest on 20, 22, 26, 60 ja 62. Arvud 6 ja 60 jaguvad arvuga 3, ülejäänud arvude summa  $2 + 20 + 22 + 26 + 62$  jagub samuti arvuga 3. Seega kõigi kirjutatud arvude summa jagub arvuga 3. Kuna ka pärast kahekohalise arvu kustutamist järele jäänud arvude summa jagub arvuga 3, on kustutatud arv ainus arvuga 3 jaguv kirjutatud kahekohaline arv 60.
- Olgu otsitav arv  $x$ . Siis paaritud arvud, mille aritmeetiline keskmine leitakse, on  $x, x-2, x-4$  ja  $x-6$ . Seega  $\frac{x + (x-2) + (x-4) + (x-6)}{4} = 2026$ . Murru lugeja lihtsustamisel saame  $4x - (2 + 4 + 6)$  ehk  $4x - 12$ , seega vasak pool on  $\frac{4x - 12}{4}$  ehk  $x - 3$ . Võrrandist  $x - 3 = 2026$  saame  $x = 2029$ .
- Lahendus 1.* Kuna  $AO \perp BC$  ja  $BO \perp AD$  (joonis 4), on  $AO$  ja  $BO$  vastavalt võrdhaarsete kolmnurkade  $ABC$  ja  $ABD$  alustele tõmmatud kõrgused. Võrdhaarse kolmnurga alusele tõmmatud kõrgus aga poolitab aluse. Järelikult  $|BO| = |OC| = 4$  cm ja  $|AO| = |OD| = 9$  cm. Viisnurk  $ABDOC$  koosneb kolmnurkadest  $ABO, ACO$  ja  $BDO$ , millest igaühe pindala on  $\frac{4 \cdot 9}{2}$  ehk 18 ruutsentimeetrit. Järelikult on viisnurka pindala 54 cm<sup>2</sup>.



Joonis 4



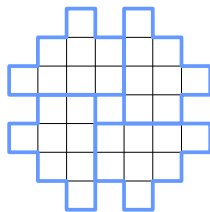
Joonis 5

*Lahendus 2.* Nagu lahenduses 1 veendume, et punkt  $O$  poolitab kolmnurka  $ABC$  ja  $ABD$  alused  $BC$  ja  $AD$  (joonis 5). Seega on kolmnurgad  $OAB$ ,  $OAC$ ,  $ODB$  ja  $ODC$  kõik võrdsed tunnusel KNK. Sellest järeldub muuhulgas, et nelinurga  $ABDC$  külg  $DC$  on niisama pikk kui küljed  $AB$ ,  $AC$  ja  $BD$ . See tähendab, et tegu on rombiga ja viisnurk  $ABDOC$  moodustab sellest  $\frac{3}{4}$ .

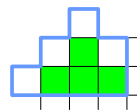
Seega viisnurga  $ABDOC$  pindala on  $\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 18$  ehk 54 ruutsentimeetrit.

6. Olgu  $\angle GBC = \alpha$ . Ülesande tingimuse põhjal  $\angle AEF = 2\alpha$ , millest saame  $\angle BEA = 90^\circ - 2\alpha$ . Kuna ruudud on võrdsed, siis on lõigud  $AB$  ja  $BE$  võrdse pikkusega, mistõttu ka  $\angle EAB = 90^\circ - 2\alpha$ . Nüüd kolmnurgast  $ABE$  saame  $\angle ABE = 180^\circ - 2(90^\circ - 2\alpha) = 4\alpha$ , ruutudest  $ABCD$  ja  $BEFG$  ja ülesande tingimusest aga  $\angle ABE = 90^\circ + 90^\circ - \alpha = 180^\circ - \alpha$ . Kokkuvõttes  $4\alpha = 180^\circ - \alpha$ , kust  $\alpha = \frac{180^\circ}{5} = 36^\circ$ .

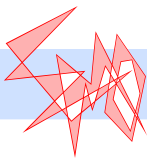
7. Jagame ruudustiku ilma tema keskmise ühikruuduta neljaks võrdseks tükiks, nagu näidatud joonisel 6. Valides suvalise neist tükkidest, on risti paigutamine ruudustikule nii, et risti keskmine ühikruut kattub mõne selle tüki ühikruuduga, võimalik 4 viisil (joonisel 7 on ülemise vasakpoolse tüki vastavad ühikruudud roheliseks värvitud). Seega risti paigutamine nii, et risti keskmine ühikruut kattub mõne ühikruuduga ükskõik millisel tükil, on võimalik  $4 \cdot 4$  ehk 16 viisil. Peale nende on 1 võimalus risti paigutamiseks nii, et risti keskmine ühikruut kattub ruudustiku keskmise ühikruuduga. Kokkuvõttes on risti paigutusvõimalusi  $16 + 1$  ehk 17.



Joonis 6



Joonis 7



# Eesti 73. matemaatikaolümpiaad

28. jaanuar 2026

Piirkonnavoor

9. klass

## I osa vastused

- 11.
- 19.
- 200.
- $40^\circ$ .
- $60\pi$  cm.
- 9.
- 40.

## Lahendused

1. Võrrandi teisendamisel saame:

$$\begin{aligned}6 - (7 - (8 - x)) &= 5 - 9 = -4, \\7 - (8 - x) &= 6 - (-4) = 10, \\8 - x &= 7 - 10 = -3, \\x &= 8 - (-3) = 11.\end{aligned}$$

2. Arvu  $n$  viimane number peab olema 4 või 9, et summa  $2026 + n$  jaguks arvuga 5. Kuna  $2026 - 1$  ehk 2025 jagub arvuga 9, peab arv  $n$  andma arvuga 9 jagamisel jäägi 1, et vahe  $2025 - n$  jaguks arvuga 9. Seega tuleb leida vähim naturaalarv  $n$ , mille viimane number on 4 või 9 ja mis annab arvuga 9 jagamisel jäägi 1. Järjest läbi proovides leiame, et 4, 9 ja 14 ei sobi, aga 19 sobib.

3. Tehte  $\diamond$  definitsiooni põhjal võrrandi vasakut poolt teisendades saame

$$2 \diamond (x \diamond 6) = 2 \diamond (10x - 6) = 10 \cdot 2 - (10x - 6) = 20 - (10x - 6) = 26 - 10x.$$

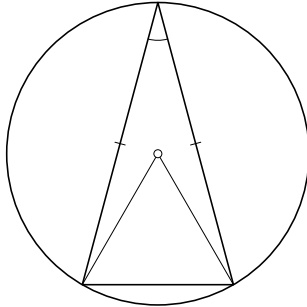
Seega  $26 - 10x = 2026$ , kust  $10x = 26 - 2026 = -2000$  ehk  $x = -200$ .

4. Kolmnurk, mille külgedeks on kummagi võrdkülgse kolmnurga üks külg ja sirge  $s$  lõik, on võrdhaarne tipunurga suurusega  $\alpha$ . Selle kolmnurga alusnurga suurus on  $\frac{1}{2}(180^\circ - \alpha)$  ehk  $90^\circ - \frac{1}{2}\alpha$ . Kuna võrdkülgse kolmnurga sisenurk on suurusega  $60^\circ$  ja  $\beta = 90^\circ - \alpha$ , siis saame

$$\left(90^\circ - \frac{1}{2}\alpha\right) + 60^\circ + (90^\circ - \alpha) = 180^\circ,$$

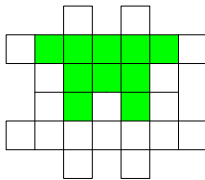
kust  $\frac{3}{2}\alpha = 60^\circ$  ehk  $\alpha = 40^\circ$ .

5. Tipunurk on alusele kui ümberringjoone kõõlule toetuv piiridenurk (joonis 8). Kuna piiridenurga suurus on  $30^\circ$ , siis alusele toetub kolmnurga ümberringjoone kesknurk suurusega  $2 \cdot 30^\circ$  ehk  $60^\circ$ . Selle kesknurga haarad ja alus moodustavad võrdhaarse kolmnurga tipunurga suurusega  $60^\circ$ . Selline kolmnurk on võrdkülgne. Kuna aluse pikkus on 30 cm, on ka ümberringjoone raadius 30 cm. Ümberringjoone pikkus on järelikult  $2\pi \cdot 30$  ehk  $60\pi$  sentimeetrit.

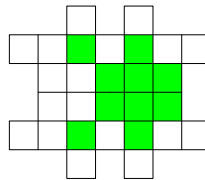


Joonis 8

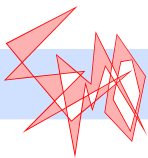
6. Esimesest antud võrrandist saame  $ab = 8cd$ , teisest aga  $ab + cd = bc$ . Asendades esimesest saadud seosest  $ab$  teise, saame  $8cd + cd = bc$  ehk  $9cd = bc$ . Kuna  $cd$  esineb nimetajas, siis ta ei saa olla null. Järelikult  $9 = \frac{bc}{cd} = \frac{b}{d}$ .
7. Pööramata kujundi paigutamiseks ruudustikule on 10 võimalust (joonisel 9 on rohelisteks värvitud kõik ühikruudud, mida saab katta kujundi ülemine keskmine ruut). Niisama palju on võimalusi  $180^\circ$  pööratud kujundi paigutamiseks. Ka  $90^\circ$  pööratud kujundi paigutamiseks on 10 võimalust (joonisel 10 on, nagu enne, kujundi sama ruudu kõikvõimalikud asukohad rohelistega märgitud). Niisama palju on võimalusi 270 kraadi pööratud kujundi paigutamiseks. Kokku on kujundi paigutamiseks 40 võimalust.



Joonis 9



Joonis 10



## II osa lahendused

### 1. (Maksim Ivanov)

Kui ostetakse korraga 10 kuni 20 paari sokke, siis kogu ostule kehtib allahindlus 20%. Kui ostetakse korraga rohkem kui 20 paari sokke, siis kehtib allahindlus 30%. Andri ostab 5 paari, Oliver 10 paari ja Kevin 15 paari sokke, kusjuures iga poiss teeb oma ostu eraldi. Kõik sokid on ühesugused. Mitme protsendi võrra kolme arve summast väiksem oleks koondarve, kui poisid sooritaksid ostu ühiselt?

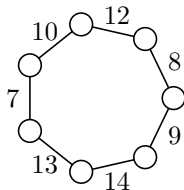
Vastus: 16.

Lahendus. Olgu soki hind  $a$ . Siis Andri arve on  $5a$ , Oliveri arve  $0,8 \cdot 10a$  ehk  $8a$  ja Kevinini arve  $0,8 \cdot 15a$  ehk  $12a$ . Kolme arve summa on  $5a + 8a + 12a$  ehk  $25a$ . Kui poisid sooritaksid ostu ühiselt, siis oleks sokkide koguarv  $5 + 10 + 15$  ehk  $30$  ja koondarve oleks  $0,7 \cdot 30a$  ehk  $21a$ . Seega koondarve oleks kolme arve summast väiksem  $25a - 21a$  ehk  $4a$  võrra, mis moodustab kolme arve summast  $\frac{4a}{25a} \cdot 100$  ehk 16 protsenti.

### 2. (Maksim Ivanov)

Igasse ringi kirjutatakse üks arv nii, et iga lõigu juurde märgitud arv võrdub selle lõigu otstes olevatesse ringidesse kirjutatud arvude summaga.

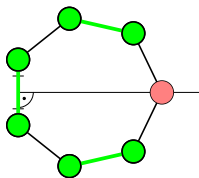
- Leia kõigisse ringidesse kirjutatavate arvude summa.
- Leia kõik arvud, mis esinevad mitmes ringis.



Vastus: a) 36,5; b) 4,5.

Lahendus 1.

- Lõikude juurde märgitud arvude summa on  $8 + 12 + 10 + 7 + 13 + 14 + 9$  ehk 73. Selle summa liidetavates on iga ringides esinev arv kahekordselt sees, sest iga ringi juurest lähtub 2 lõiku. Järelikult on ringidesse kirjutatud arvude summa  $\frac{73}{2}$  ehk 36,5.
- Liites kokku mingil lõigul ning sellest ülejäämisel ja üleeelmisel lõigul olevad arvud, on summas arvesse võetud arvud kõigist ringidest peale selle, mida läbib valitud lõigu keskristsirge (joonis 11). Kahes ringis on



Joonis 11

üks ja sama arv, kui vastavad ülejäänud ringides olevate arvude summad on võrdsed. Leiame iga ringi jaoks ülejäänud ringides olevate arvude summad; järgnevas tabelis loendatakse ringe vastupäeva alustades parempoolseimast:

Ringi nr	Ülejäänud ringide arvude summa
1	$12 + 7 + 14 = 33$
2	$10 + 13 + 9 = 32$
3	$7 + 14 + 8 = 29$
4	$13 + 9 + 12 = 34$
5	$14 + 8 + 10 = 32$
6	$9 + 12 + 7 = 28$
7	$8 + 10 + 13 = 31$

Tabelis kordub vaid arv 32. Seega mitmes ringis esineb vaid arv  $36,5 - 32$  ehk  $4,5$ .

*Lahendus 2.* Olgu arvude 14 ja 13 vahel ringis arv  $a$ , arvude 13 ja 7 vahel ringis arv  $b$ , arvude 7 ja 10 vahel ringis arv  $c$ , arvude 10 ja 12 vahel ringis arv  $d$ , arvude 12 ja 8 vahel ringis arv  $e$ , arvude 8 ja 9 vahel ringis arv  $f$  ning arvude 9 ja 14 vahel ringis arv  $g$ .

Kuna  $13 = a + b$  ja  $14 = a + g$ , siis  $g = b + 1$ . Kuna  $9 = g + f = b + 1 + f$  ja  $14 = a + g = a + b + 1$ , siis  $f = a - 5$ . Kuna  $8 = e + f$  ja  $9 = g + f$ , siis  $b + 1 = g = e + 1$ , millest  $e = b$ . Kuna  $12 = d + e = d + b$  ja  $13 = a + b$ , siis  $d = a - 1$ . Kuna  $10 = c + d = c + a - 1$  ja  $13 = a + b$ , siis  $c = b - 2$ . Kuna  $7 = b + c$ , siis saame siit  $7 = b + b - 2$ , millest  $b = 4,5$ ,  $a = 13 - 4,5 = 8,5$ ,  $c = b - 2 = 2,5$ ,  $d = a - 1 = 7,5$ ,  $e = b = 4,5$ ,  $f = a - 5 = 3,5$  ja  $g = b + 1 = 5,5$ .

Nüüd on selge, et ringides olevate arvude summa on

$$8,5 + 4,5 + 2,5 + 7,5 + 4,5 + 3,5 + 5,5$$

ehk  $36,5$  ja ainus korduv arv ringides on  $4,5$ .

### 3. (Maksim Ivanov)

Arvus 2026 tuleb üks number suurendada ja mingi teine number vähendada nii, et saadud neljakohaline arv jaguks arvuga 4. Mitu erinevat võimalust selleks on?

Vastus: 64.

*Lahendus 1.* Arv jagub 4-ga, kui tema kahest viimasest numbrist moodustatud arv jagub 4-ga. Kuna 26 ei jagu 4-ga, siis tuleb kümneliste või üheliste numbrit või mõlemat muuta.

- Tuhandeliste numbriga vähendamiseks on 1 võimalus. Kümneliste numbriga suurendamiseks ühelisi muutmata on 4 võimalust (sobib iga paaritu number peale 1), üheliste numbriga suurendamiseks kümnelisi muutmata on 1 võimalus (sobib ainult 8). Siit saame kokku  $4 + 1$  ehk 5 võimalust.
- Sajaliste numbriga vähendamiseks on 0 võimalust.
- Kümneliste numbriga vähendamiseks on 2 võimalust. Vähendades kümneliste numbriga 0-ks, tuleb üheliste number suurendada 8-ks, selleks on 1 võimalus. Vähendades kümneliste numbriga 1-ks, pole võimalik suurendada üheliste numbrit, kuid sajaliste numbriga suurendamiseks on 9 ja tuhandeliste numbriga suurendamiseks 7 võimalust. Seega siit saame  $1 + 9 + 7$  ehk 17 võimalust.
- Üheliste numbriga vähendamiseks sobivad paarisnumbrid 0, 2, 4. Vähendades üheliste numbriga 0-ks või 4-ks (2 võimalust), on kümneliste numbriga suurendamiseks 3 võimalust (sobivad 4, 6, 8), sajaliste numbriga suurendamiseks 9 võimalust ja tuhandeliste numbriga suurendamiseks 7 võimalust. Vähendades üheliste numbriga 2-ks (1 võimalus), tuleb kümneliste numbrit kindlasti muuta ja selleks on 4 võimalust (sobivad 3, 5, 7, 9). Seega siit saame kokku  $2 \cdot (3 + 9 + 7) + 4$  ehk 42 võimalust.

Kokku on nõutud omadustega arvu saamiseks järelikult  $5 + 17 + 42$  ehk 64 võimalust.

*Lahendus 2.* Arv jagub 4-ga, kui tema kahest viimasest numbrist moodustatud arv jagub 4-ga. Kuna 26 ei jagu 4-ga, siis tuleb kümneliste või üheliste numbrit või mõlemat muuta.

- Kui üheliste numbrit vähendada 0-ks või 4-ks (2 võimalust), on võimalik suurendada kümneliste numbrit 3 viisil (sobivad 4, 6, 8), sajaliste numbrit 9 viisil või tuhandeliste numbrit 7 viisil. Kokku saame siit  $2 \cdot (3 + 9 + 7)$  ehk 38 võimalust.
- Kui üheliste numbrit vähendada 2-ks (1 võimalus), siis tuleb kümneliste numbrit kindlasti muuta. Seega suurendada tuleb kümneliste numbrit ja seda saab teha 4 viisil (sobivad 3, 5, 7, 9). Kokku saame siit 4 võimalust.
- Üheliste numbriga suurendamiseks sobib ainult 8. Siis saab vähendada kümneliste numbrit 1 viisil (sobib ainult 0) või tuhandeliste numbrit 1 viisil (sobib ainult 1). Kokku saame siit 2 võimalust.
- Kui üheliste number jätta samaks, siis kümneliste numbriga vähendamiseks sobib ainult 1. Suurendada saab sajaliste numbrit 9 viisil või tuhandeliste numbrit 7 viisil. Kokku saame siit  $9 + 7$  ehk 16 võimalust.

- Kui üheliste number jätta samaks, siis kümneliste numbriga suurendamiseks on 4 võimalust (sobivad 3, 5, 7, 9). Vähendada saab vaid tuhandeliste numbrit 1 viisil (sobib vaid 1). Kokku saame siit 4 võimalust.

Kokku on nõutud omadusega arvu saamiseks järelikult  $38 + 4 + 2 + 16 + 4$  ehk 64 võimalust.

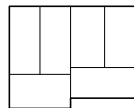
*Lahendus 3.* Arv jagub 4-ga, kui tema kahest viimasest numbrist moodustatud arv jagub 4-ga. Kuna 26 ei jagu 4-ga, siis tuleb kümneliste või üheliste numbrit või mõlemat muuta.

- Kümneliste ja üheliste number ei saa olla mõlemad arvu 2026 vastavatest numbritest väiksemad (00, 04, 12) ega suuremad (48, 68, 88). Seega need variandid annavad 0 võimalust.
- Kui kümneliste number on väiksem ja üheliste number suurem arvu 2026 vastavast numbrist (08) või kümneliste number on suurem ja üheliste number väiksem arvu 2026 vastavast numbrist (32, 40, 44, 52, 60, 64, 72, 80, 84, 92), siis teisi numbreid muuta enam ei saa. Seega iga selline variant annab 1 võimaluse, kokku 11 võimalust.
- Kui kümneliste number on niisama suur ja üheliste number suurem kui arvu 2026 vastav number (28) või kümneliste number suurem ja üheliste number niisama suur kui arvu 2026 vastav number (36, 56, 76, 96), siis tuleb vähendada sajaliste või tuhandeliste numbrit. Kuid sajaliste numbrit vähendada ei saa ja tuhandeliste numbrit saab vähendada ainult ühel viisil, asendades numbrit 2 numbriga 1. Seega iga siinne variant annab 1 võimaluse, kokku 5 võimalust.
- Kui kümneliste number on niisama suur ja üheliste number väiksem kui arvu 2026 vastav number (20, 24) või kümneliste number väiksem ja üheliste number niisama suur kui arvu 2026 vastav number (16), siis tuleb sajaliste või tuhandeliste numbrit suurendada. Sajaliste numbriga suurendamiseks on 9 võimalust, tuhandeliste numbriga suurendamiseks 7 võimalust. Seega iga siinne kahe viimase numbriga variant annab  $9 + 7$  ehk 16 võimalust, kokku  $3 \cdot 16$  ehk 48 võimalust.

Kokku on nõutud omadusega arvu saamiseks järelikult  $11 + 5 + 48$  ehk 64 võimalust.

#### 4. (Maksim Ivanov)

Joonisel on kuusnurk jaotatud kuueks võrdse pindalaga ristkülikuks. Neist kolm ristkülikut on omavahel võrdsed ja ka ülejäänud kolm ristkülikut on omavahel võrdsed. Iga ristküliku iga külje pikkus on täisarv sentimeetreid ning pikema ja lühema külje pikkuste jagatis on väiksem kui 3. Leia selle kuusnurga pindala, kui kuusnurga ümbermõõt on 272 cm.



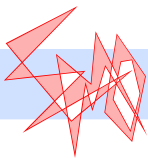
*Vastus:*  $4320 \text{ cm}^2$ .

*Lahendus.* Püstsed ristkülikud saavad võrdsed olla ainult selle rõhtse ristkülikuga, mis pole otse nende all (muidu tekiks ristkülik, mitte kuusnurk). Olgu vasakul ülal oleva ristküliku horisontaalse külje pikkus  $a$  cm ja ülal paremal oleva ristküliku horisontaalse külje pikkus  $b$  cm, kusjuures üldisust kitsendamata eeldame, et  $a < b$ . Siis all vasakul oleva rõhtse ristküliku horisontaalse külje pikkus on  $2a$  cm ja all paremal oleva ristküliku horisontaalse külje pikkus  $2b$  cm. Kuusnurga ümbermõõt on siis  $2 \cdot 2(a + b) + 2 \cdot (2b + b)$  ehk  $4a + 10b$  sentimeetrit. Seega kehtib  $4a + 10b = 272$ , kust

$$2a + 5b = 136.$$

Seega  $5b$  peab olema paarisarv, sest  $2a$  ja  $136$  on paarisarvud. See tähendab, et  $5b$  viimane number on 0 ja  $2a$  viimane number järelikult 6. See on võimalik vaid juhul, kui  $a$  viimane number on 3 või 8. Kui  $a = 3$ , siis  $b = 26$ ; kui  $a = 8$ , siis  $b = 24$ ; kui  $a = 13$ , siis  $b = 22$ ; kui  $a = 18$ , siis  $b = 20$ ; edasi  $a > b$ , mis on vastuolus eeldusega. Tingimus  $\frac{2b}{a} < 3$  on täidetud vaid juhul  $a = 18, b = 20$ .

Iga väikse ristküliku pindala on  $2ab$  ehk 720 ruutsentimeetrit, mistõttu kuusnurga pindala on  $6 \cdot 720$  ehk 4320 ruutsentimeetrit.



## II osa lahendused

### 1. (Maksim Ivanov)

Suures päklikpakis on 3 korda rohkem pähkleid kui väikses ja suur pakk maksab 6,3 euro võrra rohkem kui väike. Suure paki pähkli keskmine hind on väikse paki pähkli keskmisest hinnast 20% võrra madalam, kusjuures pähkli keskmine hind kummaski pakis on täisarv sente. Leia suurim võimalik pähklite arv väikses pakis.

Vastus: 90.

*Lahendus 1.* Olgu väikses pakis  $n$  pähklit keskmise hinnaga  $m$  senti. Siis väikse paki hind on  $nm$  senti. Suures pakis on  $3n$  pähklit keskmise hinnaga  $0,8m$  senti. Järelikult suure paki hind on  $3n \cdot 0,8m$  ehk  $2,4nm$  senti. Ülesande tingimustest saame võrduse  $2,4nm = nm + 630$ , kust  $1,4nm = 630$  ehk  $nm = 450$ . Seega väikse paki hind on 450 senti. Kuna suure paki pähklite keskmine hind  $0,8m$  ehk  $\frac{4}{5}m$  on täisarv, peab  $m$  olema 5 kordne. Mida suurem on pähklite keskmine hind, seda vähem neid kindla hinnaga pakis saab olla. Suurima võimaliku pähklite arvu saame järelikult siis, kui nende keskmine hind on vähim ehk  $m = 5$ . Sel juhul  $n = \frac{450}{5} = 90$  ehk väikses pakis on 90 pähklit.

*Lahendus 2.* Olgu väikses pakis  $n$  pähklit keskmise hinnaga  $m$  senti. Siis väikse paki hind on  $nm$  senti. Suures pakis on  $3n$  pähklit keskmise hinnaga  $0,8m$  senti. Järelikult suure paki hind on  $3n \cdot 0,8m$  ehk  $2,4nm$  senti. Ülesande tingimustest saame võrduse  $2,4nm - nm = 630$  ehk

$$1,4nm = 630. \quad (1)$$

Kuna suure paki pähklite keskmine hind  $0,8m$  ehk  $\frac{4}{5}m$  on täisarv, peab  $m$  olema 5 kordne. Võrrandist (1) nähtub, et mida suurem on  $n$ , seda väiksem peab olema  $m$ . Suurima võimaliku pähklite arvu saame järelikult siis, kui nende keskmine hind on vähim ehk  $m = 5$ . Võrrand (1) taandub kujule  $7n = 630$ , kust  $n = 90$ . Seega väikses pakis on 90 pähklit.

### 2. (Maksim Ivanov)

Tehe  $\diamond$  on kõigil arvudel defineeritud võrdusega  $a \diamond b = a^2 - b$ . Leia avaldise  $x \diamond y$  kõik võimalikud väärtused, kui  $x$  ja  $y$  on täisarvud, mille korral  $44 \diamond (x \diamond (y \diamond 26)) = 2026$ .

Vastus: 754, 814.

Lahendus. Kirjutades võrrandi vasakus pooles tehte  $\diamond$  rakendamised definitiooni järgi lahti, saame

$$\begin{aligned}44 \diamond (x \diamond (y \diamond 26)) &= 44 \diamond (x \diamond (y^2 - 26)) = \\ &= 44 \diamond (x^2 - (y^2 - 26)) = \\ &= 44^2 - (x^2 - (y^2 - 26)) = \\ &= 1936 - x^2 + y^2 - 26 = \\ &= 1910 - x^2 + y^2.\end{aligned}$$

Järelikult taandub võrrand kujule  $1910 - x^2 + y^2 = 2026$ , kust saame  $y^2 - x^2 = 2026 - 1910 = 116$ . Tegurdades vasakul, saame  $(y-x)(y+x) = 116$ . Kuna 116 on paarisarv, peab üks teguritest  $y+x$  ja  $y-x$  olema paarisarv. Kuna aga  $y+x$  ja  $y-x$  on ühe ja sama paarsusega, peavad mõlemad tegurid olema paarisarvud. Arvu 116 ainsad esitused kahe paarisarvu korrutisena on  $58 \cdot 2$ ,  $2 \cdot 58$ ,  $(-2) \cdot (-58)$  ja  $(-58) \cdot (-2)$ . Lahendades võrrandisüsteemid

$$\begin{cases} y+x = 58, \\ y-x = 2, \end{cases} \quad \begin{cases} y+x = 2, \\ y-x = 58, \end{cases} \quad \begin{cases} y+x = -2, \\ y-x = -58, \end{cases} \quad \begin{cases} y+x = -58, \\ y-x = -2, \end{cases}$$

saame vastavalt  $(x, y) = (28, 30)$ ,  $(x, y) = (-28, 30)$ ,  $(x, y) = (28, -30)$  ja  $(x, y) = (-28, -30)$ . Avaldise  $x \diamond y$  ehk  $x^2 - y$  väärtus on kahel esimesel juhul 754 ja kahel ülejäänud juhul 814.

### 3. (Artur Avameri)

Laual on 6 kivi, mis nummerdatud naturaalarvudega 1 kuni 6. Ats ja Pets teevad kordamööda käike, Ats alustab. Oma käigul võib mängija võtta laualt ühe kivi endale, kuid kivi numbriga  $k$  tohib võtta vaid juhul, kui sama mängija ei ole endale varem võtnud ühtegi kivi, mille number on  $k$  kordne. Kui mängija ei saa reeglipäraselt ühtegi kivi võtta, siis jätab ta käigu vahele. Mäng lõpeb, kui kumbki mängija ei saa reeglipäraselt kive võtta. Mängu võidab see, kelle kivide numbrite summa mängu lõpul on suurem (võrdse summa korral jääb mäng viiki). Kas emmal-kummal mängijal on võimalik võita vastase mistahes vastumängu korral ja kui jah, siis kellel?

Vastus: jah, Atsil.

Lahendus. Paneme tähele, et  $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21$ , seega mängija võit on kindel, kui ta kogub vähemalt 11 punkti.

Võtku Ats oma esimesel käigul kivi 5. Nüüd on kaks võimalust.

- Kui Pets võtab oma esimesel käigul kivi 6, siis võtab Ats oma teisel käigul kivi 4. Nüüd ei saa Pets võtta ühtegi kivi, sest arvud 1, 2 ja 3 on kõik arvu 6 tegurid. Seega on Pesti summaks 6 ning Atsi summa on juba vähemalt  $5 + 4$  ehk 9, seega Ats võidab.

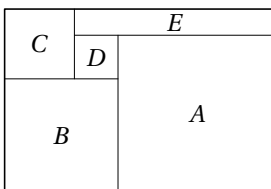
- Kui Pets ei võta oma esimesel käigul kivi 6, siis võtab Ats oma teisel käigul kivi 6 ja võidab.

*Märkus.* Selleks, et garanteerida võit, peab Ats esimesel käigul tingimata võtma kivi 5. Kui ta võtaks mistahes muu kivi, saaks Pets võtta ise kivi 5 ja garanteerida endale vähemalt viigi. Et seda näha, vaatame kolme võimalust, kuidas Ats saab mängida.

- Kui Ats võtab oma kahel esimesel käigul kivid 6 ja 4 (ükskõik kummas järjestuses), siis ta rohkem kive võtta ei saa. Seega on Atsi summaks 10. Pets aga saab järgnevalt võtta kivid 3 ja 2, millega mäng jääb viiki.
- Kui Ats võtab oma kahel esimesel käigul kivi 6 ja mõne muu väiksema numbriga kivi, siis saab Pets võtta oma teisel käigul kivi 4. Pärast seda ei saa Ats enam ühtki kivi võtta. Atsi summa on seega ülimalt 9, Petsil aga vähemalt 9. Seega lõpeb mäng viigi või Petsi võiduga.
- Kui Ats ei võta oma kahel esimesel käigul kivi 6, siis saab Pets võtta oma teisel käigul kivi 6 ja võita.

#### 4. (Maksim Ivanov)

Suur ristkülik on jagatud neljaks ruuduks  $A$ ,  $B$ ,  $C$  ja  $D$  ning ristkülikuks  $E$ .

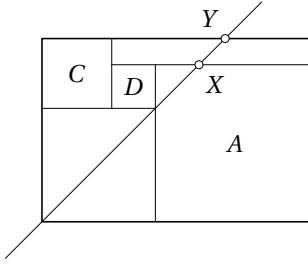


- Sirge, millel asub ruudu  $B$  diagonaal, jaotab ristküliku  $E$  kaheks osaks. Kas vasakpoolse osa pindala on suurem, väiksem või niisama suur kui parempoolse osa pindala?
- On teada, et suure ristküliku pindala on ruudu  $B$  pindalast 3,8 korda suurem. Kas ruudu  $D$  pindala on suurem, väiksem või niisama suur kui ristküliku  $E$  pindala?

*Vastus:* a) niisama suur; b) niisama suur.

*Lahendus.* Olgu ruudu  $B$  küljepikkus  $b$  ja ruudu  $D$  küljepikkus  $d$ . Siis ruutude  $A$  ja  $C$  küljepikkused on vastavalt  $b + d$  ja  $b - d$ . Ristküliku  $E$  mõõtmed on seega  $b - 2d$  ja  $b + 2d$ , suure ristküliku mõõtmed aga  $2b - d$  ja  $2b + d$ .

- Lõigaku sirge, millel asub ruudu  $D$  diagonaal, ristküliku  $E$  külgi punktides  $X$  ja  $Y$ , kusjuures  $Y$  asugu suure ristküliku küljel (joonis 12). See sirge eraldab ruudust  $A$  ruudu  $D$  kõrvalt täisnurkse kolmnurga, mille teravnurgad on samad nagu kolmnurgal, mille ruudu  $D$  diagonaal eraldab ruudust  $D$ . Need nurgad on suurusega  $45^\circ$ . Seega tegu on täisnurkse võrdhaarse kolmnurgaga, mille kaatedid on pikkusega  $d$ . Seega punkt  $X$



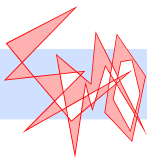
Joonis 12

asub ristküliku  $E$  lähimast tipust kaugusel  $d + d$  ehk  $2d$ . Vaadeldav sirge aga eraldab ka suurest ristkülikust võrdhaarse täisnurkse kolmnurga, mille üks tipp on  $Y$ . Selle kolmnurga kaated on pikkusega  $2b - d$ . See-ega punkt  $Y$  asub suure ristküliku lähimast tipust ja ühtlasi ristküliku  $E$  lähimast tipust kaugusel  $(2b + d) - (2b - d)$  ehk  $2d$ . Järelikult jaotab vaadeldav sirge ristküliku  $E$  kaheks võrdseks tükiks (ühe tüki saab  $180^\circ$  pööramisel nihutada teise peale). Võrdsete osade pindalad on võrdsed.

- b) Ruudu  $B$  pindala on  $b^2$ , suure ristküliku pindala aga  $(2b-d)(2b+d)$  ehk  $4b^2 - d^2$ . Ülesande tingimusest saame võrduse  $4b^2 - d^2 = 3,8b^2$ , mis lihtsustub kujule  $0,2b^2 = d^2$  ehk  $b^2 = 5d^2$ . Ruutude  $D$ ,  $A$  ja  $C$  pindalad on vastavalt  $d^2$ ,  $(b + d)^2$  ja  $(b - d)^2$  ning suure ristküliku pindala on  $(2b - d)(2b + d)$ . Tähistades ristküliku  $E$  pindala  $S$ , saame

$$\begin{aligned}
 S &= (2b - d)(2b + d) - (b + d)^2 - b^2 - (b - d)^2 - d^2 = \\
 &= 4b^2 - d^2 - b^2 - 2bd - d^2 - b^2 - b^2 + 2bd - d^2 - d^2 = \\
 &= b^2 - 4d^2 = \\
 &= 5d^2 - 4d^2 = \\
 &= d^2.
 \end{aligned}$$

Järelikult ruudu  $D$  ja ristküliku  $E$  pindalad on võrdsed.



## II osa lahendused

### 1. (Aleksei Ganyukov)

Mari kirjutab paberile vahedeta üksteise järele kõik positiivsed täisarvud, mis ei jagu arvuga 3, alustades vähimast ja jätkates järjest suurematega. Leia saadava pika arvu 2026. number.

*Vastus:* 6.

*Lahendus.* Naturaalarvude 1 kuni 9 seas on 9 arvu, neist iga kolmas jagub 3-ga. Seega kirjutab Mari neist 6 arvu. Sarnaselt näeme, et arvude 10 kuni 99 seast kirjutab Mari 60 arvu ja arvude 100 kuni 999 seast 600 arvu. Neis arvudes on kokku  $6 + 60 \cdot 2 + 600 \cdot 3$  ehk 1926 numbrit. Seega otsitavaks on järgnevalt paberile kirjutatavaist järjekorras 100. number, mis tähendab 25. kirjutatava neljakohalise arvu viimast numbrit. Esimese 36 neljakohalise arvu 1000, 1001, ..., 1035 seast kirjutab Mari 24 arvu, mis ei jagu 3-ga. Seega neljakohalistest arvudest 25-ndana kirjutab Mari arvu 1036, mistõttu otsitav number on 6.

### 2. (Maksim Ivanov)

Kui palju leidub erinevaid täisarvukolmikuid  $(a, b, c)$ , mis rahuldavad võrdusi  $ab + bc + ca = 1$  ja  $a + b = c$  ning kus üks arvudest  $a$ ,  $b$  ja  $c$  on 3?

*Vastus:* 4.

*Lahendus 1.* Kui  $c = 3$ , siis võrdusest  $ab + bc + ca = 1$  saame  $ab + 3(a + b) = 1$ . Kuna  $a + b = c$ , siis  $3(a + b) = 3c = 9$ , järelikult  $ab + 9 = 1$  ehk  $ab = -8$ . Juhul, kui  $a < 0$  ja  $b > 0$ , on variandid  $(a, b) = (-8, 1)$ ,  $(a, b) = (-4, 2)$ ,  $(a, b) = (-2, 4)$  ja  $(a, b) = (-1, 8)$ . Neist ükski ei sobi, sest vastavalt  $a + b = -7$ ,  $a + b = -2$ ,  $a + b = 2$  või  $a + b = 7$ , aga peaks olema  $a + b = c = 3$ . Variandid, kus  $a > 0$  ja  $b < 0$ , on sümmeetrilised ega anna samuti sobivaid lahendeid.

Kui  $b = 3$ , siis võrdusest  $ab + bc + ca = 1$  saame  $3(a + c) + ac = 1$ . Asendades  $c = a + b = a + 3$ , saame  $3(a + a + 3) + a(a + 3) = 1$ , millest lihtsustamisel saame  $a^2 + 9a = -8$ . Vasakul tegurdamine annab  $a(a + 9) = -8$ . Seega  $a < 0$  ja  $a + 9 > 0$ , mistõttu piisab läbi vaadata juhud  $a = -8, -7, -6, -5, -4, -3, -2, -1$ . Neist  $a = -8$  ja  $a = -1$  rahuldavad tingimust  $a(a + 9) = -8$  ja teised ei rahulda. Siit saame sobivad kolmikud  $(-8, 3, -5)$  ja  $(-1, 3, 2)$ .

Kui  $a = 3$ , siis saame sümmeetrilised kolmikud  $(3, -8, -5)$  ja  $(3, -1, 2)$ . Kokku on järelikult 4 tingimustele vastavat kolmikut.

*Lahendus 2.* Kui oleks  $c = 3$ , siis võrdusest  $ab + bc + ca = 1$  saaksime  $ab + 3(a + b) = 1$ . Kuna  $a + b = c$ , siis  $3(a + b) = 3c = 9$  ning  $b = c - a = 3 - a$ , järelikult  $a(3 - a) + 9 = 1$ , millest saaksime

$$a^2 - 3a - 8 = 0.$$

Selle ruutvõrrandi lahendid on  $a_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{41}}{2}$ . Kuna 41 pole ühegi täisarvu ruut, siis sel võrrandil täisarvulised lahendid puuduvad.

Kui  $b = 3$ , siis võrdusest  $ab + bc + ca = 1$  saame  $3(a + c) + ac = 1$ . Asendades  $c = a + b = a + 3$ , saame  $3(a + a + 3) + a(a + 3) = 1$ , millest lihtsustamisel saame

$$a^2 + 9a + 8 = 0. \quad (2)$$

Sel ruutvõrrandil on 2 erinevat täisarvulist lahendit  $a = -1$  ja  $a = -8$ . Kumbki lahend annab 1 kolmiku, kokku saame niisiis 2 kolmikut.

Juhul  $a = 3$  on sümmeetria põhjal samuti 2 kolmikut. Need kolmikud ei lange eelnevalt leitud kolmikutega kokku, sest  $a = 3$  ei ole ruutvõrrandi (2) lahend. Järelikult leidub 4 ülesande tingimusi rahuldavat täisarvukolmikut.

*Märkus.* Juhu  $c = 3$  saab välistada ka jääkide analüüsi abil. Tõepoolest, juhul  $c = 3$  järelduks võrdusest  $ab + bc + ca = 1$ , et  $ab \equiv 1 \pmod{3}$ . Jääkide läbivaatus näitab, et see on võimalik vaid juhtudel  $a \equiv b \equiv 1 \pmod{3}$  ja  $a \equiv b \equiv 2 \pmod{3}$ . Esimesel juhul  $a + b \equiv 2 \pmod{3}$ , teisel juhul  $a + b \equiv 4 \equiv 1 \pmod{3}$ . Saame vastuolu, sest  $a + b = c \equiv 0 \pmod{3}$ . (Kirjutis  $x \equiv y \pmod{m}$  märgib väidet, et vahe  $x - y$  jagub arvuga  $m$ .)

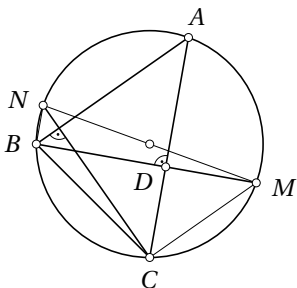
Juhu  $b = 3$  saab taandada ka ruutvõrrandile  $c^2 + 3c - 10 = 0$ , kasutades asendust  $a = c - 3$ . Selle ruutvõrrandi lahendid on  $c = -5$  ja  $c = 2$ . Juht  $a = 3$  taandub samale ruutvõrrandile.

### 3. (Oleg Košik)

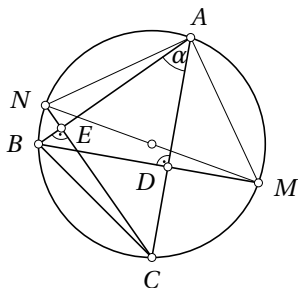
Teravnurkse kolmnurga  $ABC$  tippudest  $B$  ja  $C$  tõmmatud kõrguste pikendused üle aluspunkti lõikavad kolmnurga  $ABC$  ümberringjoont vastavalt punktides  $M$  ja  $N$ , mis on kolmnurga  $ABC$  ümberringjoone diameetri otspunktid. Leia nurga  $BAC$  suurus.

*Vastus:*  $45^\circ$ .

*Lahendus 1.* Olgu  $D$  tipust  $B$  tõmmatud kõrguse aluspunkt (joonis 13). Kuna  $MN$  on diameeter, siis Thalese teoreemi põhjal  $\angle MCN = 90^\circ$ . Järelikult on sirged  $AB$  ja  $CM$  paralleelsed, sest nad on mõlemad risti sirgega  $CN$ . Sellest tulenevalt  $\angle BMC = \angle MBA$ . Teiselt poolt  $\angle BMC = \angle BAC$ , sest  $BMC$  ja  $BAC$  on samale kaarele  $BC$  toetuvad piirdenurgad. Kokkuvõttes



Joonis 13



Joonis 14

$\angle MBA = \angle BAC$ , mis tähendab, et kolmnurk  $ADB$  on võrdhaarne täisnurkne kolmnurk täisnurgaga tippu  $D$  juures. Seega  $\angle BAC = \angle BAD = 45^\circ$ .

*Lahendus 2.* Olgu  $\angle BAC = \alpha$  ning olgu  $D$  ja  $E$  vastavalt tippudest  $B$  ja  $C$  tõmmatud kõrguste aluspunktid (joonis 14). Siis  $\angle ABM = \angle ABD = 90^\circ - \alpha$  ja samuti  $\angle ACN = \angle ACE = 90^\circ - \alpha$ . Samale kaarele toetuvatest piirde-  
nurkadest saame omakorda  $\angle AMN = \angle ACN = 90^\circ - \alpha$  ja analoogselt  $\angle ANM = 90^\circ - \alpha$ . Thalese teoreemi põhjal  $\angle MAN = 90^\circ$ . Kolmnurga  $AMN$  sisenurkade summast saame nüüd  $(90^\circ - \alpha) + (90^\circ - \alpha) + 90^\circ = 180^\circ$ , kust leiame  $\alpha = 45^\circ$ .

*Märkus.* Kuna ülesande püstitus on  $B$  ja  $C$  suhtes sümmeetriline, siis leidub ka lahendusega 1 sümmeetriline (kuid põhimõtteliselt sama) lahendus, kus vahetatud on  $B$  ja  $C$  rollid omavahel ning  $M$  ja  $N$  rollid omavahel.

4. (Maksim Ivanov)

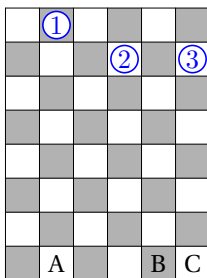
Joonisel on ruudustik mõõtmetega  $8 \times 6$ , millel on naha kolme nupu 1, 2 ja 3 esialgsed asukohad. Igat nuppu saab ühe käiguga liigutada vaid naaberruudule üle ühise külje, kusjuures käia ei tohi ruudule, millel on mängu käigus mõni nupp juba olnud. Juku sooritab reeglite kohaselt iga nupuga ühe ja sama arvu käike. Lõpptulemusena on nupud ruutudel A, B ja C mingis järjestuses. Leia kõik võimalused, mitu käiku võib Juku iga nupuga teha.

	①				
			②	③	
	A			B	C

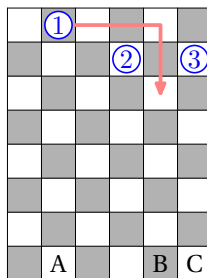
*Vastus:* 14.

*Lahendus.* Värvime ruudustiku ruudud malekorras mustaks ja valgeks; üldisust kitsendamata eeldame, et vasak alumine ruut on must (joonis 15). Ilmselt saab nupp ühe käiguga liikuda vaid vastasvärvilisele ruudule.

Esiteks paneme tähele, et kolmest algusruudust kaks on valged, kolmest lõpuruudust kaks samuti valged. Kui Juku sooritaks iga nupuga paaritu arvu



Joonis 15

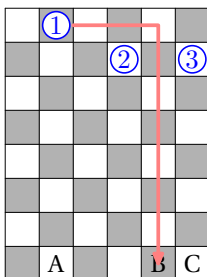


Joonis 16

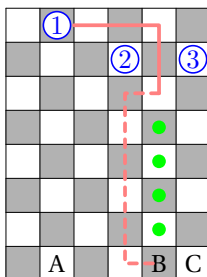
käike, siis oleks nupud lõpus vastasvärvi ruutudel ehk kahel mustal ja ühel valgel ruudul. Seega käikude arv, mille Juku iga nupuga teeb, peab olema paaris. Selle tulemusel jõuab iga nupp algsega sama värvi ruudule.

Järelikult peab nupp 1 jõudma ruudule B ning kahest ülejäänud nupust üks peab jõudma ruudule A. Kui nupu 1 liikumistee kulgeks mõlema nupu algsest asukohast vasakul, peaks ta viibima mõnel ruudul, mida läbib ka see nupp, mis lõpetab ruudul A. Seega nupu 1 liikumistee peab kulgema vähemalt ühe nupu algsest asukohast paremal. Ainus võimalus selleks on minna ülejäänud kahe nupu algsete asukohtade vahelt. Selleks peab nupp 1 tegema kõigepealt 3 käiku paremale ja siis vähemalt 2 käiku alla (joonis 16). Seejärel peab ta tegema veel vähemalt 5 käiku, et jõuda ruudule B. Seega kokku teeb iga nupp vähemalt 10 käiku. Vaatame võimalikud juhud läbi.

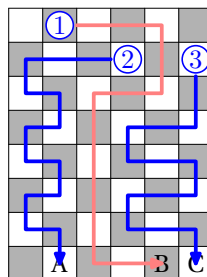
- Kui nupud teeks 10 käiku, siis peaks nupp 1 liikuma ruudule B otse mööda eelviimast tulpa (joonis 17). Siis aga oleks nupul 3 ainus võimalus liikuda 6 sammuga ruudule C, vastuolu.
- Kui nupud teeks 12 käiku, siis peaks nupp 1 tegema enne ruutu B lisakäigu vasakule ja teise paremale. See jätaks nupule 3 ülimalt 4 vaba lisa-



Joonis 17



Joonis 18

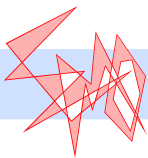


Joonis 19

ruutu (joonisel 18 märgitud rohelisega), mistõttu teeks nupp C ülimalt  $6 + 4$  ehk 10 käiku, vastuolu.

- Joonis 19 näitab, et 14 käiku on võimalik.
- Kui nupud teeks vähemalt 16 käiku, siis peaks ruudustikul olema vähemalt  $16 \cdot 3$  ehk 48 vaba ruutu. Ruudustikul on aga kokku  $6 \cdot 8 - 3$  ehk 45 vaba ruutu, vastuolu.

Seega ainus võimalus on, et Juku teeb iga nupuga 14 käiku.



## Lahendused

### 1. (Jan Villemson)

Järjesta kasvavalt arvud  $\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{12}{7}}$ ,  $\left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{12}{5}}$  ja 2.

Vastus:  $\left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{12}{5}} < 2 < \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{12}{7}}$ .

Lahendus. Arvude  $\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{12}{7}}$  ja 2 suurusvahekord on sama mis nende seitsmendatel astmetel  $\left(\frac{3}{2}\right)^{12}$  ja  $2^7$ . Nende arvude suurusvahekord omakorda on sama mis  $2^{12}$  korda suurematel arvudel  $3^{12}$  ja  $2^{19}$ . Kuna  $3^{12} = 531441$  ja  $2^{19} = 524288$  ning  $531441 > 524288$ , siis  $\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{12}{7}} > 2$ .

Arvude  $\left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{12}{5}}$  ja 2 suurusvahekord on sama mis nende viiendatel astmetel  $\left(\frac{4}{3}\right)^{12}$  ja  $2^5$ . Nende arvude suurusvahekord omakorda on sama mis  $3^{12}$  korda suurematel arvudel  $4^{12}$  ja  $2^5 \cdot 3^{12}$ . Paneme tähele, et  $4^{12} = 2^{24}$ . Seega jagades arvud  $4^{12}$  ja  $2^5 \cdot 3^{12}$  arvuga  $2^5$ , saame arvud  $2^{19}$  ja  $3^{12}$ . Ülal näitasime, et  $2^{19} < 3^{12}$ . Seega  $\left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{12}{5}} < 2$ .

Märkus 1. Olles tõestanud, et  $\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{12}{7}} > 2$ , saab võrratuse  $\left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{12}{5}} < 2$  tõestada ka järgmiselt. Tõstes võrratuse  $\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{12}{7}} > 2$  pooled astmesse  $\frac{7}{12}$ , saame

$$\frac{3}{2} > 2^{\frac{7}{12}}. \quad (3)$$

Kui oletada, et  $\left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{12}{5}} \geq 2$ , saaksime siit samamoodi

$$\frac{4}{3} \geq 2^{\frac{5}{12}}. \quad (4)$$

Korrutades võrratuste (3) ja (4) vastavad pooled, saame

$$2 = \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} > 2^{\frac{7}{12}} \cdot 2^{\frac{5}{12}} = 2^{\frac{7}{12} + \frac{5}{12}} = 2^1 = 2,$$

vastuolu. Järelikult  $\left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{12}{5}} < 2$ .

Märkus 2.  $\left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{12}{5}} \approx 1,995$  ja  $\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{12}{7}} \approx 2,004$ .

## 2. (Urve Kangro)

Leia kõik sellised reaalarvude paarid  $(p, q)$ , mille korral on ruutvõrrandi  $x^2 + px + q = 0$  lahendiks nii  $p$  kui ka  $q$ .

Vastus:  $(0, 0)$ ,  $(1, -2)$  ja  $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ .

Lahendus 1. Kui  $p$  on ruutvõrrandi  $x^2 + px + q = 0$  lahend, siis võrrandisse asendamisel saame  $p^2 + p^2 + q = 0$  ehk

$$2p^2 + q = 0. \quad (5)$$

Kui  $q$  on võrrandi  $x^2 + px + q = 0$  lahend, siis saame  $q^2 + pq + q = 0$  ehk

$$q(q + p + 1) = 0. \quad (6)$$

Kui seejuures  $q = 0$ , siis võrrandist (5) tuleneb ka  $p = 0$ . Siit saame ühe otsitava paari  $(0, 0)$ . Kui aga  $q \neq 0$ , siis võrrandi (6) poolte läbijagamisel suurusega  $q$  saame  $q + p + 1 = 0$  ehk  $q = -p - 1$ . Asendades siit  $q$  võrrandisse (5), saame  $2p^2 - p - 1 = 0$ . Selle ruutvõrrandi lahendamisel saame  $p = 1$  või  $p = -\frac{1}{2}$ ; vastavalt  $q = -2$  või  $q = -\frac{1}{2}$ . Siit saame veel kaks otsitavat paari

$(1, -2)$  ja  $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ .

Lahendus 2. Uurime kõigepealt juhtu, kus  $p \neq q$ . Siis on ruutvõrrandi  $x^2 + px + q = 0$  lahenditeks ainult  $p$  ja  $q$ . Viète'i valemite põhjal saame võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} pq = q, \\ p + q = -p. \end{cases}$$

Esimesest võrrandist saame variandid  $q = 0$  ja  $p = 1$ . Kui  $q = 0$ , siis teise võrrandi põhjal  $p = -p$  ehk  $p = 0$ , mis ei sobi eeldusega  $p \neq q$ . Kui aga  $p = 1$ , siis teine võrrand saab kuju  $1 + q = -1$ , kust  $q = -2$ . Siit saame ühe otsitava paari  $(1, -2)$ .

Vaatame nüüd juhtu, kus  $p = q$ . Ruutvõrrand on siis  $x^2 + px + p = 0$  ja  $p$  peab olema tema lahend. Asendades võrrandisse  $x = p$ , saame  $2p^2 + p = 0$  ehk  $p(2p+1) = 0$ . Seega  $p = 0$  või  $2p+1 = 0$ ; viimane variant annab  $p = -\frac{1}{2}$ .

Seega sobivad ka paarid  $(0, 0)$  ja  $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ .

*Märkus.* Viète'i valemite kaudu pole võimalik jõuda paarini  $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ , sest Viète'i valemi rakendatavuseks lahenditele  $x_1, x_2$  peavad need lahendid olema ainsad. Kui  $x_1 \neq x_2$ , siis nad ongi ainsad, sest ruutvõrrandil saab olla kuni kaks lahendit. Kui aga  $x_1 = x_2$ , siis peaks Viète'i valemi korrektseks rakendamiseks tegu olema kordse lahendiga, kuid selles ülesandes pole sellist tingimust antud (tingimusest „lahenditeks on nii  $p$  kui ka  $q$ “ ei tulene, et kui  $p = q$ , siis  $p = q$  on kordne lahend, vaid tegu võib olla üksiku lahendiga erinevate lahendite paarist). Seetõttu rahuldab ülesande tingimust ka võrrand  $x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} = 0$ , mille lahend on peale  $-\frac{1}{2}$  ka 1.

### 3. (Artur Avameri)

Kalkulaatori ekraanil on algul arv 1. Kalkulaatoril on kaks nuppu:

- 1) esimene nupp liidab ekraanil olevale arvule 3;
- 2) teine nupp korrutab ekraanil oleva arvu 4-ga.

Kas kalkulaatori ekraanile on võimalik saada

- a) arv 2025?
- b) arv 2026?

*Vastus:* a) ei; b) jah.

*Lahendus 1.*

- a) Esimene nupp jätab arvu jäägi jagamisel 3-ga samaks, sest liidab 3-ga jaguva arvu. Ka teine nupp jätab jäägi jagamisel 3-ga samaks, sest korrutab arvuga, mille jääk on 1. Kuna alguses ekraanil oleva arvu jääk jagamisel 3-ga on 1, siis saavad ekraanile ilmuda ainult sellised arvud, mille jääk jagamisel 3-ga on 1. Kuna arvu 2025 jääk 3-ga jagamisel on 0, siis arvu 2025 ekraanile saada võimalik ei ole.
- b) Vajutades 675 korda esimest nuppu, tekib tulemusena ekraanile arv  $1 + 675 \cdot 3$  ehk 2026.

*Lahendus 2.* Näitame, et ekraanile on võimalik saada kõik arvud kujul  $3k+1$ , kus  $k$  on mingi naturaalarv, ja ainult need. Üks võimalus arvu  $3k+1$  ekraanile saada on vajutada  $k$  korda esimest nuppu. Olgu nüüd  $n$  mingi arv, mida on võimalik ekraanile saada, ja kasutame matemaatilist induktsiooni nupuvajutuste arvu järgi näitamaks, et  $n$  esitub nõutud kujul. Kui  $n$  on algne arv, siis  $n = 1 = 3 \cdot 0 + 1$ . Vastasel korral olgu enne viimast nupuvajutust ekraanil arv  $m$ . Induktsiooni eelduse põhjal  $m = 3l + 1$  mingi täisarvu  $l$  korral. Kui viimasena vajutatakse esimest nuppu, siis  $n = m + 3 = 3l + 1 + 3 = 3(l+1) + 1$ . Kui viimasena vajutatakse teist nuppu, siis  $n = 4m = 4(3l+1) = 3(4l+1) + 1$ . Seega mõlemal juhul esitub uus arv nõutud kujul ja meie väide kehtib.

- a) Kuna arv 2025 jagub 3-ga, siis teda pole võimalik esitada kujul  $3k + 1$  ühegi täisarvu  $k$  jaoks. Seega arvu 2025 ekraanile saada võimalik ei ole.
- b) Kuna  $2026 = 3 \cdot 675 + 1$ , siis arvu 2026 on võimalik ekraanile saada.

4. (Artur Bentsa)

Leia kõik positiivsete täisarvude paarid  $(a, b)$ , mille korral

$$a + ab + b = a^2 + b^2.$$

Vastus:  $(1, 2), (2, 1), (2, 2)$ .

*Lahendus 1.* Rahuldagu paar  $(a, b)$  antud võrrandit. Lahutades mõlemast poolest  $2ab$ , saame samaväärse võrrandi  $a - ab + b = a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$ . Kuna reaalarvu ruut on mittenegatiivne, järeldub siit võrratus  $a - ab + b \geq 0$  ehk  $a + b \geq ab$ . Eeldades üldisust kitsendamata, et  $a \geq b$ , saame kokkuvõttes  $2a \geq a + b \geq ab$ , kust järeldub  $2 \geq b$  ehk  $b = 1$  või  $b = 2$ .

Vaatleme algset võrdust ruutvõrrandina

$$a^2 - (b + 1)a + b^2 - b = 0$$

muutuja  $a$  suhtes. Kui  $b = 1$ , siis saame  $a^2 - 2a = 0$ . Selle ruutvõrrandi ainus positiivne lahend on  $a = 2$ . Kui  $b = 2$ , siis saame  $a^2 - 3a + 2 = 0$ . Selle ruutvõrrandi lahendid on  $a = 1$  ja  $a = 2$ , kuid esimene ei rahulda eeldust  $a \geq b$ . Kokkuvõttes saame lahendid  $(2, 1)$  ja  $(2, 2)$ . Vahetades muutujate  $a$  ja  $b$  rollid, lisandub lahend  $(1, 2)$ .

*Lahendus 2.* Viies antud võrduses  $ab$  paremale poole võrdusmärki ja korrutades võrduse pooled arvuga 4, saame

$$4a + 4b = 4a^2 - 4ab + 4b^2 = 3a^2 + (a - 2b)^2 \geq 3a^2. \quad (7)$$

Üldisust kitsendamata eeldame, et  $a \geq b$ ; siis  $8a \geq 4a + 4b$ . Koos võrratusega (7) saame

$$8a \geq 3a^2,$$

kust  $8 \geq 3a$  ehk  $\frac{8}{3} \geq a$ . Täisarvulisust arvestades järeldub sellest  $2 \geq a \geq b$ . Seega on kõik võimalikud lahendid  $(1, 1), (2, 1)$  ja  $(2, 2)$ . Neist  $(1, 1)$  ei sobi ning ülejäänud sobivad. Vahetades muutujate  $a$  ja  $b$  rollid, lisandub lahend  $(1, 2)$ .

*Lahendus 3.* Vaatleme algset võrdust ruutvõrrandina

$$a^2 - (b + 1)a + b^2 - b = 0$$

muutuja  $a$  suhtes. Selle võrrandi diskriminant  $(b + 1)^2 - 4(b^2 - b)$  ehk  $-3b^2 + 6b + 1$  peab olema mittenegatiivne. Ruutvõrrandi  $-3b^2 + 6b + 1 = 0$  lahendid on  $\frac{6 \pm \sqrt{36 + 12}}{6}$  ehk  $1 \pm \frac{2}{3}\sqrt{3}$  ja kuna ruutliikme kordaja selles võrrandis on negatiivne, siis  $1 - \frac{2}{3}\sqrt{3} \leq b \leq 1 + \frac{2}{3}\sqrt{3}$ . Kuna  $1 + \frac{2}{3}\sqrt{3} < 1 + \frac{2}{3} \cdot 3 = 3$ , siis  $b < 3$  ehk  $b = 1$  või  $b = 2$ .

Kui  $b = 1$ , siis algne võrrand omandab kuju  $a^2 - 2a = 0$ . Selle ruutvõrrandi ainus positiivne lahend on  $a = 2$ . Kui  $b = 2$ , siis saame algsest võrrandist  $a^2 - 3a + 2 = 0$ . Selle ruutvõrrandi lahendid on  $a = 1$  ja  $a = 2$ . Kokkuvõttes saame lahendid  $(2, 1)$ ,  $(1, 2)$  ja  $(2, 2)$ .

*Lahendus 4.* Olgu  $b = a + k$ . Asendades selle antud võrrandisse ja lihtsustades, saame  $a$  suhtes ruutvõrrandi

$$a^2 + (k - 2)a + (k^2 - k) = 0.$$

Ruutvõrrandi lahendivalemi abil saame

$$a = \frac{2 - k \pm \sqrt{(k - 2)^2 - 4(k^2 - k)}}{2}. \quad (8)$$

Diskriminant on pärast lihtsustamist

$$D = 4 - 3k^2.$$

Kuna  $k$  on täisarv, siis diskriminant on mittenegatiivne vaid  $k = -1, 0, 1$  korral. Asendades need ükshaaval võrdusse (8) ja arvestades  $a$  ja  $b$  positiivsust, saame paarid  $(2, 1)$  (kui  $k = -1$ ),  $(2, 2)$  (kui  $k = 0$ ) ja  $(1, 2)$  (kui  $k = 1$ ).

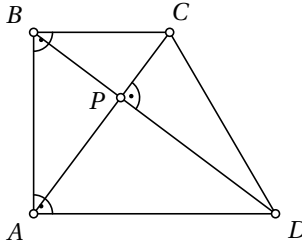
## 5. (Härmel Nestra)

Täisnurkse trapetsi diagonaalid pikkusega 3 cm ja 4 cm on omavahel risti. Leia selle trapetsi kõrgus ja aluste pikkused.

Vastus: kõrgus  $\frac{12}{5}$  cm, alused  $\frac{9}{5}$  cm ja  $\frac{16}{5}$  cm.

*Lahendus 1.* Olgu antud täisnurkne trapets  $ABCD$  kõrgusega  $AB$  ning alustega  $AD$  ja  $BC$ ; tähistame diagonaalide lõikepunkti  $P$  (joonis 20). Olgu  $|AC| = 3$  cm ja  $|BD| = 4$  cm ning  $AC \perp BD$ . Olgu veel  $|AD| = a$  cm,  $|BC| = b$  cm ja  $|AB| = h$  cm ning  $|PA| = u$  cm ja  $|PB| = v$  cm. Pythagorase teoreemist kolmnurkades  $PDA$ ,  $PAB$  ja  $PBC$  saame vastavalt  $(4 - v)^2 + u^2 = a^2$ ,  $u^2 + v^2 = h^2$  ja  $v^2 + (3 - u)^2 = b^2$ . Rakendades nüüd Pythagorase teoreemi kolmnurkades  $ABD$  ja  $ABC$  ning asendades  $a^2$ ,  $h^2$  ja  $b^2$  eelnevatest seostest, saame võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} (4 - v)^2 + u^2 + u^2 + v^2 & = 16, \\ u^2 + v^2 + v^2 + (3 - u)^2 & = 9. \end{cases}$$



Joonis 20

Avades mõlemas võrrandis sulud ja koondades sarnased liikmed, saame

$$\begin{cases} 2u^2 + 2v^2 - 8v = 0, \\ 2u^2 + 2v^2 - 6u = 0. \end{cases} \quad (9)$$

Lahutades süsteemi (9) esimesest võrrandist teise, saame  $6u - 8v = 0$  ehk  $8v = 6u$ , kust  $v = \frac{3}{4}u$ . Asendades siit süsteemi (9) esimesse võrrandisse, saame

$$2u^2 + 2 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2 u^2 - 6u = 0.$$

Vasakut poolt teisendades saame

$$\begin{aligned} 2u^2 + 2 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2 u^2 - 6u &= 2u^2 \left(1 + \frac{3^2}{4^2}\right) - 6u = 2u^2 \left(\frac{4^2 + 3^2}{4^2}\right) - 6u = \\ &= 2u^2 \cdot \frac{5^2}{4^2} - 6u = 2u \left(\frac{5^2}{4^2} u - 3\right). \end{aligned}$$

Kuna  $2u \neq 0$ , siis seega  $\frac{5^2}{4^2} u - 3 = 0$ , kust  $u = 3 \cdot \frac{4^2}{5^2}$ . Järelikult  $v = \frac{3}{4}u = 4 \cdot \frac{3^2}{5^2}$ .

Nüüd saame

$$h^2 = \left(3 \cdot \frac{4^2}{5^2}\right)^2 + \left(4 \cdot \frac{3^2}{5^2}\right)^2 = \frac{3^2 \cdot 4^2 \cdot (4^2 + 3^2)}{(5^2)^2} = \frac{3^2 \cdot 4^2 \cdot 5^2}{(5^2)^2} = \frac{3^2 \cdot 4^2}{5^2},$$

kust  $h = \frac{3 \cdot 4}{5} = \frac{12}{5}$ . Lõpuks saame

$$\begin{aligned} a^2 &= 4^2 - \frac{3^2 \cdot 4^2}{5^2} = \frac{5^2 \cdot 4^2 - 3^2 \cdot 4^2}{5^2} = \frac{(5^2 - 3^2) \cdot 4^2}{5^2} = \frac{4^2 \cdot 4^2}{5^2} = \frac{16^2}{5^2}, \\ b^2 &= 3^2 - \frac{3^2 \cdot 4^2}{5^2} = \frac{3^2 \cdot 5^2 - 3^2 \cdot 4^2}{5^2} = \frac{3^2 \cdot (5^2 - 4^2)}{5^2} = \frac{3^2 \cdot 3^2}{5^2} = \frac{9^2}{5^2}, \end{aligned}$$

kust vastavalt  $a = \frac{16}{5}$  ja  $b = \frac{9}{5}$ . Seega trapetsi  $ABCD$  kõrgus on  $\frac{12}{5}$  cm ning aluste pikkused  $\frac{9}{5}$  cm ja  $\frac{16}{5}$  cm.

*Lahendus 2.* Nagu lahenduses 1 tähistame trapetsi tipud  $A, B, C, D$ , diagonaalide lõikepunkti  $P$ , alused  $a$  cm,  $b$  cm ja kõrguse  $h$  cm. Tähistame veel  $\alpha = \angle DAC$  ja  $\beta = \angle DBC$ . Trapetsi aluste paralleelsuse tõttu  $\angle BCA = \alpha$  ja  $\angle BDA = \beta$ . Kuna trapetsi diagonaalid on risti, siis  $\alpha + \beta = 90^\circ$ . Kuna ka trapets on täisnurkne, siis saame  $\angle ABD = 90^\circ - \beta = \alpha$  ja  $\angle CAB = 90^\circ - \alpha = \beta$ .

Seega kolmnurgad  $PDA, PAB$  ja  $PBC$  on kõik omavahel sarnased tunnuse NN põhjal ning samuti on sarnased kolmnurgad  $ADB$  ja  $BAC$ . Kui  $k$  on sarnasustegur kolmnurkade  $PDA$  ja  $PAB$  vahel, siis  $\frac{|AB|}{|DA|} = k$ ; kuid kolmnurkade  $ADB$  ja  $BAC$  sarnasuse tõttu  $\frac{|BC|}{|AB|} = \frac{|AB|}{|DA|}$ , mis annab  $\frac{|BC|}{|AB|} = k$  ehk  $k$  on ühtlasi sarnasustegur kolmnurkade  $PAB$  ja  $PBC$  vahel. Nüüd Pythagorase teoreemist kolmnurkades  $BAC$  ja  $ADB$  saame vastavalt võrrandid  $a^2 + (ka)^2 = 16$  ja  $(ka)^2 + (k^2a)^2 = 9$ , kust vasakutes pooltes tegurdamise järel saame

$$\begin{cases} (1 + k^2) a^2 = 16, \\ k^2 (1 + k^2) a^2 = 9. \end{cases} \quad (10)$$

Jagades selle süsteemi esimese võrrandi teisega, saame  $k^2 = \frac{9}{16}$ , kust juurimine annab  $k = \frac{3}{4}$ . Asendades selle esimesse võrrandisse, saame  $a^2 = \frac{16}{1 + \frac{9}{16}} = \frac{16 \cdot 16}{16 + 9} = \frac{16^2}{5^2}$  ja  $a = \frac{16}{5}$ . Seega  $h = ak = \frac{16}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{12}{5}$  ja  $b = hk = \frac{12}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{9}{5}$ . Seega trapetsi  $ABCD$  kõrgus on  $\frac{12}{5}$  cm ning aluste pikkused  $\frac{9}{5}$  cm ja  $\frac{16}{5}$  cm.

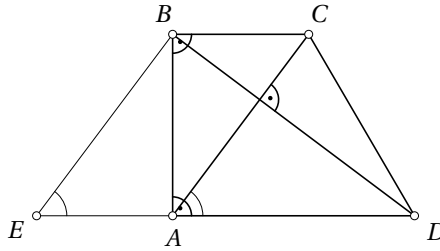
*Lahendus 3.* Nagu lahenduses 1 tähistame trapetsi tipud  $A, B, C, D$ , alused  $a$  cm,  $b$  cm ja kõrguse  $h$  cm. Olgu veel  $E$  selline punkt, et  $ACBE$  on rööpkülik (joonis 21). Siis  $|AE| = b$  cm ja  $|BE| = 3$  cm ning  $\angle EBD = 90^\circ$ .

Pythagorase teoreemist kolmnurkades  $ABD$  ja  $ABC$  saame vastavalt võrrandid  $a^2 + h^2 = 16$  ja  $b^2 + h^2 = 9$ , mille pooliti lahutamisel saame

$$(a - b)(a + b) = a^2 - b^2 = 16 - 9 = 7. \quad (11)$$

Pythagorase teoreemist kolmnurgas  $BDE$  aga saame

$$(a + b)^2 = 16 + 9 = 25,$$



Joonis 21

kust juurides leiame  $a + b = 5$ . Võrrandisse (11) asendades saame nüüd  $a - b = \frac{7}{5}$ . Võrrandisüsteemist

$$\begin{cases} a + b = 5, \\ a - b = \frac{7}{5} \end{cases}$$

saame  $a = \frac{16}{5}$ ,  $b = \frac{9}{5}$ . Lõpuks leiame

$$h^2 = 9 - \left(\frac{9}{5}\right)^2 = \frac{9 \cdot 25 - 9 \cdot 9}{25} = \frac{9 \cdot 16}{25} = \frac{144}{25},$$

kust  $h = \frac{12}{5}$ . Seega trapetsi  $ABCD$  kõrgus on  $\frac{12}{5}$  cm ning aluste pikkused  $\frac{9}{5}$  cm ja  $\frac{16}{5}$  cm.

*Lahendus 4.* Nagu lahenduses 1 tähistame trapetsi tipud  $A, B, C, D$ , alused  $a$  cm,  $b$  cm ja kõrguse  $h$  cm. Samuti nagu lahenduses 3 tõestame võrduse  $a + b = 5$ . Edasi paneme tähele, et nelinurgana, mille diagonaalid on omavahel risti, on trapetsi  $ABCD$  pindala diagonaalide poolkorrutis ehk  $6 \text{ cm}^2$ . Nüüd saame trapetsi pindala valemist avaldada

$$h = \frac{6}{\frac{1}{2} \cdot 5} = \frac{12}{5}.$$

Hüpoteenuusile toetuva kõrguse teoreemist kolmnurgas  $BDE$  leiame aga  $ab = h^2 = \frac{144}{25}$ . Viète'i valemite põhjal peavad  $a$  ja  $b$  olema ruutvõrrandi  $x^2 - 5x + \frac{144}{25} = 0$  lahendid

$$a, b = \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} - \frac{144}{25}} = \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{625 - 576}{100}} = \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{49}{100}} = \frac{5}{2} \pm \frac{7}{10}.$$

Järelikult  $a = \frac{5}{2} + \frac{7}{10} = \frac{25+7}{10} = \frac{16}{5}$  ja  $b = \frac{5}{2} - \frac{7}{10} = \frac{25-7}{10} = \frac{9}{5}$ . Seega trapetsi  $ABCD$  kõrgus on  $\frac{12}{5}$  cm ning aluste pikkused  $\frac{9}{5}$  cm ja  $\frac{16}{5}$  cm.

*Märkus.* Kirjutisega  $|l|$  tähistame lõigu  $l$  pikkust.

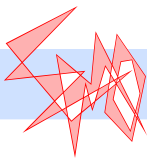
**6.** (*Artur Bentsa*)

On antud positiivne täisarv  $n$ ,  $n \geq 3$ . Juku kirjutab korrapärase  $n$ -nurga igasse tippu ühe positiivse täisarvu, mis pole suurem kui  $n$ , nii et erinevates tippudes on erinevad arvud. Seejärel kirjutab ta  $n$ -nurga sisse suurima arvu, mis esitub  $n$ -nurga mingi külje otspunktidesse kirjutatud kahe arvu summana. Leia vähim võimalik  $n$ -nurga sisse kirjutatav arv.

*Vastus:*  $n + 2$ .

*Lahendus.* Igast tipust lähtub kaks  $n$ -nurga külge kahte erinevasse naabertippu. Seega arvul  $n$  peab kindlasti olema vähemalt üks naaber, mis on vähemalt 2. Järelikult on  $n$ -nurga sisse kirjutatav arv vähemalt  $n + 2$ . Arv  $n + 2$  on võimalik saavutada, kui jagada arvud paaridesse  $(k, n + 1 - k)$ , kus  $k = 1, 2, \dots, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ , järjestada paarid esimese liikme kasvamise järgi ja kirjutada arvud  $n$ -nurga tippudesse paaride kaupa selles järjestuses, alati esimene liige enne teist; paaritu  $n$  korral jääb arv  $\frac{n+1}{2}$  üle, selle kirjutame viimase paari teise liikme ja esimese paari esimese liikme vahele. Kahe kõrvuti kirjutatud arvu summa muutub vahelduvalt  $n + 1, n + 2, n + 1, n + 2, \dots$  kuni viimase arvuni. Viimase ja esimese arvu summa on väiksem kui  $n + 2$ , sest esimene arv on 1.

*Märkus.* Iga reaalarvu  $x$  korral tähistab kirjutis  $\lfloor x \rfloor$  suurimat täisarvu, mis pole suurem kui  $x$ .



## Lahendused

### 1. (Aleksei Ganyukov)

Leia avaldise  $\frac{1}{a} - a$  väärtus, kui  $a = \sqrt{2026} - \sqrt{2025}$ .

Vastus: 90.

Lahendus 1. Nimetaja vabastamine irratsionaalsusest annab

$$\begin{aligned}\frac{1}{a} &= \frac{1}{\sqrt{2026} - \sqrt{2025}} = \frac{\sqrt{2026} + \sqrt{2025}}{(\sqrt{2026} - \sqrt{2025})(\sqrt{2026} + \sqrt{2025})} = \\ &= \frac{\sqrt{2026} + \sqrt{2025}}{(\sqrt{2026})^2 - (\sqrt{2025})^2} = \frac{\sqrt{2026} + \sqrt{2025}}{2026 - 2025} = \frac{\sqrt{2026} + \sqrt{2025}}{1} = \\ &= \sqrt{2026} + \sqrt{2025}.\end{aligned}$$

Seega

$$\frac{1}{a} - a = (\sqrt{2026} + \sqrt{2025}) - (\sqrt{2026} - \sqrt{2025}) = 2\sqrt{2025} = 2 \cdot 45 = 90.$$

Lahendus 2. Ühisele nimetajale viimine annab

$$\frac{1}{a} - a = \frac{1 - a^2}{a} = \frac{1 - (\sqrt{2026} - \sqrt{2025})^2}{\sqrt{2026} - \sqrt{2025}}. \quad (12)$$

Avades lugejas sulud, saame

$$1 - (\sqrt{2026} - \sqrt{2025})^2 = 1 - (\sqrt{2026})^2 + 2\sqrt{2026}\sqrt{2025} - (\sqrt{2025})^2.$$

Paneme aga tähele, et  $1 - (\sqrt{2026})^2 = 1 - 2026 = -2025 = -(\sqrt{2025})^2$ . Seega

$$\begin{aligned}1 - (\sqrt{2026} - \sqrt{2025})^2 &= 2\sqrt{2026}\sqrt{2025} - 2(\sqrt{2025})^2 = \\ &= 2\sqrt{2025}(\sqrt{2026} - \sqrt{2025}).\end{aligned}$$

Asendades siit võrdusse (12), saame

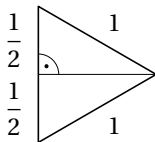
$$\frac{1}{a} - a = \frac{2\sqrt{2025}(\sqrt{2026} - \sqrt{2025})}{\sqrt{2026} - \sqrt{2025}} = 2\sqrt{2025} = 2 \cdot 45 = 90.$$

## 2. (Härmel Nestra)

Võrdkülgne kolmnurk  $ABC$  küljepikkusega 1 asub koordinaattasandil nii, et mediaanide lõikepunkt asub koordinaatide alguspunktis ja tipp  $A$  asub  $x$ -teljel. Leia kõik võimalused, millised saavad olla kolmnurga  $ABC$  tippude koordinaadid.

Vastus:  $A\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}; 0\right), B\left(\frac{\sqrt{3}}{6}; -\frac{1}{2}\right), C\left(\frac{\sqrt{3}}{6}; \frac{1}{2}\right)$  või  $A\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}; 0\right), B\left(\frac{\sqrt{3}}{6}; \frac{1}{2}\right), C\left(\frac{\sqrt{3}}{6}; -\frac{1}{2}\right)$   
 või  $A\left(\frac{\sqrt{3}}{3}; 0\right), B\left(-\frac{\sqrt{3}}{6}; -\frac{1}{2}\right), C\left(-\frac{\sqrt{3}}{6}; \frac{1}{2}\right)$  või  $A\left(\frac{\sqrt{3}}{3}; 0\right), B\left(-\frac{\sqrt{3}}{6}; \frac{1}{2}\right), C\left(-\frac{\sqrt{3}}{6}; -\frac{1}{2}\right)$ .

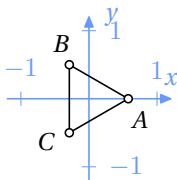
Lahendus. Võrdkülgse kolmnurga mediaan on ühtlasi kõrgus. Pythagorase teoreemist saame tema pikkuseks  $\sqrt{1^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2}$  ehk  $\frac{\sqrt{3}}{2}$  (joonis 22). Mediaanide lõikepunkt jaotab mediaani suhtes 2 : 1. Seega tippu  $A$  kaugus mediaanide lõikepunktist on  $\frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$  ehk  $\frac{\sqrt{3}}{3}$  ning tippust  $A$  tõmmatud mediaani teise otspunkti kaugus mediaanide lõikepunktist on  $\frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$  ehk  $\frac{\sqrt{3}}{6}$ .



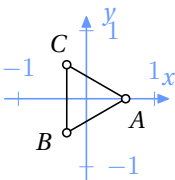
Joonis 22

Kuna tipp  $A$  ja mediaanide lõikepunkt asuvad mõlemad  $x$ -teljel, asub tippust  $A$  tõmmatud mediaan tervikuna  $x$ -teljel. Tippu  $A$   $x$ -koordinaat on eelneva põhjal kas  $\frac{\sqrt{3}}{3}$  või  $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ , tippust  $A$  tõmmatud mediaani teise otspunkti  $x$ -koordinaat aga vastavalt  $-\frac{\sqrt{3}}{6}$  või  $\frac{\sqrt{3}}{6}$ . Külge  $BC$  on risti  $x$ -teljega ja  $x$ -telg poolitab selle, mis tähendab, et  $x$ -koordinaat on tippudel  $B$  ja  $C$  sama mis tippust  $A$  tõmmatud mediaani teisel otspunktil ehk  $-\frac{\sqrt{3}}{6}$  või  $\frac{\sqrt{3}}{6}$ , tippude  $B$  ja  $C$   $y$ -koordinaadid on aga  $\frac{1}{2}$  ja  $-\frac{1}{2}$  mingis järjestuses.

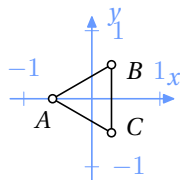
Kokkuvõttes saame 4 võimalust:  $A\left(\frac{\sqrt{3}}{3}; 0\right), B\left(-\frac{\sqrt{3}}{6}; \frac{1}{2}\right), C\left(-\frac{\sqrt{3}}{6}; -\frac{1}{2}\right)$  või  $A\left(\frac{\sqrt{3}}{3}; 0\right), B\left(-\frac{\sqrt{3}}{6}; -\frac{1}{2}\right), C\left(-\frac{\sqrt{3}}{6}; \frac{1}{2}\right)$  või  $A\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}; 0\right), B\left(\frac{\sqrt{3}}{6}; \frac{1}{2}\right), C\left(\frac{\sqrt{3}}{6}; -\frac{1}{2}\right)$  või  $A\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}; 0\right), B\left(\frac{\sqrt{3}}{6}; -\frac{1}{2}\right), C\left(\frac{\sqrt{3}}{6}; \frac{1}{2}\right)$  (joonised 23–26).



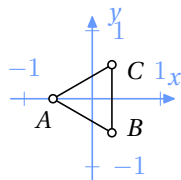
Joonis 23



Joonis 24



Joonis 25



Joonis 26

### 3. (Aleksei Ganyukov)

Leia kõik sellised erinevate numbritega kahekohalised naturaalarvud  $n$ , et arvu  $n$  ja temast numbrite järjekorra ümberpööramisele saadud arvu ruutu-  
de vahe on samuti mingi täisarvu ruut.

Vastus: 65.

Lahendus. Olgu  $n = 10a + b$ , kus  $a$  on kümneliste number ja  $b$  üheliste number. Ülesande tingimuse põhjal  $(10a + b)^2 - (10b + a)^2 = k^2$ , kus  $k$  on täisarv. Teisendades saame

$$\begin{aligned} k^2 &= (10a + b)^2 - (10b + a)^2 = \\ &= ((10a + b) - (10b + a))((10a + b) + (10b + a)) = \\ &= 9(a - b) \cdot 11(a + b) = \\ &= 9 \cdot 11(a - b)(a + b). \end{aligned}$$

Kuna 9 on täisruut, siis peab ka  $11(a - b)(a + b)$  olema täisruut. Seega peab  $a - b$  või  $a + b$  sisaldama tegurit 11. Aga  $a - b$  ei saa sisaldada tegurit 11, sest  $-9 < a - b < 9$  ning  $a - b \neq 0$ . Seega  $a + b$  sisaldab tegurit 11. Kuna  $0 < a + b < 20$ , siis ainus võimalus on  $a + b = 11$ . Seega  $11(a + b) = 11^2$ , mistõttu  $a - b$  peab olema täisruut. Arvestades, et  $a - b$  ja  $a + b$  on ühe ja sama paarsusega, on ainus võimalus  $a - b = 1$ . Võrrandisüsteemist

$$\begin{cases} a + b = 11, \\ a - b = 1 \end{cases}$$

saame  $a = 6$  ja  $b = 5$ . Järelikult  $n = 65$  on ainus sobiv arv.

### 4. (Hendrik Vija)

Leia kõik positiivsed reaalarvud  $k$ , mille korral leiduvad sellised positiivsed reaalarvud  $a, b$  ja  $c$ , et ruutvõrranditest  $ax^2 + kbx + c = 0$ ,  $bx^2 + kcx + a = 0$  ja  $cx^2 + kax + b = 0$  igähele on kaks erinevat reaalarvulist lahendit.

Vastus: kõik positiivsed reaalarvud  $k$ , mis on suuremad kui 2.

Lahendus. Tingimus, et kõigil neil ruutvõrranditel on kaks erinevat reaalarvulist lahendit, on samaväärne võrratuste süsteemiga

$$\begin{cases} k^2 b^2 - 4ac > 0, \\ k^2 c^2 - 4ab > 0, \\ k^2 a^2 - 4bc > 0. \end{cases}$$

Paneme tähele, et süsteem on muutujate  $a$ ,  $b$ ,  $c$  suhtes tsükliliselt sümmeetriline. Seega võime üldisust kitsendamata eeldada, et  $a$  on neist (mitte tingimata rangelt) vähim, ehk et  $a \leq b$  ja  $a \leq c$ . Siis näeme, et  $k \leq 2$  (ehk  $k^2 \leq 4$ ) korral

$$k^2 a^2 - 4bc \leq k^2 bc - 4bc = (k^2 - 4)bc \leq 0,$$

mis annab vastuolu võrratusega  $k^2 a^2 - 4bc > 0$ .

Juhul  $k > 2$  võime võtta  $a = b = c = 1$ , mispuhul

$$k^2 b^2 - 4ac = k^2 c^2 - 4ab = k^2 a^2 - 4bc = k^2 - 4 > 0.$$

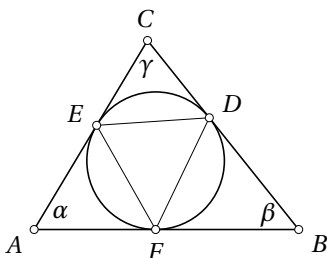
Seega kõigil vaadeldavatel ruutvõrranditel on sel juhul kaks erinevat reaalarvulist lahendit.

### 5. (Härmel Nestra)

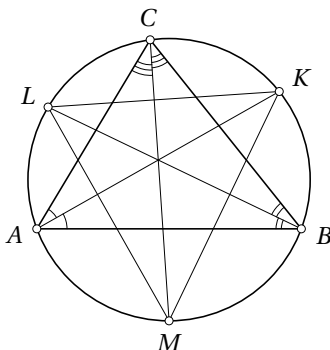
Kolmnurga  $ABC$  siseringjoone puutepunktid külgedega  $BC$ ,  $CA$  ja  $AB$  on vastavalt  $D$ ,  $E$  ja  $F$  ning ümberringjoone lõikepunktid tippude  $A$ ,  $B$  ja  $C$  juures olevate sisenurkade poolitajatega on vastavalt  $K$ ,  $L$  ja  $M$  ( $K \neq A$ ,  $L \neq B$ ,  $M \neq C$ ). Tõesta, et kolmnurgad  $DEF$  ja  $KLM$  on sarnased.

*Lahendus 1.* Tähistame  $\angle BAC = \alpha$ ,  $\angle CBA = \beta$  ja  $\angle ACB = \gamma$ . Puutujalõike võrdsuse põhjal  $|BF| = |BD|$ , seega  $\angle FDB = \frac{180^\circ - \beta}{2} = 90^\circ - \frac{1}{2}\beta$  (joonis 27). Analoogselt saame  $\angle CDE = 90^\circ - \frac{1}{2}\gamma$ . Järelikult

$$\angle EDF = 180^\circ - \left(90^\circ - \frac{1}{2}\beta\right) - \left(90^\circ - \frac{1}{2}\gamma\right) = \frac{1}{2}\beta + \frac{1}{2}\gamma.$$



Joonis 27

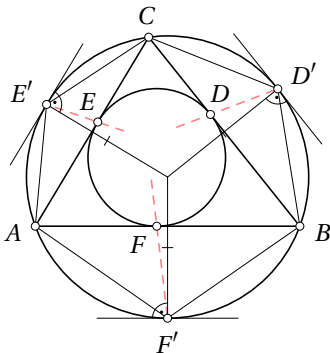


Joonis 28

Teisalt, kasutades kolmnurga  $ABC$  ümberringjoone samale kaarele toetuvaid piirdenurki, saame  $\angle LKA = \angle LBA = \frac{1}{2}\beta$  ja  $\angle AKM = \angle ACM = \frac{1}{2}\gamma$  (joonis 28). Seega

$$\angle LKM = \angle LKA + \angle AKM = \frac{1}{2}\beta + \frac{1}{2}\gamma.$$

Kokkuvõttes  $\angle EDF = \angle LKM$ . Analoogiliselt saame tõestada võrused  $\angle FED = \angle MLK$  ja  $\angle DFE = \angle KML$ . Seega on kolmnurgad  $DEF$  ja  $KLM$  sarnased.

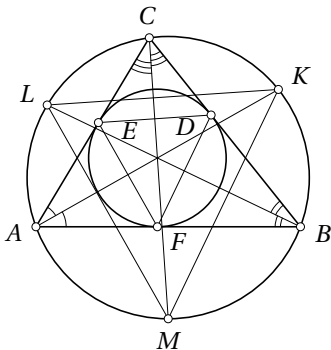


Joonis 29

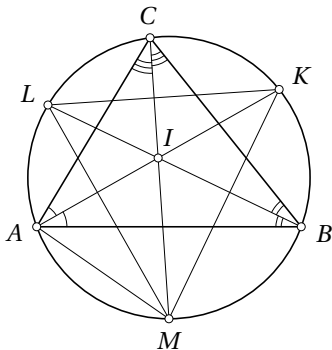
*Lahendus 2.* Vaatleme homoteetiat, mis viib kolmnurga  $ABC$  siseringjoone kolmnurga  $ABC$  ümberringjooneks. See homoteetia viib sirge  $BC$  temaga paralleelseks sirgeks, mis puutub kolmnurga  $ABC$  ümberringjoont, ja punkti  $D$  vastavaks puutepunktiks  $D'$  (joonis 29). Punkti  $D'$  tõmmatud kolmnurga  $ABC$  ümberringjoone raadius on risti puutujaga ja ühtlasi ka sirgema  $BC$ , poolitades järelikulit kõõlu  $BC$ . Kuna kolmnurga  $D'BC$  tipust  $D'$  tõmmatud kõrgus ja mediaan ühtivad, siis  $|D'B| = |D'C|$ , millest tulenevalt  $\angle BAD' = \angle D'AC$ . Seega  $D'$  on kolmnurga  $ABC$  tipu  $A$  juures oleva sisenurga poolitaja teine lõikepunkt ümberringjoonega ehk  $D' = K$ . Järelikulit viib vaadeldav homoteetia punkti  $D$  punktiks  $K$ . Analoogselt tõestame, et sama homoteetia viib punkti  $E$  punktiks  $L$  ja punkti  $F$  punktiks  $M$ . Seega viib see homoteetia kolmnurga  $DEF$  kolmnurgaks  $KLM$ , millest tulenevalt on kolmnurgad  $DEF$  ja  $KLM$  sarnased.

*Märkus 1.* Kirjutisega  $|l|$  tähistame lõigu  $l$  pikkust.

*Lahendus 3.* Kolmnurkade  $DEF$  ja  $KLM$  sarnasuse tõestamiseks piisab näidata, et nende kolmnurkade vastavad küljed on paralleelsed. Tõestame, et  $EF \parallel LM$ ; teised kaks paralleelsust on analoogilised. Väite  $EF \parallel LM$  tõestamiseks piisab näidata, et sirged  $EF$  ja  $LM$  on mõlemad risti sirgema  $AK$ .



Joonis 30

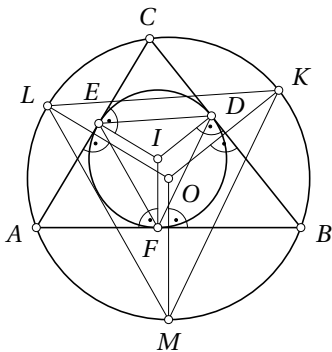


Joonis 31

Väite  $EF \perp AK$  tõestamiseks märkame, et kolmnurga  $ABC$  siseringjoone puutujalõigud  $AE$  ja  $AF$  on ühepikkused (joonis 30). Seega  $AEF$  on võrdhaarne kolmnurk tipunurgaga tipu  $A$  juures. Võrdhaarse kolmnurga tipunurga poolitaja on ühtlasi kõrgus. Sellest saamegi, et  $EF \perp AK$ .

Väite  $LM \perp AK$  tõestamiseks olgu  $I$  kolmnurga  $ABC$  nurgapoolitajate lõikepunkt (joonis 31). Tuntud fakt ütleb, et  $M$  on kolmnurga  $IAB$  ümberringjoone keskpunkt. Seega on lõigud  $MA$  ja  $MI$  ühepikkused. Samas aga  $\angle IML = \angle CML = \angle CBL = \angle LBA = \angle LMA$ . Seega  $ML$  on võrdhaarse kolmnurga  $MAI$  tipunurga poolitaja. Sellest saamegi  $LM \perp AK$ .

*Lahendus 4.* Olgu  $I$  kolmnurga  $ABC$  siseringjoone keskpunkt ja  $O$  kolmnurga  $ABC$  ümberringjoone keskpunkt (joonis 32). Siis  $IE \perp AC$  ja  $IF \perp AB$ , sest puutepunkti tõmmatud raadius on puutujaga risti. Märkame nüüd, et  $OL \perp AC$ , sest külje  $AC$  keskristsirge läbib punkti  $O$  ja tuntud fakti põhjal ka punkti  $L$ . Samamoodi saame  $OM \perp AB$ . Seega  $IE \parallel OL$  ja  $IF \parallel OM$ , millest



Joonis 32

tulenevalt  $\angle EIF = \angle LOM$ . Kuna  $IEF$  on võrdhaarne kolmnurk tipunurgaga tipu  $I$  juures ja  $OLM$  on võrdhaarne kolmnurk tipunurgaga tipu  $O$  juures, on ka ülejäänud nurgad omavahel võrdsed. Seega on kolmnurgad  $IEF$  ja  $OLM$  sarnased. Analoogselt saame veenduda, et ka kolmnurgad  $IFD$  ja  $OMK$  on sarnased ning kolmnurgad  $IDE$  ja  $OKL$  on sarnased.

Kasutades neid sarnasusi, saame nüüd

$$\angle EDF = \angle EDI + \angle IDF = \angle LKO + \angle OKM = \angle LKM.$$

Analoogselt tuletame võrdsed  $\angle FED = \angle MLK$  ja  $\angle DFE = \angle KML$ . Järelikult on kolmnurgad  $DEF$  ja  $KLM$  sarnased.

*Märkus 2.* Lahenduses 3 kasutatud tuntud fakti, et  $M$  on kolmnurga  $IAB$  ümberringjoone keskpunkt, on lihtne tõestada. Selleks tähistame kolmnurga  $IAB$  ümberringjoone keskpunkti  $M'$ . Piirde- ja kesknurga vahelisest seosest saame  $\angle IM'A = 2\angle IBA$ , samas kui

$$\angle IMA = \angle CMA = \angle CBA = 2\angle IBA.$$

Kokkuvõttes  $\angle IM'A = \angle IMA$ , mis näitab, et punktid  $I$ ,  $A$ ,  $M$  ja  $M'$  asuvad ühel ringjoonel. Analoogselt näitame, et ka punktid  $I$ ,  $B$ ,  $M$  ja  $M'$  asuvad ühel ringjoonel. Seega on neil kahel ringjoonel ühised punktid  $I$ ,  $M$  ja  $M'$ . Kuid kahel ringjoonel ei saa olla üle kahe ühise lõikepunkti ja punkti  $M'$  valiku põhjal ilmselt  $M' \neq I$ . Seega ainus võimalus on, et  $M' = M$ .

Veel lihtsam on tõestada lahenduses 4 kasutatud fakti, et külje  $AC$  keskristsirge läbib punkti  $L$  – selleks märkame, et  $\angle CBL = \angle LBA$ , mistõttu  $|CL| = |LA|$ . Võrdhaarse kolmnurga  $LCA$  tipunurgast tõmmatud kõrgus ja mediaan ühtivad.

## 6. (*Härmel Nestra*)

Kooli tenniseõhtule saabub 4 mängijat, kellest üks on Juku. Nende mängijate seast loositakse välja 2 erinevat paari (vähemalt üks mängija on neis paarides erinev). Kumbki paar mängib omavahel ühe näidismatši. Leia tõenäosus, et Juku ei osale kummaski matšis, kui iga võimaliku 2 paari kombinatsiooni väljaloosimise tõenäosus on üks ja sama.

Vastus:  $\frac{1}{5}$ .

*Lahendus 1.* Paare saab 4 mängijast moodustada  $C_4^2$  ehk  $\frac{4 \cdot 3}{2 \cdot 1}$  ehk 6. Paare ilma Jukuta saab moodustada  $C_3^2$  ehk  $\frac{3 \cdot 2}{2 \cdot 1}$  ehk 3.

Leiame soodsate võimaluste arvu. Soodsad võimalused on kõik 2 paari valikud 3 Jukuta paari seast. Selliseid võimalusi on  $C_3^2$  ehk 3.

Leiame kõigi võimaluste arvu. Need on kõik 2 paari valikud kõigi 6 paari seast. Selliseid võimalusi on  $C_6^2$  ehk  $\frac{6 \cdot 5}{2 \cdot 1}$  ehk 15.

Kokkuvõttes on otsitav tõenäosus  $\frac{3}{15}$  ehk  $\frac{1}{5}$ .

*Lahendus 2.* Leiame kõigi võimaluste arvu. Kuna 4 mängijast moodustatud paare on  $C_4^2$  ehk  $\frac{4 \cdot 3}{2 \cdot 1}$  ehk 6, siis 4 mängijast on 2 paari valikuks  $C_6^2$  ehk  $\frac{6 \cdot 5}{2 \cdot 1}$  ehk 15 võimalust.

Leiame soodsate võimaluste arvu. Selleks märkame kõigepealt, et võimalusi moodustada 4 mängijast 2 paari, milles esinevad kõik mängijad, on täpselt 3: Juku paariline on üks ülejäänud 3 mängijast ja teine paar on sellega üheselt määratud. Seega võimalusi moodustada 4 mängijast 2 paari, milles mõni mängija puudub, on  $15 - 3$  ehk 12. Puudu ei saa olla rohkem kui 1 mängija, sest vähem kui 3 mängijast ei ole võimalik moodustada 2 erinevat paari. Kuna sümmeetria põhjal on igal mängijal võrdne võimalus paaridesse loosimata jääda, siis võimalusi, kus Juku jääb paaridesse loosimata, on  $\frac{12}{4}$  ehk 3.

Kokkuvõttes on otsitav tõenäosus  $\frac{3}{15}$  ehk  $\frac{1}{5}$ .

*Lahendus 3.* Paare saab 4 mängijast moodustada  $C_4^2$  ehk  $\frac{4 \cdot 3}{2 \cdot 1}$  ehk 6. Oletame, et paare loositakse ükshaaval, ülesandes loositavad 2 paari on esimesed ja kokku loositakse välja kõigi 6 paari järjestus. Ülesandes küsitud võimalused on siis sellised, kus kõik need paarid, mille üks liige on Juku, on 4 viimaseks loositud paari seas. Paare, mille üks liige on Juku, on 3, sest igaüks ülejäänud 3 mängijast saab olla Juku paariline. Ülesande lahendamiseks piisab uurida võimalusi Jukut sisaldavate paaride paigutamiseks järjekorda nende omavahelist järjestust arvestamata, sest nende omavahelise ja ülejäänud paaride omavahelise järjestuse lisamiseks on igal juhul sama arv võimalusi.

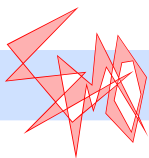
Leiame kõigi võimaluste arvu. Võimalusi 3 paari järjekorranumbrite valikuks arvudest 1, 2, 3, 4, 5, 6 on  $C_6^3$  ehk  $\frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2 \cdot 1}$  ehk 20.

Leiame soodsate võimaluste arvu. Võimalusi 3 paari järjekorranumbrite valikuks arvudest 3, 4, 5, 6 on  $C_4^3$  ehk  $\frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{3 \cdot 2 \cdot 1}$  ehk 4.

Kokkuvõttes on otsitav tõenäosus  $\frac{4}{20}$  ehk  $\frac{1}{5}$ .

*Lahendus 4.* Paare saab 4 mängijast moodustada  $C_4^2$  ehk 6. Oletame, et kaks paari loositakse ükshaaval. Tõenäosus, et esimene paar on Jukuta, on  $\frac{3}{6}$ , sest Jukuta paare on  $C_3^2$  ehk 3. Kui esimene paar on Jukuta, siis tõenäosus, et

ka teine paar on Jukuta, on  $\frac{2}{5}$ , sest teine paar loositakse  $6 - 1$  ehk 5 paari seast, mis erinevad esimesest paarist, ja neist on Jukuta  $3 - 1$  ehk 2. Seega tõenäosus, et Juku ei osale kummaski matšis, on  $\frac{3}{6} \cdot \frac{2}{5}$  ehk  $\frac{1}{5}$ .



## Eesti 73. matemaatikaolümpiaad

28. jaanuar 2026

Piirkonnavoor

12. klass

### Lahendused

#### 1. (Aleksei Ganyukov)

Leia avaldise

$$(1 + 2 + \dots + 20) \cdot 26 - (1 + 2 + \dots + 26) \cdot 20$$

väärtus.

Vastus:  $-1560$ .

Lahendus. Aritmeetilise jada summa valemi abil saame

$$(1 + 2 + \dots + 20) \cdot 26 = \frac{1 + 20}{2} \cdot 20 \cdot 26 = 21 \cdot \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 26,$$

$$(1 + 2 + \dots + 26) \cdot 20 = \frac{1 + 26}{2} \cdot 26 \cdot 20 = 27 \cdot \frac{1}{2} \cdot 26 \cdot 20 = 27 \cdot \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 26.$$

Seejuures  $\frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 26 = 10 \cdot 26 = 260$ . Järelikult

$$\begin{aligned}(1 + 2 + \dots + 20) \cdot 26 - (1 + 2 + \dots + 26) \cdot 20 &= 21 \cdot 260 - 27 \cdot 260 = \\ &= (21 - 27) \cdot 260 = \\ &= -6 \cdot 260 = -1560.\end{aligned}$$

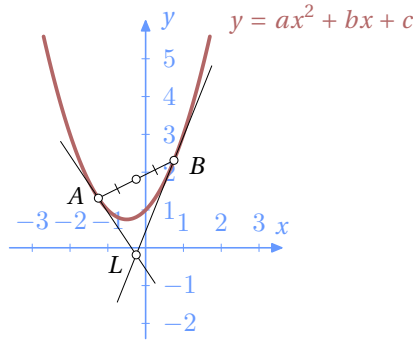
#### 2. (Härmel Nestra)

Sirged, mis puutuvad funktsiooni  $y = ax^2 + bx + c$  graafikut erinevates punktides  $A$  ja  $B$ , lõikuvad punktis  $L$ . Leia punkti  $L$  ja lõigu  $AB$  keskpunkti  $x$ -koordinaatide vahe.

Vastus:  $0$ .

Lahendus 1. Olgu  $A(x_A; y_A)$ ,  $B(x_B; y_B)$  ning  $L(x_L; y_L)$  (joonis 33). Kuna funktsiooni graafiku puutuja tõus võrdub funktsiooni tuletisega puutepunktis, siis puutujad punktides  $A$  ja  $B$  on vastavalt tõusudega  $2ax_A + b$  ja  $2ax_B + b$ . Puutujate lõikepunkti  $L$  koordinaadid rahuldavad seega võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} \frac{y_L - y_A}{x_L - x_A} = 2ax_A + b, \\ \frac{y_L - y_B}{x_L - x_B} = 2ax_B + b. \end{cases}$$



Joonis 33

Korrutades mõlemad võrrandid läbi vasaku poole nimetajaga ning lahutades saadud süsteemis teisest võrrandist esimese, saame

$$\begin{aligned}
 y_A - y_B &= (2ax_B + b)(x_L - x_B) - (2ax_A + b)(x_L - x_A) = \\
 &= 2ax_Bx_L - 2ax_B^2 + bx_L - bx_B - 2ax_Ax_L + 2ax_A^2 - bx_L + bx_A = \\
 &= (x_A - x_B)(a(2x_A + 2x_B - 2x_L) + b).
 \end{aligned} \tag{13}$$

Teisalt, kuna  $A$  ja  $B$  asuvad funktsiooni  $y = ax^2 + bx + c$  graafikul, siis

$$\begin{aligned}
 y_A - y_B &= (ax_A^2 + bx_A + c) - (ax_B^2 + bx_B + c) = \\
 &= a(x_A^2 - x_B^2) + b(x_A - x_B) = \\
 &= (x_A - x_B)(a(x_A + x_B) + b).
 \end{aligned} \tag{14}$$

Kuna võrrandite (13) ja (14) vasakud pooled on võrdsed, on võrdsed ka paremad pooled ehk

$$(x_A - x_B)(a(2x_A + 2x_B - 2x_L) + b) = (x_A - x_B)(a(x_A + x_B) + b).$$

Jagades selle võrrandi pooled läbi suurusega  $x_A - x_B$  (mis pole null, sest  $A \neq B$ ), saame  $a(2x_A + 2x_B - 2x_L) + b = a(x_A + x_B) + b$ , kust saame pärast lihtsustamist avaldada  $x_L = \frac{x_A + x_B}{2}$ . Seega punkti  $L$   $x$ -koordinaat langeb kokku lõigu  $AB$  keskpunkti  $x$ -koordinaadiga ehk nende koordinaatide vahe on 0.

*Lahendus 2.* Olgu  $L(x_L; y_L)$  ning olgu punktist  $L$  funktsiooni  $y = ax^2 + bx + c$  graafikule tõmmatud puutuja puutepunkti koordinaadid  $(x, y)$ . Kuna funktsiooni graafiku puutuja tõus võrdub funktsiooni tuletisega puutepunktis, siis  $\frac{y_L - y}{x_L - x} = 2ax + b$ , kust

$$y_L - y = (2ax + b)(x_L - x) = 2ax_Lx - 2ax^2 + bx_L - bx.$$

Kuna aga  $y = ax^2 + bx + c$ , saame siit

$$y_L - ax^2 - bx - c = 2ax_Lx - 2ax^2 + bx_L - bx,$$

kust sarnaste liikmete koondamisel ja ühele poole viimisel saame  $x$  suhtes ruutvõrrandi

$$ax^2 - 2ax_Lx + (y_L - bx_L - c) = 0.$$

Ruutvõrrandi lahendivalemi põhjal

$$x = \frac{2ax_L \pm \sqrt{4a^2x_L^2 - 4a(y_L - bx_L - c)}}{2a} = x_L \pm \sqrt{x_L^2 - \frac{y_L - bx_L - c}{a}}.$$

Kuna ülesande tingimuste põhjal on puutepunktid olemas ja erinevad, peab

sel ruutvõrrandil olema kaks lahendit. Tähistades  $\sqrt{x_L^2 - \frac{y_L - bx_L - c}{a}} = d$ ,

on punktide  $A$  ja  $B$   $x$ -koordinaadid parajasti  $x_L - d$  ja  $x_L + d$  mingis järjestuses võetuna. Lõigu  $AB$  keskpunkti  $x$ -koordinaat on siis järelikult  $\frac{(x_L - d) + (x_L + d)}{2}$  ehk  $x_L$ . Kokkuvõttes langevad punkti  $L$  ja lõigu  $AB$  keskpunkti  $x$ -koordinaadid ühte ehk nende vahe on 0.

*Märkus.* Selles ülesandes on võimalik arvutusi lihtsustada, fikseerides üldisust kitsendamata  $b = c = 0$  ja  $a = 1$ . Tõepoolest, kordajad  $b$  ja  $c$  määravad vaid parabooli asukoha koordinaattasandil, mistõttu ülesande väite kehtivus mingite  $b$  ja  $c$  korral näitab selle väite kehtivust iga  $b$  ja  $c$  korral. Sama võib öelda kordaja  $a$  märgi kohta. Kordaja  $a$  absoluutväärtuse muutmine on samaväärne tasandi kokkusurumise või väljavenitamisega  $x$ -telje sihis. See teisendus viib sirged sirgeteks, ta ei kaota puutumisi ega muuda neid lõikamisteks, samuti säilivad sirgete lõikepunktid ja lõikude keskpunktid. Seega ülesande väite kehtivusest mingi  $a$  korral järeldeb selle väite kehtivus iga nullist erineva  $a$  korral.

### 3. (Artur Avameri)

Leia kõik tingimust

$$p^a + p^b = q^2$$

rahuldavad nelikud  $(p, q, a, b)$ , kus  $p$  ja  $q$  on algarvud ning  $a$  ja  $b$  on mitteinnegatiivsed täisarvud.

*Vastus:*  $(2, 2, 1, 1)$ ,  $(3, 2, 1, 0)$ ,  $(3, 2, 0, 1)$ ,  $(2, 3, 3, 0)$  ja  $(2, 3, 0, 3)$ .

*Lahendus.* Kui  $a \geq 1$  ja  $b \geq 1$ , siis  $p$  on vasaku poole tegur. Seega on  $p$  ka arvu  $q^2$  tegur. Kuna  $p$  ja  $q$  on algarvud, siis järeldeb sellest  $p = q$ . Seega  $p^a + p^b = p^2$ . Kui siin võtta  $a \geq 2$  või  $b \geq 2$ , siis oleks vasak pool ilmselt suurem kui parem pool. Seega  $a = b = 1$  ehk  $p + p = p^2$ , kust teguriga  $p$  taandades saame  $p = 2$ . Siit saame lahendi  $(p, q, a, b) = (2, 2, 1, 1)$ .

Jääb uurida juhtu, kus  $a = 0$  või  $b = 0$ . Üldisust kitsendamata  $b = 0$ ; siis  $p^a + 1 = q^2$  ehk  $p^a = (q - 1)(q + 1)$ . Kuna  $p^a$  saab jaguda ainult  $p$  astmetega, peavad  $q - 1$  ja  $q + 1$  olema  $p$  astmed. Kui  $q - 1 = 1$ , siis  $q = 2$ ,  $p = 3$ ,  $a = 1$ . Siit saame lahendi  $(p, q, a, b) = (3, 2, 1, 0)$ . Olgu nüüd  $q - 1 > 1$  ning tähistame  $q - 1 = p^c$  ja  $q + 1 = p^d$ . Siis  $c < d$ , mistõttu  $p^c$  on ka arvu  $q + 1$  tegur ja ühtlasi vahe  $(q + 1) - (q - 1)$  ehk arvu 2 tegur. Seega  $q - 1 = 2$  ehk  $q = 3$  ning  $q + 1 = 4$ , millest tuleneb  $p^a = 2 \cdot 4 = 8 = 2^3$ . Siit saame lahendi  $(p, q, a, b) = (2, 3, 3, 0)$ . Lisaks leiduvad sümmeetrilised lahendid  $(p, q, a, b) = (3, 2, 0, 1)$  ja  $(p, q, a, b) = (2, 3, 0, 3)$ .

#### 4. (Hendrik Vija)

Arno ja Teele mängivad lumesõda. Esimesel rünnakul viskab Arno Teele suunas ühe lumekuuli. Alati, kui kumbki neist saab vastase rünnakul pih-ta mingi arvu lumekuulidega, viskab ta oma järgneval rünnakul teise suunas sellest kaks korda suurema arvu kuule. Mõlemad mängijad tabavad alati vähemalt 75% enda rünnakul visatud kuulidest. Tõesta, et Arno ja Teele jõuavad mängida vähem kui 13 täisvooruga, enne kui õues pimedaks läheb (voor koosneb Arno rünnakust ja sellele järgnevast Teele rünnakust). Eeldame, et valget aega on päeval 8 tundi ning iga lumekuuli viskamiseks kulub 1 sekund.

*Lahendus 1.* Järgnev tabel näitab Arno ja Teele poolt minimaalselt visatud kuulide arve ja tabanud kuulide arve.

Voor	Arno viskab	Neist tabab	Teele viskab	Neist tabab
1	1	1	2	2
2	4	3	6	5
3	10	8	16	12
4	24	18	36	27
5	54	41	82	62
6	124	93	186	140
7	280	210	420	315
8	630	473	946	710
9	1420	1065	2130	1598
10	3196	2397	4794	3596
11	7192	5394	10788	8091
12	16182	12137	24274	18206
13	36412			

Näeme, et ainuüksi Arno poolt 13. voorus visatud kuulide arv 36412 ületab sekundite arvu 8 tunnis, mis on  $8 \cdot 60 \cdot 60$  ehk 28800. Seega saab päev enne läbi, kui lumesõja 13. voor jõuab lõppeda.

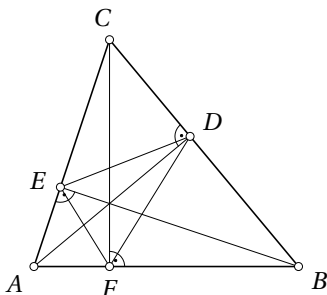
*Lahendus 2.* Esimeses voorus viskab Arno Teele suunas 1 lumekuuli, mis tabab sihtmärki, ning Teele viskab vastu 2 kuuli, mis samuti mõlemad tabavad sihtmärki. Teises voorus viskab Arno seega 4 kuuli, millest vähemalt 3 tabavad, Teele aga viskab vastu vähemalt 6 kuuli.

Edasi näeme, et kui üks mängija viskab mingis voorus  $a$  kuuli, siis neist tabab vähemalt  $0,75a$ , mistõttu vastane viskab enda järgmisel rünnakul vähemalt  $1,5a$  kuuli. Seega viskab esimene mängija järgmises voorus juba vähemalt  $(1,5)^2 a$  kuuli, mis on rohkem kui  $2a$ . Seega Arno visatud kuulide arvud voorudes  $2, 3, \dots, 13$  on vähemalt  $4, 4 \cdot 2, \dots, 4 \cdot 2^{11}$  ning Teele visatud kuulide arvud neis voorudes on vähemalt  $6, 6 \cdot 2, \dots, 6 \cdot 2^{11}$ . Järelikult viskavad Arno ja Teele voorudes  $2, 3, \dots, 13$  kokku vähemalt  $(4 + 6) \cdot (1 + 2 + \dots + 2^{11})$  kuuli. Geomeetrilise jada summa valemi abil lihtsustub see kujule  $10 \cdot (2^{12} - 1)$  ehk 40950. Samas on 8 tunnis vaid  $8 \cdot 60 \cdot 60$  ehk 28800 sekundit, mistõttu saab päev enne läbi, kui lumesõja 13. voor jõuab lõppeda.

### 5. (Härmel Nestra)

Lõpmatu jada liikmed on teravnurksed kolmnurgad. Alates teisest liikmest on iga kolmnurga tippudeks eelmise kolmnurga kõrguste aluspunktid. Tõesta, et selle jada kõik kolmnurgad on võrdkülgised.

*Lahendus.* Vaatleme teravnurkset kolmnurka  $ABC$  kõrgustega  $AD$ ,  $BE$  ja  $CF$  (joonis 34). Tähistame  $\angle BAC = \alpha$ ,  $\angle CBA = \beta$  ja  $\angle ACB = \gamma$ . Kuna  $\angle BEC = \angle BFC = 90^\circ$ , asuvad punktid  $B, F, E$  ja  $C$  ringjoonel diameetriga  $BC$ . Seega  $\angle AEF = \beta$  ja  $\angle EFA = \gamma$ . Analoogselt saame  $\angle BFD = \gamma$  ja  $\angle FDB = \alpha$  ning  $\angle CDE = \alpha$  ja  $\angle DEC = \beta$ . Järelikult kolmnurga  $DEF$  sisenurgad on suurustega  $\angle EDF = 180^\circ - 2\alpha$ ,  $\angle FED = 180^\circ - 2\beta$  ja  $\angle DFE = 180^\circ - 2\gamma$ .



Joonis 34

Kui mingi kolmnurk jadas ei oleks võrdkülgne, siis tema mingi sisenurga suurus oleks  $60^\circ + x$ , kus  $x \neq 0^\circ$ . Järgmise kolmnurga vastava sisenurga suurus oleks  $180^\circ - 2(60^\circ + x)$  ehk  $60^\circ - 2x$ . Samamoodi jätkates näeme, et ka igas järgmises kolmnurgas leidub sisenurk, mille suurus pole  $60^\circ$ , kusjuures

erinevused  $60^\circ$ -st on  $|x|, |2x|, |4x|, \dots$ . Kuna kolmnurga sisenurkade suurused on  $0^\circ$  ja  $180^\circ$  vahel, ei saa see protsess lõpmatuseni jätkuda. Vastuolu näitab, et jada iga kolmnurk peab olema võrdkülgne.

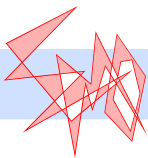
6. (Artur Avameri)

Juku kirjutab vihikusse  $n$  erinevat täisarvu,  $n > 1$ . Miku vaatab Juku vihikut ning kirjutab tahvlile omal valikul ühe avaldise kujul  $a + b$  või  $a - b$ , kus  $a$  ja  $b$  on mingid erinevad täisarvud Juku vihikus. Miku võidab, kui tema kirjutatud avaldise väärtus jagub arvuga 2026, vastasel juhul võidab Juku. Leia vähim  $n$ , mille korral Mikul on võimalik võita, ükskõik millised arvud Juku ka ei kirjutaks.

Vastus: 1015.

*Lahendus.* Kui  $n \leq 1014$ , siis Juku saab võita, kirjutades vihikusse arvud  $0, 1, \dots, n - 1$ . Tõepoolest, kui Miku kirjutab mingi avaldise  $a + b$ , siis  $0 + 1 \leq a + b \leq (n - 2) + (n - 1)$  ehk  $1 \leq a + b \leq 2n - 3 \leq 2 \cdot 1014 - 3 = 2025$ , mistõttu kirjutatud avaldise väärtus ei saa jaguda arvuga 2026. Kui aga Miku kirjutab mingi avaldise  $a - b$ , siis  $0 - (n - 1) \leq a - b \leq (n - 1) - 0$ , kust  $-1013 \leq a - b \leq 1013$ , kusjuures  $a - b \neq 0$ . Jällegi ei saa kirjutatud avaldise väärtus jaguda arvuga 2026.

Kui  $n = 1015$ , siis saab Miku võita. Tõepoolest, kui mingid kaks Juku kirjutatud arvu  $a$  ja  $b$  annavad arvuga 2026 jagamisel ühe ja sama jäägi, siis  $a - b$  jagub arvuga 2026, mistõttu Mikul piisab kirjutada avaldis  $a - b$ . Kui kõik Juku kirjutatud arvud annavad arvuga 2026 jagamisel erinevad jäägid, siis vaatleme 1012 paari  $(1, 2025), (2, 2024), \dots, (1012, 1014)$ . Ainsad arvuga 2026 jagamisel tekkivad jäägid, mida neis paarides pole, on 0 ja 1013. Seega jääkidest, mille annavad arvuga 2026 jagamisel Juku kirjutatud 1015 arvu, peab vähemalt 1013 tükki esinema neis paarides. Kuna neid arve on rohkem kui paare, peab leiduma kaks Juku kirjutatud arvu  $a$  ja  $b$ , mis esinevad samas paaris. Kuna iga paari arvude summa on 2026, piisab Mikul kirjutada vastav avaldis  $a + b$ .



## Lp hindaja!

Käesolevas esitame kõigepealt hindamise üldised põhimõtted ning seejärel järjekorras konkreetsete hindamisjuhised iga ülesande kohta eraldi.

1. Õpilase lahenduseks tuleb esmajoones lugeda see, mida õpilane on ülesande kohta vormistanud puhtandina (sh mustandipaberile selgesti arusaadavalt kirja pandud mõttekäigud, kui need on ametlikult puhtandipaberilt viidatud). Töö mustandi arvestamine või mittearvestamine ülesande lahenduse hulka on hindaja otsustada (või piirkonna hindamiskomisjoni ühine otsus kõigi ülesannete suhtes), kuid see peab toimuma kõigis töödes ühtmoodi.

2. Alljärgnevas on 7.–9. klassi olümpiaadi I osa (testi) ning kõikide ülejäänud üleannete hindamisjuhised esitatud erinevalt.

Testi iga küsimuse jaoks on eraldi loetletud või kirjeldatud vastused, mille eest tuleks anda vastavalt kaks punkti või üks punkt (st vastavaid punkte ühe küsimuse piires *ei tule* liita). Testiülesannete lahendusi õpilased ei pea esitama, vaid kirjutavad ülesannete lehel vastavale punktiirile või ülesande tekstis viidatud kohta ainult vastuse.

Seevastu kõigi teiste ülesannete kohta tuleb esitada täielikud lahendused, ainult vastustest ei piisa. Nende ülesannete lahendused on hindamisjuhistes jaotatud võimalust mööda osadeks (etappideks) ning on näidatud iga osa eest antav punktide arv (st ühe ülesande eest antava punktisumma saamiseks *tuleb* lahenduse erinevate osade eest antud punktid liita).

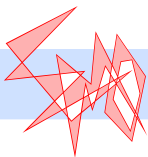
Mõnes skeemis on mõne etapi kirjelduse all („*Sealhulgas:*“ järel) alapunktidena välja toodud konkreetse etapi väiksemate osade eest antavad punktid – need lähevad käiku juhul, kui lahenduse see etapp on ebatäielik või vigane ja selle osa täispunkte seetõttu ei saa anda. Alamosade punktid tuleb omavahel samuti liita.

3. Žürii lahendustes ja käesolevates hindamisjuhistes on ülesannete vastused esitatud enamasti ainult ühel, lihtsaimal või kõige tõenäolisemalt esineval kujul. Hindamisel (sh testid!) tuleb võrdselt õigeks lugeda ka sama vastuse teised mõistlikud esitusviisid – sh taandatud hariliku murruna, segaarvuna, kümnendmurruna, sõnadega välja kirjutatuna –, seejuures ka osana pikemalt (nt täislausega, koos sobiva liigisõnaga või koos selgitustega) antud

vastusest. Juhud, kus ülesande sisu tingib erandeid sellest üldreeglist, on eraldi mainitud vastava ülesande hindamisjuhises.

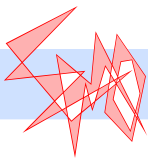
Ühik arvu järel on vastuses vajalik juhul, kui ülesandes on küsitud suurust, mis teatud ühikutes avaldub. Näiteks küsimusele „Kui suur pindala ...?“ saab õige vastus olla „120 cm<sup>2</sup>“, kuid mitte „120“ (kui ülesande tekstis pole kasutatud ühikuta pikkusi/pindalasisid). Teistes ühikutes väljendatud sama suurus tuleb lugeda õigeks, näiteks vastused „120 cm<sup>2</sup>“ ja „1,2 dm<sup>2</sup>“ on samaväärsed. Ühik vastuses ei ole nõutav, kui ülesandes on küsitud kindlate ühikute arvu. Näiteks küsimusele „Mitu ruutsentimeetrit ...?“ antud vastused „120“ ja „120 cm<sup>2</sup>“ tuleb võrdväärseks lugeda samal alusel nagu küsimusele „Mitu karu ...?“ antud vastused „3“ ja „3 karu“ (vastus koos liigisõnaga). Teistes ühikutes antud vastus tuleb aga lugeda valeks, vastused „120 cm<sup>2</sup>“ ja „1,2 dm<sup>2</sup>“ ei ole siin samaväärsed.

4. Mõnede ülesannete kohta, mida saab lahendada mitmel oluliselt erineval viisil, anname eraldi hindamiskeemid erinevate lahendusviiside jaoks. Rõhutame, et iga konkreetset mittetäielikku lahendust tuleb hinnata ainult *ühe* sellise skeemi järgi (selle järgi, mille kohaselt ta saaks kõige rohkem punkte).
5. Enamiku ülesannete korral (v.a testid ja tõestusülesanded) on hindamisjuhiste lõpus eraldi näidatud, mitu punkti anda ainult õige vastuse eest. See hinne on mõeldud juhuks, kui töös on ülesande kohta toodud ainult õige vastus või õige vastus koos mõttekäiguga, mis ei annaks skeemi järgi rohkem punkte kui on ette nähtud õige vastuse eest.
6. Kahtlemata esineb õpilaste töödes ka mõttekäike, mis ei mahu meie poolt pakutud skeemidesse. Selliste lahenduste hindamisel tuleb lähtuda sellest, *kui suur osa* antud ülesandest on õpilasel lahendatud, kasutades lahenduse üksikute osade kaalu määramisel võimaluse korral võrdluseks punktide jaotust meie pakutud hindamiskeemides.
7. *Mistahes* täieliku ja matemaatiliselt korrektse lahenduse eest tuleb igal juhul anda maksimumpunktid, sõltumata selle lahenduse pikkusest või otstarbekusest võrreldes teiste lahendusviisidega.



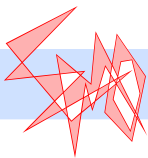
## I osa hindamisjuhised

1. ◦ Antud õige vastus 83: 2 p
2. ◦ Antud õige vastus 11: 2 p
3. ◦ Antud õige vastus 5: 2 p
4. ◦ Antud õige vastus  $8 \text{ dm}^2$ : 2 p  
◦ Antud vastuseks 8 ilma ühikuta või vale ühikuga: 1 p
5. ◦ Antud õige vastus 9: 2 p  
◦ Antud vastuseks  $9 \text{ cm}^2$  või 9 mõne muu ühikuga: 1 p
6. ◦ Antud õige vastus  $3^\circ$ : 2 p  
◦ Antud vastuseks 3 ilma kraadimärgita: 1 p
7. ◦ Antud õige vastus 20: 2 p



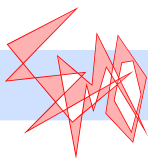
## I osa hindamisjuhised

1.
  - Antud õige vastus 2: 2 p
  - Antud vastuseks õige väärtusega taandamata murd, mille lugeja ja nimetaja on välja arvutatud (nt  $\frac{144}{72}$ ): 1 p
2.
  - Antud õige vastus  $-8$ : 2 p
3.
  - Antud õige vastus 60: 2 p
4.
  - Antud õige vastus 2029: 2 p
5.
  - Antud õige vastus  $54 \text{ cm}^2$ : 2 p
  - Antud vastuseks 54 ilma ühikuta või vale ühikuga: 1 p
6.
  - Antud õige vastus  $36^\circ$ : 2 p
  - Antud vastuseks 36 ilma kraadimärgita: 1 p
7.
  - Antud õige vastus 17: 2 p



## I osa hindamisjuhised

1.   ○ Antud õige vastus 11: 2 p
2.   ○ Antud õige vastus 19: 2 p
3.   ○ Antud õige vastus  $-200$ : 2 p
4.   ○ Antud õige vastus  $40^\circ$ : 2 p  
      ○ Antud vastuseks 40 ilma ühikuta: 1 p
5.   ○ Antud õige vastus  $60\pi$  cm: 2 p  
      ○ Antud vastuseks  $60\pi$  ilma ühikuta või vale ühikuga: 1 p  
      ○ Antud vastuseks 188,4 või täpsem arv ühikuga või ilma: 1 p
6.   ○ Antud õige vastus 9: 2 p
7.   ○ Antud õige vastus 40: 2 p



## II osa hindamisjuhised

1.
  - Avaldatud kõigi poiste arvete suurused ühe soki hinna kaudu: 2 p
  - Leitud poiste arvete summa: 1 p
  - Leitud ostetud sokkide koguarv: 1 p
  - Avaldatud koondarve suurus ühe soki hinna kaudu: 1 p
  - Jõutud siit õige lõppvastuseni koos õige arvutuskäiguga: 2 p

*Sealhulgas:*

  - Avaldatud ühise ostu puhul saavutatav hinnavõit ühe soki hinna kaudu, või leitud (koos õige arvutuskäiguga), kui suure osa moodustab koondarve kolme arve summas: 1 p

Ainult õige vastuse (16) eest ilma selgitusteta anda 2 punkti.

2.
  - Lahendatud ülesande a-osa: 3 p

*Sealhulgas:*

  - Leitud kõigi lõikude juurde märgitud arvude summa 73: 1 p
  - Põhjendatud, miks kõigis ringides olevate arvude summa on 2 korda väiksem: 2 p

◦ Lahendatud ülesande b-osa: 4 p

*Sealhulgas:*

  - Kirjeldatud töötav viis igas ringis oleva arvu leidmiseks: 2 p
  - Teostatud ammendav läbivaatus ja leitud ainus korduv arv: 2 p

Ainult mõlema osa õigete vastuste (36,5, 4,5) eest ilma selgitusteta anda 2 punkti. Ainult a-osa õige vastuse (teine puudu või vale) eest anda 1 punkt. Ainult b-osa õige vastuse (a-osa vastus puudu või vale) anda 1 punkt, kui b-osa vastuseks pole lisaks pakutud valesid arve, vastasel juhul 0 punkti.

3. Tõenäoliselt leiavad õpilased palju erinevaid süsteeme võimaluste läbivaatamiseks. Esitame siin hindamiskeemi lähtuvalt kolmest žürii lahendusest. Muid toimivaid süsteeme kasutatavate õpilaste tööde hindamiseks tuleb kohandada sarnaseimale lahendusele vastavat skeemi.
- Põhjendatud, et kümneliste või üheliste numbrit tuleb kindlasti muuta: 1 p
  - Jaotatud kõik võimalused mõistlikult juhtudeks ja leitud iga juhu jaoks õige võimaluste arv: 5 p
- Sealhulgas lahenduste eest, milles juhte vaadatakse väheneva numbril alusel (žürii lahendus 1):*

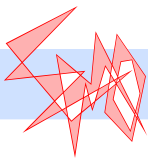
- Loendatud võimalused, kus väheneb tuhandeliste või sajaliste number: 1 p
- Loendatud võimalused, kus väheneb kümneliste number: 2 p
- Loendatud võimalused, kus väheneb üheliste number: 2 p
- *Sealhulgas lahenduste eest, milles juhte vaadatakse üheliste ja kümneliste numbri muutumise suuna alusel (žürii lahendus 2):*
  - Loendatud võimalused, kus üheliste number väheneb: 2 p
  - Loendatud võimalused, kus üheliste number suureneb: 1 p
  - Loendatud võimalused, kus üheliste number jääb samaks ja kümneliste number väheneb: 1 p
  - Loendatud võimalused, kus üheliste number jääb samaks ja kümneliste number suureneb: 1 p
- *Sealhulgas lahenduste eest, milles juhte vaadatakse tulemuse kahest viimasest numbrist saadava arvu alusel (žürii lahendus 3):*
  - Loendatud võimalused, kus kümneliste ja üheliste numbrid mõlemad muutuvad: 2 p
  - Loendatud võimalused, kus kahest viimasest numbrist üks ei muutu ja teine suureneb: 1 p
  - Loendatud võimalused, kus kahest viimasest numbrist üks ei muutu ja teine väheneb: 2 p
- Juhtude võimaluste arvud kokku liidetud ja saadud lõppvastus 64: 1 p

Ainult õige vastuse (64) eest ilma selgitusteta anda 2 punkti.

4. ○ Aru saadud, et püstsed ristkülikud on võrdsed selle rõhtse ristkülikuga, mis pole otse nende all: 1 p
- Saadud kahe rõhtse küljepikkuse (või kahe püstse küljepikkuse, või sama ristküliku küljepikkuste) suhtes võrrand, mida on lihtne analüüsida (nagu ametlikus lahenduses  $2a + 5b = 136$ ): 2 p
- Vaadatud ammendavalt läbi kõik juhud ja leitud ainus sobiv paar  $(a, b)$ : 3 p
- Sealhulgas:*
- Leitud võrrandi kõik naturaalarvulised lahendid tingimust  $\frac{b}{a} < 3$  rakendamata: 2 p
  - Leitud kuusnurga pindala  $4320 \text{ cm}^2$ : 1 p

Ainult õige vastuse ( $4320 \text{ cm}^2$ ) ilma selgitusteta anda 2 punkti.

Skeemi esimese rea järgi anda punkt ka siis, kui õpilane pole vastavat väidet otse kirja pannud, aga lahendusest nähtub, et õpilane võtab aluseks õige arusaama.



## II osa hindamisjuhised

1. ○ Koostatud võrrand, mis seob kõiki ülesandes antud suurusi (nt  $3n \cdot 0,8m = nm + 630$ ): 2 p
- Võrrandi lihtsustamisel saadud väikse paki hind 450 senti: 2 p
- Põhjendatud õige pähklite maksimaalarv väikses pakis: 3 p
- Sealhulgas:*
- Põhjendatud väikse paki pähklite keskmise hinna jaguvus 5-ga: 1 p

Ainult õige vastuse (90) eest ilma selgitusteta anda 2 punkti.

Toodud skeem vastab kõige otstarbekamale lahenduskäigule, mis on kirjas ametlikus materjalis. Töodes võib ette tulla mitmesuguseid ebaotstarbekaid, ringiga minevaid lahendusi, näiteks tähistatakse väikse paki pähklite arvu ja pähklite keskmise hinna asemel suure paki vastavad parameetrid. Sel juhul peab lahendaja lõpus tegema lisasamme, et jõuda väikse paki pähklite arvuni. Hindajal tuleb kaaluda, kui suure osa see lisatöö moodustab, ja vastavalt vähendada skeemijärgseid võrrandi koostamise ja lihtsustamise eest antavaid punkte, et jätta ruumi lõpuosa hindamiseks.

2. ○ Vabanetud võrrandi vasakus pooles kõigest tehte  $\diamond$  esinemistest definitsiooni põhjal: 2 p
- Sealhulgas:*
- Kirjutatud vähemalt üks tehte  $\diamond$  esinemine võrrandi vasaku poole kontekstis õigesti ümber: 1 p
  - Saadud võrrand lihtsustatud kujule  $y^2 - x^2 = 116$  (või ilmselgelt samaväärsele kujule): 1 p
  - Saadud kujus ruutude vahe tegurdatud: 1 p
  - Leitud kõik võimalused, mis saavad olla tegurid: 2 p
- Sealhulgas:*
- Põhjendatud, et mõlemad tegurid on paarisarvud: 1 p
  - Leitud kõik võimalused, mis saab olla  $x \diamond y$ : 1 p

Ainult täieliku õige vastuse (754, 814) eest ilma selgitusteta anda 2 punkti. Ainult osaliselt õige vastuse (üks lahenditest, teine puudu või vale) eest anda 1 punkt.

3. ○ Väidetud, et Ats saab garanteerida võidu, kui võtab oma esimesel käigul kivi 5: 2 p

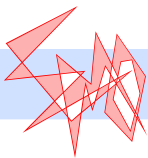
- Selgitatud, kuidas Ats garanteerib võidu, kui Pets võtab oma esimesel käigul kivi 6: 3 p  
*Sealhulgas:*
  - Väidetud, et selles olukorras Ats garanteerib võidu, kui võtab oma teisel käigul kivi 4: 1 p
- Selgitatud, kuidas Ats garanteerib võidu, kui Pets ei võta oma esimesel käigul kivi 6: 2 p  
*Sealhulgas:*
  - Väidetud, et selles olukorras Ats garanteerib võidu, kui võtab oma teisel käigul kivi 6: 1 p

Ainult õige vastuse (jah, Atsil) eest ilma selgitusteta anda 0 punkti.

Kõigi kivide numbrite summa 21 leidmine võib küll kohati hõlbustada põhjendusi, kuid see pole kriitilise tähtsusega, mistõttu selle summa leidmise eest eraldi punkte pole ette nähtud.

4. ○ Avaldatud kõigi ruutude, ristküliku  $E$  ja suure ristküliku mõõtmed mingi kahe pikkuse kaudu: 1 p
- Lahendatud ülesande a-osa: 3 p
  - Lahendatud ülesande b-osa: 3 p

Ainult õigete vastuste (mõlemal juhul niisama suur) eest ilma selgitusteta anda 0 punkti.



## II osa hindamisjuhised

1.
  - Leitud, et Mari kirjutab 6 ühekohalist arvu: 1 p
  - Leitud, et Mari kirjutab 60 kahekohalist arvu: 1 p
  - Leitud, et Mari kirjutab 600 kolmekohalist arvu: 1 p
  - Arvutatud välja, et Mari kirjutatud ühe-, kahe- ja kolmekohalistes arvudes on kokku 1926 numbrit: 1 p
  - Lahendus lõpule viidud ja antud õige vastus: 3 p

*Sealhulgas:*

- Leitud, et otsitav number on 25. kirjutatava neljakohalise arvu viimane number: 1 p
- Leitud, et arvude 1000, 1001, ..., 1035 seast kirjutab Mari 24 arvu: 1 p

Ainult õige vastuse (6) eest ilma selgitusteta anda 1 punkt.

2.
  - Põhjendatud, et juhul  $c = 3$  lahendeid ei ole: 2 p

*Sealhulgas:*

- Asendades  $c = 3$  antud seostesse, jõutud ruutvõrrandini  $a^2 - 3a - 8 = 0$  (või sama võrrandini  $b$  suhtes): 1 p

- Põhjendatud, et juhul  $b = 3$  (või  $a = 3$ ) on 2 sobivat kolmikut: 3 p

*Sealhulgas:*

- Asendades  $b = 3$  (vastavalt  $a = 3$ ) antud seostesse, jõutud ruutvõrrandini  $a^2 + 9a + 8 = 0$  (vastavalt  $b^2 + 9b + 8 = 0$ ) või  $c^2 + 3c - 10 = 0$ : 1 p

- Põhjendatud (nt sümmeetriaga), et ka juhul  $a = 3$  (vastavalt  $b = 3$ ) on 2 sobivat kolmikut: 1 p

- Põhjendatud, et erinevatel juhtudel saadud kolmikud on erinevad, ja antud õige vastus: 1 p

Skeemi viimasel real nõutakse eraldi põhjendust, et kolmikud on erinevad, kui lahenduskäigus pole õigeid kolmikuid välja kirjutatud (sarnaselt žürii lahendusega 2). Kui seda on tehtud (nagu žürii lahenduses 1), siis lugeda kolmikute erinevus sellega ühtlasi põhjendatuks. Kui kolmikute arvu ei leita ja vastuseks pakutakse kolmikute loetelu, siis anda skeemi viimase rea järgi 0 punkti.

Ainult õige vastuse (4) eest ilma selgitusteta anda 1 punkt. Kui kolmikute arvu asemel on vastuseks antud kolmikute loetelu, siis anda 0 punkti.

3. Anname selguse huvides eraldi hindamiskeemid žürii lahenduse 1 kahe omavahel sümmeetrilise variandi jaoks ning žürii lahenduse 2 jaoks.

*Skeem lahendustele, mis kasutavad sirgete AB ja CM paralleelsust (žürii lahendus 1):*

- Põhjendatud, et  $\angle MCN = 90^\circ$ : 1 p
- Järeldatud, et  $AB \parallel CM$ : 2 p
- Põhjendatud, et  $\angle MBA = \angle BAC$ : 2 p

*Sealhulgas:*

- Saadud üks võrdustest  $\angle BAC = \angle BMC$ ,  $\angle BAC = \angle MCA$ ,  
 $\angle MBA = \angle MCA$  ja  $\angle MBA = \angle BMC$ : 1 p

- Põhjendatud, et  $\angle BAC = 45^\circ$ : 2 p

*Skeem lahendustele, mis kasutavad sirgete AC ja BN paralleelsust (žürii lahendus 1, sümmeetriline variant):*

- Põhjendatud, et  $\angle MBN = 90^\circ$ : 1 p
- Järeldatud, et  $AC \parallel BN$ : 2 p
- Põhjendatud, et  $\angle ACN = \angle BAC$ : 2 p

*Sealhulgas:*

- Saadud üks võrdustest  $\angle BAC = \angle BNC$ ,  $\angle BAC = \angle ABN$ ,  
 $\angle ACN = \angle ABN$  ja  $\angle ACN = \angle BNC$ : 1 p

- Põhjendatud, et  $\angle BAC = 45^\circ$ : 2 p

*Skeem lahendustele, kus avaldatakse otsitav nurk kolmnurga AMN sisenurkade summast (žürii lahendus 2);  $\alpha$  tähistab otsitavat nurka nagu lahenduses:*

- Põhjendatud, et  $\angle AMN = 90^\circ - \alpha$ : 2 p

*Sealhulgas:*

- Saadud võrdus  $\angle AMN = \angle ACN$  või  $\angle ACN = 90^\circ - \alpha$ : 1 p

- Põhjendatud, et  $\angle ANM = 90^\circ - \alpha$ : 2 p

*Sealhulgas:*

- Saadud võrdus  $\angle ANM = \angle ABM$  või  $\angle ABM = 90^\circ - \alpha$ : 1 p

Põhjendatud, et  $\angle MAN = 90^\circ$ : 1 p

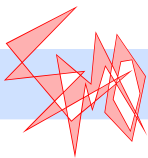
- Koostatud sobiv võrrand  $\alpha$  leidmiseks: 1 p

- Leitud õige vastus: 1 p

Ainult õige vastuse ( $45^\circ$ ) eest ilma selgitusteta anda 1 punkt.

4. ○ Põhjendatud, et nupud teevad paarisarvu käike: 1 p
- Põhjendatud, et nupp 1 peab jõudma ruudule B: 1 p
  - Põhjendatud, et nupp 1 peab liikuma nuppude 2 ja 3 vahelt: 1 p
  - Põhjendatud, et pole võimalik, et kõik nupud teevad 10 käiku: 1 p
  - Põhjendatud, et pole võimalik, et kõik nupud teevad 12 käiku: 1 p
  - Näidatud viis, kuidas iga nupp teeb 14 käiku: 1 p
  - Põhjendatud, et pole võimalik, et iga nupp teeb 16 käiku või rohkem: 1 p

Ainult õige vastuse (14) eest ilma selgitusteta anda 1 punkt. Kui lisaks õigele arvule on vastuseks pakutud ka valesid, siis anda 0 punkti.



## Kasutatud hindamisskeemid ja kontrollijate kommentaarid

### 1. (Ülle Hüva)

Lahenduse allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- o Põhjendatud üks võrratustest  $\left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{12}{5}} < 2$  ja  $2 < \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{12}{7}}$ : 4 p

*Sealhulgas:*

- Vabanetud murrulisest astendajast (ja juurest, kui astendamine juurimise kaudu ümber kirjutati): 1 p
- Vabanetud murrust astendatavas: 1 p
- Arvutatud vajalikud täisarvulised astmed: 1 p
- Tehtud õige järeldus algsete arvude suurusvahekorra kohta: 1 p
- o Põhjendatud teine neist võrratustest: 3 p

*Sealhulgas esimese võrratusega analoogse mõttekäigu puhul (nagu ametlikus lahenduses):*

- Vabanetud murrulisest astendajast (ja juurest, kui astendamine juurimise kaudu ümber kirjutati): 1 p
- Vabanetud murrust astendatavas ja jõutud samade täisarvuliste astmeteni nagu enne: 1 p
- Tehtud õige järeldus algsete arvude suurusvahekorra kohta: 1 p

*Sealhulgas vastuväitelise tõestuse puhul (nagu märkuses 1):*

- Oletatud, et  $\left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{12}{5}}$  ja  $\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{12}{7}}$  on arvteljel arvust 2 samal pool, ja kantud astendajad üle arvu 2 astendajateks (ehk saadud võrratused (3) ja (4) või analoogsed võrratused vastupidiste märkidega): 1 p
- Korrutatud nende võrratuste vastavad pooled ja teisendas jõutud vasturääkivuseni: 1 p
- Tehtud õige järeldus algsete arvude suurusvahekorra kohta: 1 p

Ainult täieliku õige vastuse  $\left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{12}{5}} < 2 < \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{12}{7}}$  või arvud samas järjestuses ilma võrratusmärkideta) eest ilma selgitusteta anti 1 punkt. Kui arvud olid järjestatud vastupidiselt, aga võrratusmärgid nende vahel olid õiged (ehk siis  $\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{12}{7}} > 2 > \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{12}{5}}$ ), siis selle eest punkte maha ei võetud, võrratusmärkide puudumisel aga loeti selline vastus valeks.

Ligikaudsete arvudega lahendused said punkte (lisaks õige vastuse punktile) vaid siis, kui vastuse tuletuskäik oli loogiliselt korrektne ja aukudeta, muuhulgas arvestades ümardamistel sellega, kas ligikaudne väärtus on tegelikust suurem või väiksem.

Arvude  $\left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{12}{5}}$  ja  $\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{12}{7}}$  omavahelise suurusvahekorra eraldi väljaselgitamise eest (koos ammandavate põhjendustega) anti 3 punkti, kuid neid punkte ei liidetud muude asjade eest antud punktidega. Näiteks kui olid põhjendatud võrratused  $\left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{12}{5}} < \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{12}{7}}$  ja  $\left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{12}{5}} < 2$ , siis anti kokku 4 punkti, mitte 7 punkti.

## 2. (Urve Kangro)

Erinevate ideedega tööde hindamiseks kasutati kaht erinevat skeemi. Kummagi skeemi kasutamisel selles märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

*Skeem žürii lahendusega 1 sarnaste tööde hindamiseks:*

- Asendatud  $p$  võrrandisse ja lihtsustatud: 1 p
- Asendatud  $q$  võrrandisse ja tegurdatud: 1 p
- Vaadeldud juhtu  $q = 0$  ja saadud lahend  $(0, 0)$ : 1 p
- Juhul  $q \neq 0$  avaldatud üks muutujatest teise kaudu: 1 p
- Lahendatud saadud ruutvõrrand: 2 p
- Leitud vastavad paarid: 1 p

*Skeem žürii lahendusega 2 sarnaste tööde hindamiseks:*

- Asendatud Viete'i valemites  $x_1$  ja  $x_2$  asemele  $p$  ja  $q$ : 1 p
- Lahendatud vastav võrrandisüsteem: 3 p
- Vaadeldud juhtu  $p = q$ : 3 p

Enamuses töödest kasutas Viete'i valemeid, aga üldiselt ei vaadeldud eraldi juhtu  $p = q$ . Kui vastav võrrandisüsteem oli õigesti lahendatud, siis sai selle eest 4 punkti; kui oli jäetud võrrandi  $pq = q$  läbi jagamisel arvesse võtmata võimalus, et  $q = 0$ , siis sai kokku 3 punkti.

Mitmetes töödes oli küll Viete'i valeimid välja kirjutatud ja lahendite asemele  $p$  ja  $q$  pandud, aga võrrandisüsteemi lahendamise asemel oli lihtsalt proovitud sinna erinevaid arve asendada. Sellised tööd said reeglina 1 punkti; kui niimoodi leiti mõlemad lahendid  $(0, 0)$  ja  $(1, -2)$ , siis sai 2 punkti.

Mõnedes töödes oli kasutatud ruutvõrrandi lahendivalemit. Selle kasutamisel võib tekkida probleem, kumb lahenditest peaks olema  $p$  ja kumb  $q$ . Aga see erinevus tegelikult kaob, kui valemit lihtsustada ja ruutu võtta. Tulemuseks on žürii lahenduse 1 valemid (5) ja (6) ning jätkata saab samamoodi nagu lahenduses 1. Üldiselt sellistes lahendustes tehti lihtsustamisel või ruutuvõtmisel vigu ja tegelikult lahenditeni ei jõutud.

Mõnedes töödes oli ka proovitud ruutvõrrandisse asendada erinevaid kor-dajaid ning siis vastavaid võrrandeid lahendada. Kui niimoodi leiti lahend (1, -2), siis sai 1 punkti; kui leiti kõik kolm lahendit, siis 2 punkti. Ainult la-hendi (0, 0) eest punkte ei saanud.

Osades töödes oli lisaks õigetele lahenditele leitud ka mõni selline, mis te-gelikult ülesande tingimusi ei rahuldanud. Mõne vale lahendi eest reeglina kaotati 1 punkt. Samuti arvutusvigade eest, mis oluliselt lahenduskäiku ei muutnud, kaotati 1 punkt.

### 3. (Lukas Müürsepp)

Lahenduse allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- o Lahendatud ülesande osa a) ja antud õige vastus: 5 p  
*Sealhulgas:*
  - Näidatud, et kummagi nupu vajutamisel ei muutu ekraanil oleva arvu jääk jagamisel 3-ga (või et ekraanil olev arv jääb kujule  $3x + 1$ , kus  $x$  on täisarv): 3 p
- o Lahendatud ülesande osa b) ja antud õige vastus: 2 p

### 4. (Artur Bentsa)

Erinevate ideedega lahenduste hindamiseks kasutati kaht erinevat skee-mi. Kummagi skeemi kasutamisel selles märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

*Skeem žürii lahendusega 1 sarnanevate mõttekäikude hindamiseks:*

- o Leitud, et  $a - ab + b = (a - b)^2$ : 2 p
- o Järeldatud, et  $a + b \geq ab$ : 1 p
- o Leitud, et üks muutujatest  $a$  või  $b$  on ülimalt 2: 1 p
- o Asendatud selle muutuja väärtused 1 ja 2 algsesse võrrandisse ja vaadeldud saadud ruutvõrrandeid teise muutuja suhtes: 1 p
- o Ammendavalt analüüsitud kõik juhud: 1 p
- o Antud õige vastus: 1 p

*Skeem žürii lahendusega 3 sarnanevate mõttekäikude hindamiseks:*

- o Vaadeldud algset võrrandit ruutvõrrandina ühe muutuja suhtes: 2 p
- o Mainitud, et diskriminant peab olema mittenegatiivne: 1 p
- o Leitud diskriminandi nullkohad: 1 p
- o Leitud, et üks muutujatest  $a$  ja  $b$  on ülimalt 2: 1 p
- o Ammendavalt analüüsitud kõik juhud: 1 p
- o Antud õige vastus: 1 p

Kui vastuses unustati mõni paar (nt oli kirjas paar (1, 2), kuid puudus paar (2, 1)) või pakuti vastuseks paare, mis antud võrrandit ei rahulda, siis anti skeemi viimase rea järgi 0 punkti. Kui vastuses esinesid ka paarid (0, 0), (0, 1) või (1, 0), siis selle eest ei karistatud. Rõhutame siiski, et 0 ei ole positiivne arv!

Kui lahenduses oli väidetud, et parem pool kasvab vasakust poolest kiiremini, aga see oli tõestamata, siis selle eest anti maksimaalselt 1 punkt, kui ülal toodud skeemide põhjal ei olnud võimalik punkte teenida. Üldiselt on raske öelda, kuidas mingi avaldise väärtus muutub, kui selles on rohkem kui üks muutuja. Lahendusena eeldati matemaatilist tõestust, miks parem pool on vasakust poolest „üldiselt“ suurem.

5. (*Bronislav Shatil*)

*Žürii lahendusega 1* sarnaste tööde allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Koostatud võrrandisüsteem (9): 3 p
- Süsteem õigesti lahendatud: 4 p

*Žürii lahendusega 2* sarnaste tööde allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Tõestatud, et kolmnurgad  $ADB$  ja  $BAC$  on sarnased: 3 p
- Koostatud võrrandisüsteem (10): 2 p
- Lahendus õigesti lõpuni viidud: 2 p

*Žürii lahendusega 3* sarnaste tööde allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Tõestatud, et trapetsi aluste summa on 5 cm: 2 p
- Koostatud võrrand (11): 2 p
- Lahendus lõpuni viidud: 3 p

Kuna oli palju omapäraseid lähenemisi ülesande lahendamiseks, siis erineb saadud punktide summa mõnikord hindamisskeemist. Lisaks anti mõnikord vahepealseid punkte selle eest, kui suur osa mingist lahenduse etapist oli tehtud või kui suur viga oli lastud sisse õige idee realiseerimisel.

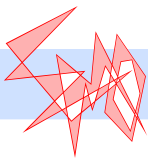
6. (*Toomas Tennisberg*)

Lahenduse allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Märgitud, et minimaalne võimalik summa on  $n + 2$ : 1 p
- Tõestatud, et summa ei saa olla väiksem kui  $n + 2$ : 2 p
- Leitud viis, kuidas arve paigutada, et summa oleks ülimalt  $n + 2$ : 3 p
- Tõestatud, et leitud konstruktsioon töötab: 1 p

Ainult õige vastuse ( $n + 2$ ) eest ilma muu põhjenduseta anti 1 punkt.

Ülesanne osutus üllatavalt raskeks. Suurim eksimus oli eeldamine, et otsitakse vähimat võimalikku summat, mida on võimalik kirjutada üldse mingi hulknurga sisse. Sellise lähenemisega saadi vastuseks 5, sest 5 on vähim arv, mida saab kirjutada kolmnurga sisse, ning teiste hulknurkade puhul on sisse kirjutatav arv suurem. Paraku on aga matemaatikaülesannetes tavaks, et kui öeldakse, et mingi arv  $n$  on „antud“, siis seda arvu ise valida ei saa, vaid on vaja leida vastus, mis kehtiks selle parameetri iga väärtuse korral. Üldjuhul said sellised lahendused punkte vastavalt sellele, kui palju neil leidis õige vastuse saamiseks kasulikke tähelepanekuid.



## Kasutatud hindamiskeemid ja kontrollijate kommentaarid

### 1. (Ehtel Timak)

Erinevate lähenemistega tööde hindamiseks kasutati kaht erinevat skeemi. Kummagi skeemi rakendamisel vastava skeemi ridade eest antud punktid summeeriti.

*Skeem nimetajast irratsionaalsuse eemaldamisega lahendustele (žürii lahendus 1):*

○ Näidatud, et  $\frac{1}{a} = \sqrt{2026} + \sqrt{2025}$ : 5 p

*Sealhulgas:*

• Korrutatud lugeja ja nimetaja avaldisega  $\sqrt{2026} + \sqrt{2025}$ : 2 p

• Rakendatud nimetajas ruutude vahe valemist või korrutatud lahti ja koondatud sarnased liikmed: 2 p

○ Järeldatud, et  $\frac{1}{a} - a = 2\sqrt{2025}$ : 1 p

○ Jõutud lõppvastuseni 90: 1 p

*Skeem ühisele nimetajale viimisega lahendustele (žürii lahendus 2):*

○ Viidud avaldis  $\frac{1}{a} - a$  (või  $a$  väärtuse sisseasendamisel saadud avaldis) ühisele nimetajale: 1 p

○ Teisendatud saadud murru lugejat nii, et sulgudesse tekib tegur  $\sqrt{2026} - \sqrt{2025}$ : 4 p

*Sealhulgas:*

• Avatud saadud murru lugejas sulud (nt kakslükme ruudu valemiga): 2 p

○ Taandatud arvuga  $\sqrt{2026} - \sqrt{2025}$ : 1 p

○ Jõutud lõppvastuseni 90: 1 p

Mõlema skeemi viimase rea järgi antakse punkt põhimõtteliselt võrduse  $2\sqrt{2025} = 90$  eest. See punkt anti sõltumata sellest, millisel lahenduse etapil õpilane seda võrdust rakendas.

Ainult õige vastuse (90) eest ilma selgitusteta anti 1 punkt.

### 2. (Helli Juurma)

Lahenduse allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Arvutatud võrdkülgse kolmnurga mediaani pikkus  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ : 2 p
- Arvutatud tipu  $A$  kaugus mediaanide lõikepunktist  $\frac{\sqrt{3}}{3}$ : 1 p
- Leitud tipust  $A$  tõmmatud mediaani teise otspunkti kaugus mediaanide lõikepunktist  $\frac{\sqrt{3}}{6}$ : 1 p
- Mõistetud, et tippude  $B$  ja  $C$   $x$ -koordinaat ühtib tipust  $A$  tõmmatud mediaani teise otspunkti  $x$ -koordinaadiga: 1 p
- Leitud kõik võimalused tippude paiknemiseks: 2 p

Ainult täieliku õige vastuse (kõik 4 võimalikku punktikolmikut ja ainult need, selgesti seostatult nimedega  $A$ ,  $B$  ja  $C$ ) eest ilma selgitusteta anti 2 punkti. Kui vastuseks anti 1–3 õiget punktikolmikut ja mitte ühtegi valet või kui koordinaadid olid tippude nimedega seostamata, siis anti 1 punkt. Kui vastuseks pakuti valesid punktikolmikuid, siis vastuse eest punkte ei antud. Topeltnärvide  $\pm$  ja  $\mp$  abil lühendatult kirja pandud vastuse (näiteks  $A\left(\pm\frac{\sqrt{3}}{3}; 0\right)$ ,  $B\left(\mp\frac{\sqrt{3}}{6}; \pm\frac{1}{2}\right)$ ,  $C\left(\mp\frac{\sqrt{3}}{6}; \mp\frac{1}{2}\right)$ ) eest anti 2 punkti ainult siis, kui oli üheselt mõista antud, millised märgivalikud on sõltumatud ja millised omavahel seotud (toodud näites tuleb teine ja neljas märk valida vastupidiselt esimesega ja kaks ülejäänud märki omavahel vastupidiselt, muid piiranguid pole); muidu anti taolise vastuse eest 1 punkt.

Hindamiskeemi viimase rea järgi antavat 2 punkti õigete kolmikute väljakirjutamise eest jagati samade põhimõtete alusel. Vajalikke lisaselgitusi (seostamine tippude nimedega, märkide  $\pm$  ja  $\mp$  interpreteerimine) ei pidanud seejuures vastuse juures kordama, kui need tulenesid lahenduskäigust piisavalt selgelt.

### 3. (Aleksei Ganyukov)

Lahenduse allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Näidatud, et  $n = 65$  rahuldab tingimust: 1 p
- Saadud  $99a^2 - 99b^2 = k^2$  või sellega analoogne võrrand: 1 p
- Leitud tegurdus  $3^2 \cdot 11 \cdot (a - b)(a + b)$ : 1 p
- Põhjendatud, et 11 peab jagama korrutist  $(a - b)(a + b)$ : 1 p
- Põhjendatud, et 11 ei jaga vahet  $a - b$ : 1 p
- Põhjendatud, et  $a + b = 11$ : 1 p
- Lahendus lõpule viidud: 1 p

Ülesanne osutus keeruliseks. Mitmed võistlejad väitsid, et lahenditeks on võrdsete numbritega arvud, kuigi ülesande teksti järgi peavad arvu kaks numbrit olema erinevad.

Põhjenduse eest, et  $a > b$ , punkte ei antud. Kui ekslikult vaadeldi vahe absoluutväärtust ja vastuseks anti ka arv 56, siis selle eest punkte maha ei võetud. Üldkujul ruutude vahe valemi esitamise eest punkte ei antud.

Kui arvatati välja kõik võimalikud ruutude vahed arvude  $10a + b$  korral, kus  $a > b$ , ja leiti vastus, anti selle eest 4 punkti. Ülejäänud 3 punkti saadi põhjendamise eest, et ülejäänud vahed pole täisruudud.

#### 4. (Hendrik Vija)

Lahenduse allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Väidetud, et ülesande vastus on  $k > 2$ : 1 p
  - Tõestatud, et  $k \leq 2$  ei rahulda ülesande tingimusi: 4 p
- Sealhulgas:*
- Mainitud, et ruutvõrrandil kahe erineva lahendi leidumiseks peab diskriminant olema positiivne: 1 p
  - Pandud kirja võrratused  $k^2b^2 - 4ac > 0$ ,  $k^2c^2 - 4ab > 0$  ja  $k^2a^2 - 4bc > 0$ : 1 p
  - Järeldatud võrratuste süsteemist, et  $k > 2$ : 2 p
  - Iga  $k > 2$  jaoks leitud sobivad arvud  $a, b, c$ : 2 p

Ülesanne osutus oodatust veidi keerulisemaks, kuid siiski mitte üleliia raskeks. Paljudes töödes käsitleti võrrandeid  $ax^2 + kbx + c = 0$ ,  $bx^2 + kcx + a = 0$  ja  $cx^2 + kax + b = 0$  võrrandisüsteemina. Seda ei saa aga tegelikult teha, sest eri võrranditel võivad ülesande tingimuste järgi olla eri lahendid. Samuti leidis hulganisti töid, kus tõestati edukalt, et  $k > 2$ , kuid ei olnud meeles näidata, et nende  $k$  väärtuste jaoks sobivad arvud  $a, b, c$  ka päriselt leiduvad. Tasub meeles pidada, et kõik ülesanded, mis sisaldavad korraldust „leia kõik“ on tegelikult kaheosalised ülesanded, sest tuleb tõestada nii seda, et leitud vastused sobivad, kui ka seda, et muud vastused ei sobi.

#### 5. (Kirill Tselovalnikov)

Erinevate ideega tööde hindamiseks kasutati nelja erinevat skeemi.

*Skeem lahendusele, kus avaldatakse kolmnurkade DEF ja KLM nurgad kolmnurga ABC nurkade kaudu (žurii lahendus 1):*

- Esitatud idee arvutada kolmnurkade DEF ja KLM nurki kolmnurga ABC nurkade kaudu või seda ideed kasutatud: 1 p
- Avaldatud kolmnurga DEF nurgad kolmnurga ABC nurkade kaudu: 3 p
- Avaldatud kolmnurga KLM nurgad kolmnurga kolmnurga ABC nurkade kaudu: 2 p
- Veendutud, et saadud avaldised kolmnurkade DEF ja KLM vastavate nurkade jaoks on võrdsed: 1 p

Sihileviivaid lahendusi, kus nurkade arvutamiseks fikseeriti mingid teised nurgad, hinnati ülaltoodud skeemiga sarnaselt.

*Skeem lahendusele, mis kasutab žürii lahenduses 2 esinevaid ideid:*

- Vaadeldud kolmnurka  $\Delta$ , mis koosneb punktides  $K$ ,  $L$  ja  $M$  kolmnurga  $ABC$  ümberringjoonele tõmmatud puutujatest: 3 p
- Näidatud, et  $\Delta$  küljed on vastavalt paralleelsed kolmnurga  $ABC$  külgedega: 2 p
- Lahendus lõpuni viidud: 2 p

*Skeem lahendusele, mis sarnaneb žürii lahendusega 3:*

- Esitatud idee näidata, et kolmnurkade  $DEF$  ja  $KLM$  küljed on vastavalt paralleelsed, või seda ideed kasutatud: 1 p
- Näidatud, et  $AK \perp EF$ ,  $BL \perp DF$ ,  $CM \perp DE$ : 2 p
- Näidatud, et  $AK \perp LM$ ,  $BL \perp KM$ ,  $CM \perp KL$ : 3 p
- Lahendus lõpuni viidud: 1 p

*Skeem lahendusele, mis sarnaneb žürii lahendusega 4:*

- Jaotatud kolmnurgad  $KLM$  ja  $DEF$  kolmeks väiksemaks kolmnurgaks nagu žürii lahenduses 4: 1 p
- Näidatud sarnasused  $\triangle IDE \sim \triangle OKL$ ,  $\triangle IEF \sim \triangle OLM$  ja  $\triangle IFD \sim \triangle OMK$ : 5 p
- Lahendus lõpuni viidud: 1 p

Lahendusi, mis tõestasid ülesande väite vaid mingil konkreetsel erijuhul ning mille ideid ei saa kasutada üldjuhu tõestamiseks, punkte ei saanud.

## 6. (Raul Kangro)

Erinevate ideedega lahendusi hinnati kahe erineva skeemi järgi. Kummagi skeemi kasutamisel selles märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

*Skeem lahendustele, milles arvutatakse vajalik tõenäosus otse (žürii lahendused 1 ja 2):*

- Leitud kõikvõimalikud mängijapaarid või nende arv koos selgitusega: 1 p
- Leitud kõikvõimalikud paaride paarid või nende arv koos selgitusega: 3 p
- Leitud, kui palju paaride paare on ilma Jukuta: 2 p
- Arvutatud korrektne vastus: 1 p

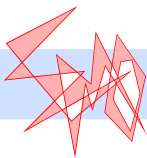
*Skeem lahendustele, milles arvutatakse vajalik tõenäosus kahe tõenäosuse korrutisena (žürii lahendus 4):*

- Leitud kõikvõimalikud paarid või põhjendatud, miks paare on 6: 1 p
- Leitud (koos põhjendusega) tõenäosus, et juhusliku paari valimisel saadakse paar ilma Jukuta: 2 p

- Selgitatud, et vaadatakse kahe paari järjest valikut ja leitud (koos selgitusega) tõenäosus, et teisenä valitud paar on ilma Jukuta, kui esimene oli ilma Jukuta: 2 p
- Leitud õige vastus, korrutades eelnevad tõenäosused: 2 p

Õige vastuse eest ilma põhjendusteta anti 1 punkt.

Küllalt sage eksimus oli see, et vaadati mingit paaride valimise moodust, mis ei taganud seda, et kõik paaride paarid oleks sama tõenäosusega. Samuti esines üsna palju lahendusi, kus tehti mingeid arvutusi ilma selgitamata, mida ja miks liidetakse/korrutatakse.



## Kasutatud hindamiskeemid ja kontrollijate kommentaarid

### 1. (Ave Külter)

Lahenduse allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Aritmeetilise jada summa valemist leitud  $1+2+\dots+20 = \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 21$

ja  $1 + 2 + \dots + 26 = \frac{1}{2} \cdot 26 \cdot 27:$  5 p

*Sealhulgas:*

- Saadud üks neist võrdustest: 3 p
- Teostatud ülejäänud arvutused ja jõutud õige lõppvastuseni: 2 p

Põhimõtteliselt oli võimalik arvutused teostada ka lihtsalt arve järjest liites, aritmeetilise jada summa valemist kasutamata. Kuna selline lähenemine on väga ebanõistlik, siis anti selliselt arvutanutele skeemi esimese rea järgi kummagi summa leidmise eest punkte ainult siis, kui vastav arvutus oli algusest lõpuni sisuliste vigadeta läbi viidud.

Ainult õige vastuse (−1560) eest ilma selgitusteta anti 1 punkt.

### 2. (Andres Talts)

Erinevate lahenduste hindamiseks kasutati kahte erinevat skeemi. Kummagi skeemi rakendamisel vastava skeemi ridade eest antud punktid summeeriti.

*Skeem kahest puutepunktist lähtuvatele lahendustele (žürii lahendus 1):*

- Avaldatud puutujate lõikepunkti koordinaadid puutepunktide koordinaatide kaudu: 3 p
- Leitud sellest võrrandisüsteemist puutujate lõikepunkti  $x$ -koordinaat: 3 p
- Sellele tuginedes põhjendatud, et otsitav vahe on 0: 1 p

*Skeem puutujate lõikepunktist lähtuvatele lahendustele (žürii lahendus 2):*

- Saadud võrrand, mis seob puutujate lõikepunkti koordinaate ühe puutepunkti koordinaatidega (nt lahenduse 2 tähistustes  $\frac{y_L - y}{x_L - x} = 2ax + b$  või midagi ilmselgelt samaväärset): 3 p
- Tuletatud ruutvõrrand puutepunkti  $x$ -koordinaadi suhtes: 2 p
- Ruutvõrrandi lahendamise või kordajate analüüsi teel leitud, et puutujate lõikepunkti  $x$ -koordinaat on puutepunktide  $x$ -koordinaatide aritmeetiline keskmine: 1 p

- Sellele tuginedes antud õige vastus: 1 p

Lahenduste eest, kus üldisust kitsendamata valiti  $b = c = 0$  ja/või  $a = 1$ , anti kuni 5 punkti lahenduskäigu eest sel erijuhul ja 2 punkti põhjenduse eest, miks selle erijuhu vaatlemine üldisust ei kitsenda.

Ainult õige vastuse (0) eest ilma selgitusteta anti 1 punkt.

### 3. (Vahur Paist)

Lahenduse allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Käsitletud korrektselt juht, kus  $p$  on paaritu või muu samaväärne tingimus: 2 p
- Korrektselt vaadeldud juht, kus  $p$  on paaris või muu samaväärne tingimus: 4 p
- Lahendus korrektselt lõpuni viidud: 1 p

Õpilased, kes lahendasid korrektselt juhu, kus  $p$  on paaritu (või midagi samaväärset), ning vaatlesid juhtu, kus  $p$  on paaris, kuid ei suutnud lahendada võrrandit  $2^a + 1 = q^2$ , said enamasti ülimalt 4 punkti.

Ülesanne osutus õpilastele küllaltki raskeks. Paljud õpilased ei arvestanud sellega, et  $p$  võib olla 2 või et  $a$  ja  $b$  võivad olla nullid. Sellised tööd said enamasti vastavalt mitte rohkem kui 2 punkti või 1 punkt.

### 4. (Julia Polikarpus)

Erinevate ideedega lahenduste hindamisel kasutati kaht erinevat skeemi. Kummagi skeemi kasutamisel selles märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

*Skeem lahendustele, kus arvutatakse vähimad võimalikud kuulide arvud igas voorus jõuga välja (žürii lahendus 1):*

- Näidatud tabeli koostamise teel või muul viisil, vähemalt mitu lumekuuli vastavas voorus visati: 5 p
- Näidatud, et 8 tundi võrdub 28800 sekundiga: 1 p
- Eelneva põhjal jõutud õige lõppjäreldeuseni, et päev saab enne läbi, kui lumesõja 13. voor lõpeb: 1 p

*Skeem lahendustele, kus vähimaid võimalikke kuulide arve hinnatakse alt geomeetrilise jada liikmetega (žürii lahendus 2):*

- Näidatud, et 8 tundi võrdub 28800 sekundiga: 1 p
- Näidatud, et vastane viskab järgmisel rünnakul vähemalt 1,5a kuuli, kui mängija ise viskas  $a$  kuuli: 1 p
- Leitud iga vooru kohta (alates teisest), vähemalt mitu kuuli viskas selles voorus Arno ja vähemalt mitu kuuli Teele: 3 p
- Kasutatud geomeetrilise jada summa valemit, et leida, vähemalt mitu kuuli viskasid Arno ja Teele 13 voorus kokku: 1 p

- Eelneva põhjal jõutud õige lõppjäreldeuseni, et päev saab enne läbi, kui lumesõja 13. voor lõpeb: 1 p
- Selles ülesandes mustandeid hindamisel ei arvestatud.

## 5. (*Härmel Nestra*)

Lahenduse allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Tõestatud, et kui teravnurkses kolmnurgas leidub nurk suurusega  $\alpha$ , siis kõrguste aluspunktide ühendamisel saadavas kolmnurgas leidub nurk suurusega  $180^\circ - 2\alpha$ : 3 p  
*Sealhulgas tüüpiliste osaliste mõttekäikude eest:*
  - See väide või mõni ilmselgelt samaväärne või tugevam tõene väide toodud ilma tõestuseta: 1 p
  - Viidatud konkreetselt mõnele lahenduse seisukohast olulisele kõõlnelinurgale (ametliku lahenduse tähistustes *BCEF* või *AEHF*, kus *H* on kõrguste lõikepunkt, või analoogilised), seejuures ära märkides või tõestades, et tegu on kõõlnelinurgaga (ehk et neli tippu asuvad ühel ringjoonel), või tõestatud midagi, millest see vahetult järeldeb: 1 p
- Tõestatud, et kui jadas leiduks kolmnurk, mis pole võrdkülgne, siis peaks jadas leiduma kolmnurk, mis pole teravnurkne: 4 p  
*Sealhulgas:*
  - Esitatud see või mõni küllalt lähedane väide ilma tõestuseta: 1 p

Selle ülesande hindamisel arvestati ka mustandeid.

Skeemi viimase rea all anti väite esitamise eest ilma tõestuseta punkt vaid juhul, kui väide oli üldjuhul õige või enam-vähem õige. Näiteks anti punkt, kui oli väidetud ebatäpselt, et mingil sammul tekib nürinurkne kolmnurk – tegelikult tekib kas täisnurkne või nürinurkne kolmnurk. Samuti anti punkt, kui vajalik väide oli esitatud kontekstis, milles vaadeldi mõnd mittevõrdkülgsete kolmnurkade alamklassi (näiteks võrdhaarsed kolmnurgad). Punkti ei antud väite eest, et juba teine või kolmas kolmnurk ei ole teravnurkne, sest see väide ei pea üldjuhul paika. Samuti ei antud vastava väite eest punkti, kui polnud selge, kas lahendaja mõtleb teist kolmnurka või suvalist järgnevat kolmnurka.

Ülesanne osutus eeldatust märksa raskemaks – vaid 5 õpilast esitas oluliste puudusteta lahenduse. Oli näha, et see ülesanne pakkus noortele lahendajatele mitmeid selliseid komistuskive, mille määravakssaamisele žürii polnud võistluskomplekti koostades tulnud. Nagu võis arvata, ei osanud paljud lahendajad avaldada kõrguste aluspunktide ühendamisel saadava kolmnurga sisenurki algse kolmnurga nurkade kaudu, sest ei märgatud selleks vajalike ringjooni. Kuid ka juhul, kui neid ringjooni tähele pandi, ei jõutud sageli täislahenduseeni. Seejuures ei jõutud mõnikord isegi nurkade avaldamiseni ja kui jõuti, siis ei osatud edasi minna. Ametliku lahenduse peale vaadates

jääb mulje, et see on parajalt lühike ja lihtne, aga tegelikult pakkus see isegi tugevaimatele õpilastele väljakutset.

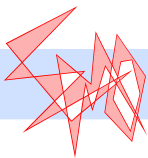
Töodes esines mitmeid tüüpvigu. Väga levinud oli nõutud väite tõestamine eeldusel, et esimene kolmnurk on võrdkülgne. Kuna väite tõestamine muutub sellisele lisaeldusele tuginedes triviaalseks ja see ei ole ka oluline osa päris ülesandest, siis anti selliste tõestuste eest 0 punkti. Osades töodes eeldati tõestuseta, et jada kõik kolmnurgad on sarnased, kusjuures mõnikord õigustati seda eeldust väitega, et jada liikmed peavad olema kindlas seoses. Tegelikult ei nõua jada mõiste mingeid eriseoseid liikmete vahel, mistõttu ülesande lahendamisel tohib tõestuseta kasutada vaid seda, mis on ülesandes jada kohta öeldud. Neil õpilastel, kes said 2–5 punkti, oli tüüpveaks põhjenduste puudulikkus.

## 6. (Birgit Veldi)

Lahenduse järgnevalt märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Põhjendatud, kuidas Juku saab võita, kui  $n \leq 1014$ : 2 p
- Väidetud, et vähim  $n$ , millega Miku võita saab, on 1015: 1 p
- Jaotatud jäägid 1012 paari, mille summa on 2026, ning kahte üheelemendilisse hulka: 2 p  
*Sealhulgas:*
  - Kirjutatud välja liiga vähe või liiga palju paare või unustatud ühelemendilised hulgad: 1 p
- Põhjendatud, miks Miku saab alati võita, kui vihikus on suvalised 1015 arvu: 2 p  
*Sealhulgas:*
  - Põhjendatud, miks arvudele  $0, 1, \dots, 1013$  enam midagi lisada ei saa, ning üritatud seda üldistada juhule, kus vihikus on suvalised 1014 arvu: 1 p

Ülesanne osutus raskemapoolseks. Mitmed õpilased arvasid, et Juku peab kirjutama järjestikuseid arve alates arvust 1 ning siis leidsid, et  $1012 + 1014$  on esimene Mikule meelepärane summa. Levinud viga oli ka vähima võimaliku vihikus oleva arvu otsimine. Nende lähenemiste eest punkte ei saanud. Samuti ei saanud punkte lahendused (lisaks skeemis olevatele), kus oli arvestatud vaid ühe ülesande tingimusega või lihtsalt kirjutatud, et (umbes) pooled arvudest  $1, \dots, 2026$  saavad tahvlil olla. See on küll hea idee, millega ülesannet lahendada hakata, kuid punktide saamiseks peab ka siis välja mõtlema, miks see nii on.



# Eesti 73. matemaatikaolümpiaad

28. jaanuar 2026

Piirkonnavor

**Kokkuvõte**

## **Kokkuvõte**

Üleriigilisele žüriile laekus hindamise ühtlustamiseks kokku 7. klassi töid 87, 8. klassi töid 74 ja 9. klassi töid 70. Üleriigilise žürii poolsed põhikooli tööde kontrollijad olid järgmised.

- 7. klass: Mart Abel  
Phil Labuschagne
- 8. klass: Martin Rahe  
Kadi Siigur
- 9. klass: Oleg Košik  
Andres Alumets

Sel aastal vaatas üleriigiline žürii iga klassi igas töös läbi kõik ülesanded.

Järgnevad tööde hindajate kommentaarid on kirjutatud üleriigilise žürii käes olnud tööde põhjal. Iga klassi II osa iga ülesande kohta on eraldi kommentaarid järgnevatel lehekülgedel.

### **7. klass**

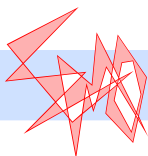
Peaaegu kõik punktimuutused testis (I osas) olid seotud ühikutega. Parandajad piirkondades polnud hindamisjuhiseid neis küsimustes ühetaoliselt tõlgendanud. Näiteks küsimuses 5 kaotasid paljud õpilased ülehindamise tulemusel punkti, sest olid  $x$  väärtuseks pannud  $9 \text{ cm}^2$ , mitte 9.

### **8. klass**

Test oli üldiselt jõukohase raskusastmega. Kõige keerulisemateks osutusid 5. ja 6. ülesanne.

### **9. klass**

Testi kohta ei ole midagi erilist välja tuua.



## Kontrollijate kommentaarid

1. Esimene ülesanne oli üldiselt hästi lahendatud. Mõned piirkondlikud parandajad olid olnud liiga ranged, võttes punkte maha ka siis, kui lahendaja väärís täispunkte. Ühel juhul aga oli piirkonnas antud täispunktid libalahenduse eest.
2. Enamik õpilasi oli kas proovimise teel või põhjendustega leidnud kohe kõik ringides olevad arvud (vt ametlik lahendus 2). Erinevad piirkonnad olid nende lahenduste eest andnud 2–7 punkti. Seetõttu tuli žüriil siin hindeid tõsiselt muuta, et erinevate piirkondade hinded sarnaste lahenduste eest oleksid sarnased. Kasutasime selleks järgmist hindamisskeemi, milles toodud osade eest antud punktid summeeriti.
  - o Tähistatud ringides olevad arvud tähtedega ja kirja pandud seosed  $13 = a + b$ ,  $14 = a + g$ ,  $9 = f + g$ ,  $8 = e + f$ ,  $12 = d + e$ ,  $10 = c + d$ ,  $7 = b + c$ : 2 p
  - o Leitud neist võrranditest suuruste  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$ ,  $e$ ,  $f$  ja  $g$  täpsed väärtused: 3 p
  - o Leitud ringides olevate arvude summa: 1 p
  - o Leitud ainus korduv arv: 1 p

Seejuures rakendusid järgmised lisatingimused.

- Kui võrrandid olid kirjas, kuid muutujate korrektsed väärtused olid seejärel leitud proovimise teel, andsime skeemi teise rea järgi vaid 1 punkti.
- Kui suuruste  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$ ,  $e$ ,  $f$  ja  $g$  korrektsed väärtused olid leitud lihtsalt proovimise teel, siis andsime skeemi kahe esimese rea järgi kokku vaid 1 punkti.
- Kui suuruste  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$ ,  $e$ ,  $f$  ja  $g$  korrektsete väärtuste leidmisel on eelnevalt tehtud mingi arutelu stiilis „kui  $a = 8$ , siis tuleks  $b = 5$ ,  $c = 2$ ,  $d = 8$ ,  $e = 4$ ,  $f = 4$ ,  $g = 5$ , kuid  $a + f = 13 = 14 - 1$ , aga kui  $a = 9$ , siis tuleks  $b = 4$ ,  $c = 3$ ,  $d = 7$ ,  $e = 5$ ,  $f = 3$ ,  $g = 6$ , kuid  $a + f = 15 = 14 + 1$ ; seega peaks  $a$  valima 8 ja 9 vahelt“ ning seejärel oli hakatud proovima  $a = 8,5$  ja nähtud, et see sobib, siis andsime skeemi kahe esimese rea järgi kokku 2 punkti. (Kirjeldatud näitearutelu ei pidanud olema tehtud just  $a$  väärtusest lähtuvalt, võis alustada ükskõik millisest muutujast ja jõuda analoogiliste tulemusteni.)

Kui osas a) oli vaid mainitud, et kõigis ringides olevate arvude summa on 2 korda väiksem kui kõigi lõikude juurde märgitud arvude summa, kuid seda ei põhjendatud, siis andsime selle väite eest 1 punkti.

Ühes töös oli õpilane tingimust a) tõlgendanud selliselt, et tuleks leida esmalt kõik sellised arvud, mida võiks kirjutada mistahes ringi, ja siis omakorda nende summad. Et ühtegi arvu ei saa igasse ringi kirjutada, siis on selliste arvude summa 0.

3. Kuna töid, kus oli ilma põhjendusteta või vigaste põhjendustega toodud välja osa õigeid arve, hinnati erinevates piirkondades erinevalt, siis sai siin kehtestatud kriteeriumid tüüpiliste selliste tööde hindamiseks järgmiselt.
- Toodud nimekiri vähemalt 32 õigest arvust ilma valede arvude-  
ta: 1 p
  - Toodud nimekiri vähemalt 44 õigest arvust ilma valede arvude-  
ta: 2 p
  - Toodud nimekiri arvudest, kus oli vähemalt 44 õiget ja vähemalt  
1 vale: 1 p

Kui tööst oli aru saada, et õpilane otsib arve proovimise teel kas lähtudes kahest viimasest numbrist, muudetavate numbrite asukohast, suurendata-  
vast numbrist või vähendatavast numbrist, andsime lihtsalt idee eest (mida  
ei olnud täielikult läbi tehtud) 1 punkti.

Enamus õpilasi oli läinud sobivate arvude väljakirjutamise teed, kasutades nende tekitamiseks vahel ka ametlikes lahendustes toodud ideid. Ühes töös oli õpilane tõlgendanud tingimusi selliselt, et muuta tohtis numbreid vaid 1 võrra.

4. See ülesanne osutus väga raskeks, ükski võistleja ei lahendanud seda täieli-  
kult. Isegi alustamine osutus raskeks. Nii mõnedki lahendajad olid 272 ase-  
mel võtnud ümbermõõduks 270 sentimeetrit. Ainus õpilane, kellele oli piir-  
konnas antud 7 punkti, oli riskülikute õiged mõõdud tegelikult lihtsalt ära  
arvanud.



## Kontrollijate kommentaarid

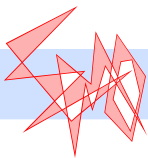
1. Üldiselt oli ülesanne jõukohane. Peamiselt lahendati ülesannet žürii lahenduste sarnaselt, kuid leidus ka lahendusi, kus suurim võimalik pähklite arv väikeses pakis leiti 450 ja  $\frac{1080}{3}$  suurima ühisteguri võtmisega. Ülesannet prooviti lahendada ka katse-eksituse meetodiga. Nii võis leida ka õige vastuse, kuid vastus jäi põhjendamata. Mõningaid probleeme esines ka võrrandi koostamisega.

Oli mitmeid töid, kus esmalt leiti keskmine pähkl hind ja kasutati seda võrrandi koostamiseks. Need tööd kaotasid 1 punkti skeemi esimesest punktist, kuna võrrandi koostamisel oli tehtud lisaeeldusi. Lisaks kaotati 1 punkt skeemi teisest punktist, kuna polnud näidatud, et väikse paki hind saab olla ainult 450 senti.

Mõnes töös mõisteti ülesande teksti valesti, ja lahendati ülesannet, kus väikse paki pähkli keskmine hind on suure paki pähkli keskmisest hinnast 20% võrra kõrgem. Need tööd said nende andmete järgi korrektse võrrandi koostamise eest 1 punkti, vastava väikse paki hinna (420 senti) leidmise eest 2 punkti ja õige pähklite maksimaalarvu (70) põhjendamise eest 3 punkti. Samuti oli osades töödes põhjendus, miks väikse paki keskmine hind on 5 senti, vigane või puudulik. Need tööd kaotasid 1 punkti.

2. Ülesanne osutus keeruliseks. Probleeme tekkis tekstist aru saamisel ja lisaks leidus küllaltki palju arvutusvigu. Üldiselt saadi hästi hakkama võrrandi vasaku poole ümberkirjutamise ja lihtsustamisega, kuid sealt edasi muutus ülesanne raskeks. Küllaltki palju prooviti ülesannet lahendada katse-eksituse meetodil, samuti unustati ära, et  $x$  ja  $y$  võivad ka negatiivsed olla. Mitmetes töödes leiti õiged vastused, kuid puudus põhjendus, miks rohkem võimalusi pole.
3. Ülesanne oli ootuspäraselt hästi lahendatud. Levinuimateks vigadeks olid mõistete „tegur“ ja „kordne“ ära vahetamine ning eeldamine, et  $k$  on mingi konkreetne väärtus, mis fikseeritakse enne mängu. Võistlejad, kes ülesannest õigesti aru said, üldjuhul ka leidsid Atsile võitva strateegia. Leidus ka palju töid, kus arvati, et arvul 1 ei ole kordseid ja seda kivi võib alati võtta. Kui see viga lahendust sisuliselt ei mõjutanud, siis selle eest punkte maha ei võetud.

4. Ülesanne osutus oodatust raskemaks. Üksikute pikkuste vahel seoste loomise ning täisnurkse võrdhaarse kolmnurga kaatetite abil a) osa lahendamisega sai hakkama veel arvestatav hulk võistlejaid. Kõigi pikkuste sidumine kahe muutuja kaudu käis aga peaaegu kõigil osalejatel üle jõu. Seetõttu lahendasid vaid üksikud võistlejad ka ülesande b) osa õigesti. Leidus ka võistlejaid, kes toetusid lahenduses oma jooniselt saadud konkreetsetele mõõtmetele. Kuna sellistes töödes ei olnud reeglina kasulikke üldistusi, siis need üldjuhul punkte ei saanud.



## Kontrollijate kommentaarid

1. Ülesanne oli mõeldud kõige lihtsamaks ja oli lahendatud küllalt hästi. Kõige suuremaks komistuskiviks osutus 25. neljakohalise kolmega mitte jaguva arvu leidmine, mis valmistas päris paljudele raskusi. Seejuures nii piirkondlikul hindamisel kui üleriigilisel ühtlustamisel anti hindamisjuhiste viimase rea eest punkt juba juhul, kui oli leitud, et arvude 1000, ..., 1034 seast kirjutab Mari 24 arvu.

Päris paljud õpilased kirjutasid ilma selgitusteta, et 25. neljakohaline arv on 1036. Seekord selle eest punkte maha ei võetud, kuid täiesti korrektne see ei ole, ja mõni rangem hindaja võinuks selgituse puudumise eest ka karistada. Samuti võis siin aidata selgitus juhul, kui oli saadud vale vastus, sest kui viga oli väike ja kergesti parandatav, võis saada ka 6 punkti. Kui aga lihtsalt väideti, et 25. kirjutatud arv on mingi muu kui 1036, ei antud selgituse puudumise korral üle 5 punkti.

2. Ülesannet hinnati üsnagi leebelt, mitmete väiksemate vigade tõttu punkte maha ei võetud. Peamine viga oli ühe muutuja väärtuse 3 fikseerimine ja siis mingi teise muutuja väärtuste järjest läbi proovimine. Selle lähenemisega on probleemiks see, et on raske põhjendada, miks mingisugusest väärtusest edasi proovima ei pea. Üldiselt kaotasid sellised lahendused kas enamuse või kõik esimese kahe hindamisskeemi osa punktidest.

Samuti oli mitmetes töodes loetud erinevad kolmikud samadeks. Näiteks kolmikud  $a = 3, b = -8, c = -5$  ja  $a = -8, b = 3, c = -5$  on siiski erinevad, sest  $a$  väärtus pole neis kolmikutes sama, samuti  $b$  väärtus. Sellise veaga tööd kaotasid viimase hindamisskeemi osa eest punkti.

3. Ringjoonte nurkade arvutusi sisaldavad ülesanded on õpilastele üldjuhul küllalt rasked ning oli tunda, et Thalese teoreemi rakendamise ja piirde-nurkadega ei tunne paljud osalejad ennast koduselt.

Tüüpiliseks veaks oli eeldus, et kolmnurk  $ABC$  on võrdhaarne või et sirged  $MN$  ja  $BC$  on paralleelsed. Tegelikult selline eeldus ei pea siiski üldjuhul paika ning tegemist on erijuhuga. Paljud siiski jõudsid selle erijuhu käsitlemisel õige vastuseni, mille eest sai 1 punkti. Kui oli lahenduskäigus tehtud kasulikke samme ka üldise juhu lahendamise jaoks, võis saada ka rohkem punkte.

Piirkondades anti üldjuhul punkt Thalese teoreemi rakendamise eest juba siis, kui õpilane oli vastavald täisnurgad näiteks joonisele märgitud. Hindamise ühtlustamisel lähtuti samast põhimõttest.

Esitatud lahenduste korral oli lisaks žürii lahendustele ka mitmeid muid lähenemisi. Tüüpilisi neid järgivaid lahendusi hinnati ühega järgmisest kahest lisskeemist. Olgu  $\angle BAC = \alpha$  ja  $H$  kõrguste  $BM$  ja  $CN$  lõikepunkt.

*Lisakeem 1.*

- Leitud, et  $\angle BHN = \alpha$  (või  $\angle CHM = \alpha$ ): 2 p
- Sealhulgas:*
- Märgitud joonisel  $\angle BHN = \alpha$  (või  $\angle CHM = \alpha$ ) ilma põhjenduseeta tekstis: 1 p
- Täheldatud, et  $MBN$  on täisnurk (või vastavalt  $MCN$  täisnurk): 1 p
- Saadud võrdus  $\angle BAC = \angle BNC$  (või vastavalt  $\angle BAC = \angle BMC$ ): 1 p
- Lahendus viidud lõpule, uurides kolmnurka  $HBN$  (või vastavalt  $HCM$ ): 3 p

*Lisakeem 2.*

- Leitud, et  $\angle HBC + \angle HCB = \alpha$ : 2 p
- Täheldatud, et  $MBN$  või  $MCN$  on täisnurk: 1 p
- Saadud võrdus  $\angle BAC = \angle BNC$  (või vastavalt  $\angle BAC = \angle BMC$ ): 1 p
- Lahendus viidud lõpule, uurides näiteks kolmnurka  $BCN$  (või vastavalt  $BCM$ ): 3 p

Nende täiendavate lahendusvõimaluste valguses anti hindamise ühtlustamise käigus mõnele tööle punkte juurde.

4. Üldiselt oli ülesanne üsnagi hästi lahendatud. Paljud lahendused jõudsid õi-  
gete teekondadeni  $1 \rightarrow B, 2 \rightarrow A, 3 \rightarrow C$ . Üks peamisi veakohti selles üles-  
andes oli 10 ja 12 käigu juhtude liiga kergekäeline kõrvalejätmine. Põhjen-  
dusi, et 3. nupul pole piisavalt ruumi, ei loetud piisavateks. Selleks et põh-  
jenduste eest punkte saada, pidi kasutama ka arvilisi väärtusi, ehk et nupp 3  
saab 10 käigu puhul teha 6 käiku ja 12 käigu puhul 10.

Samuti jäi tihti ütlemata, et nupp 1 peab minema nuppude 2 ja 3 algus-  
punktide vahelt läbi. See võib tunduda küll lõppkohti vaadates ilmne, kuid  
seda peab siiski põhjendama.