

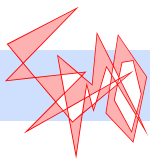
Lahtine võistlus 2026 sügis

Ülesanded	2	Ülesanded inglise keeles	6
Noorem rühm	2	Juniors	6
Vanem rühm	3	Seniors	7
Ülesanded vene keeles	4	Lahendused	8
Младшая группа	4	Noorem rühm	8
Старшая группа	5	Vanem rühm	14

Võistluskomplekti valmimisse panustasid:

Andres Alumets
Artur Avameri
Artur Bentsa
Aleksei Ganyukov
Jaan Kristjan Kaasik
Oleg Košik
Phil Labuschagne
Lukas Müürsepp

Härmel Nestra
Julia Polikarpus
Bronislav Shatil
Toomas Tennisberg
Kirill Tselovalnikov
Birgit Veldi
Hendrik Vija



Matemaatika lahtine võistlus

26. september 2026

Noorem rühm

Lahendamisaega on 5 tundi.

Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti.

Elektroonilised ega kirjalikud abivahendid ei ole lubatud.

1. Leia kõik kahekohalised naturaalarvud, millele liites numbrite järjekorra ümberpööramisel saadava arvu, on tulemuseks mingi täisarvu ruut.
2. Juku asub ruudustiku vasakpoolisel alumisel nurgaruudul. Kas Jukul on võimalik liikuda parempoolsele ülemisele nurgaruudule niimoodi, et ta läbib ruudustiku igat ruutu täpselt ühe korra, kui
 - a) ruudustiku mõõtmed on 2026×2026 ;
 - b) ruudustiku mõõtmed on 2027×2027 ?

Ühe sammuga tohib liikuda ainult naaberruudule üle ühise külje ja vahepeal ruudustikult lahkumine pole lubatud.

3. Meil kasutusel olevas kalendris on päevade arv määratud järgmiselt.

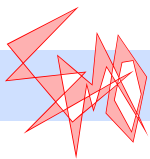
- 1) Kui aastaarv ei jagu 4-ga, siis on aastas 365 päeva.
- 2) Kui aastaarv jagub 4-ga, kuid mitte 100-ga, siis on aastas 366 päeva.
- 3) Kui aastaarv jagub 100-ga, kuid mitte 400-ga, siis on aastas 365 päeva.
- 4) Kui aastaarv jagub 400-ga, siis on aastas 366 päeva.

Leia vähim positiivne täisarv n , mille puhul on kindel, et kui võtta mistahes aasta mistahes kuupäev, siis täpselt sama kuupäev n aastat hiljem on olemas ja langeb samale nädalapäevale.

4. Leia kõik sellised positiivsete täisarvude paarid (x, y) , et $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{67}$.
5. Punktid D ja E valitakse kolmnurga ABC küljel BC nii, et punkt D asub punktide B ja E vahel. Sirge, mis on risti küljega AB ja läbib punkti D , lõikab kolmnurga ABD ümberringjoont punktis K , $K \neq D$. Sirge, mis on risti küljega AC ja läbib punkti E , lõikab kolmnurga ACE ümberringjoont punktis L , $L \neq E$. On teada, et punktid K , A ja L asuvad ühel sirgel.
 - a) Leia nurga BAC suurus.
 - b) Tõesta, et punktid K , D , E ja L asuvad ühel ringjoonel.

6. Ringjoonele tuleb paigutada vabalt valitud järjestuses 75 last. Neist 25 valivad kivi, 25 paberi ja 25 käärid. Pärast ringjoonele paigutamist näitavad kõik lapsed korraga oma valikut. Laps loetakse võitjaks, kui ta võidaks mängus „Kivi-käärid-paber“ mõlemat oma naabrit ringjoonel. Leia suurim võimalik võitjate arv.

Märkus. Kivi võidab käärid, käärid võidavad paberi ja paber võidab kivi. Rohkem võiduolukordi pole.



Matemaatika lahtine võistlus

26. september 2026

Vanem rühm

Lahendamisaega on 5 tundi.

Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti.

Elektroonilised ega kirjalikud abivahendid ei ole lubatud.

1. Leia kõik täisarvude paarid (a, b) , mille korral leidub selline algarv p , et on rahuldatud võrrandisüsteem

$$\begin{cases} a + b = p, \\ a^2 + b^2 = (p - 8)(p + 4). \end{cases}$$

2. Annal on a , Bertal b ja Carolil c eurot, kusjuures $50 \geq a > b > c$ ja $a + b + c \geq 100$. Üheaegselt annab Anna $a\%$ enda rahast Bertale ja $a\%$ Carolile, Berta $b\%$ enda rahast Annale ja $b\%$ Carolile ning Carol $c\%$ enda rahast Annale ja $c\%$ Bertale. Kellel on nüüd kõige rohkem ja kellel kõige vähem raha?

3. Leia kõik positiivsete täisarvude (lõpmatud) jadad $a_1, a_2, a_3, \dots$, mis rahuldavad tingimust

$$nm \mid a_n - a_m$$

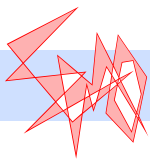
kõigi positiivsete täisarvude n ja m korral.

Märkus. Kirjutis $x \mid y$ tähistab väidet, et arv x on arvu y tegur.

4. Tõesta, et

$$\frac{1}{1(\sqrt{1} + \sqrt{3})} + \frac{1}{2(\sqrt{3} + \sqrt{5})} + \frac{1}{3(\sqrt{5} + \sqrt{7})} + \dots + \frac{1}{2026(\sqrt{4051} + \sqrt{4053})} < 1.$$

5. Teravnurkses kolmnurgas ABC on külg AB lühem küljest AC . Kolmnurga ABC kõrguste lõikepunkt on H ja tipu A juures oleva sisenurga poolitaja lõikab kolmnurga ABC ümberringjoont punktis K ($K \neq A$). Sirgel BK võetakse punkt X nii, et lõigud BC ja CX on võrdse pikkusega, sirgel CK aga võetakse punkt Y nii, et lõigud CB ja BY on võrdse pikkusega, kusjuures $X \neq B$, $Y \neq C$. Kolmnurkade CKX ja BKY ümberringjooned lõikuvad punktis P ($P \neq K$). Tõesta, et sirged AK ja HP on paralleelsed.
6. Tasandile paigutatakse 2026 ühesuurst ruudukujulist plaati ilma ülekatteta. Leia suurim võimalik terve ühise küljega plaadipaaride arv.



Открытое соревнование по математике

26 сентября 2026 г.

Младшая группа

Время, отводимое для решения: 5 часов.

Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи даёт 7 баллов.

Вспомогательные письменные материалы или электронные приборы не разрешены.

1. Найти все двузначные натуральные числа, при сложении которых с числом, полученным при изменении порядка цифр на противоположный, в результате получается квадрат некоторого целого числа.
2. Юра находится в левой нижней угловой клетке сетки. Может ли он пройти в правую верхнюю угловую клетку так, чтобы побывать в каждой клетке сетки ровно один раз, если
 - а) размеры сетки — 2026×2026 ;
 - б) размеры сетки — 2027×2027 ?

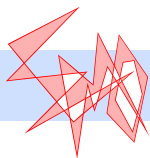
За один шаг разрешается переходить только в соседнюю по стороне клетку, причём выходить за пределы сетки нельзя.

3. В используемом нами календаре число дней в году определяется следующим образом.
 - 1) Если номер года не делится на 4, то в году 365 дней.
 - 2) Если номер года делится на 4, а не на 100, то в году 366 дней.
 - 3) Если номер года делится на 100, а не на 400, то в году 365 дней.
 - 4) Если номер года делится на 400, то в году 366 дней.

Найти наименьшее положительное целое число n такое, что если взять любую дату любого года, то ровно через n лет существует дата с теми же числом и месяцем и она приходится на тот же день недели.

4. Найти все такие пары положительных целых чисел (x, y) , что $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{67}$.
5. Точки D и E выбираются на стороне BC треугольника ABC так, что точка D находится между точками B и E . Прямая, перпендикулярная стороне AB и проходящая через точку D , пересекает описанную окружность треугольника ABD в точке K , $K \neq D$. Прямая, перпендикулярная стороне AC и проходящая через точку E , пересекает описанную окружность треугольника ACE в точке L , $L \neq E$. Известно, что точки K , A и L лежат на одной прямой.
 - а) Найти величину угла BAC .
 - б) Доказать, что точки K , D , E и L лежат на одной окружности.
6. По окружности в произвольном порядке расставляют 75 детей. Из них 25 выбирают камень, 25 — бумагу и 25 — ножницы. После расстановки все дети одновременно показывают свой выбор. Ребёнок считается победителем, если в игре «Камень, ножницы, бумага» он победил бы обоих соседей по окружности. Найти наибольшее возможное число победителей.

Примечание. Камень побеждает ножницы, ножницы побеждают бумагу, а бумага побеждает камень. Других выигрышных ситуаций нет.



Открытое соревнование по математике

26 сентября 2026 г.

Старшая группа

Время, отводимое для решения: 5 часов.

Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи даёт 7 баллов.

Вспомогательные письменные материалы или электронные приборы не разрешены.

1. Найти все пары целых чисел (a, b) , для которых существует такое простое число p , что выполняется система уравнений

$$\begin{cases} a + b = p, \\ a^2 + b^2 = (p - 8)(p + 4). \end{cases}$$

2. У Ани a , у Вари b , а у Саши c евро, причём $50 \geq a > b > c$ и $a + b + c \geq 100$. Одновременно Аня отдаёт $a\%$ своих денег Вале и $a\%$ Саше, Варя отдаёт $b\%$ своих денег Ане и $b\%$ Саше, а Саша отдаёт $c\%$ своих денег Ане и $c\%$ Вале. У кого теперь больше всего и у кого меньше всего денег?
3. Найти все (бесконечные) последовательности $a_1, a_2, a_3, \dots$ положительных целых чисел, удовлетворяющие условию

$$nm \mid a_n - a_m$$

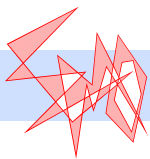
для всех положительных целых чисел n и m .

Примечание. Запись $x \mid y$ означает, что число x является делителем числа y .

4. Доказать, что

$$\frac{1}{1(\sqrt{1} + \sqrt{3})} + \frac{1}{2(\sqrt{3} + \sqrt{5})} + \frac{1}{3(\sqrt{5} + \sqrt{7})} + \dots + \frac{1}{2026(\sqrt{4051} + \sqrt{4053})} < 1.$$

5. В остроугольном треугольнике ABC сторона AB короче стороны AC . Высоты треугольника ABC пересекаются в точке H , а биссектриса внутреннего угла при вершине A пересекает описанную окружность треугольника ABC в точке K ($K \neq A$). На прямой BK выбирается точка X так, что отрезки BC и CX равной длины, а на прямой CK выбирается точка Y так, что отрезки CB и BY равной длины, причём $X \neq B$, $Y \neq C$. Описанные окружности треугольников CKX и BKY пересекаются повторно в точке P ($P \neq K$). Доказать, что прямые AK и HP параллельны.
6. На плоскости размещают 2026 одинаковых квадратных плиток без наложений. Найти наибольшее возможное число пар плиток, имеющих общую сторону.



Open Contest in Mathematics

September 26, 2026

Juniors

Working time: 5 hours.

A correct and sufficiently explained solution to each problem is worth 7 points.

Written materials or electronic devices are not permitted.

1. Find all two-digit natural numbers such that adding the number obtained by reversing its digits results in the square of an integer.
2. Johnny starts at the bottom-left corner square of a grid of unit squares. Is it possible for Johnny to move to the top-right corner square while visiting every square of the grid exactly once, if
 - a) the grid dimensions are 2026×2026 ;
 - b) the grid dimensions are 2027×2027 ?

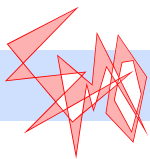
A single move consists of moving to an adjacent square sharing a common side, and leaving the grid during the process is not allowed.

3. In the calendar we use, the number of days in a year is determined as follows:
 - 1) If the year is not divisible by 4, the year has 365 days.
 - 2) If the year is divisible by 4 but not by 100, the year has 366 days.
 - 3) If the year is divisible by 100 but not by 400, the year has 365 days.
 - 4) If the year is divisible by 400, the year has 366 days.

Find the smallest positive integer n such that, for any date in any year, the exact same date n years later exists and falls on the same day of the week.

4. Find all pairs of positive integers (x, y) such that $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{67}$.
5. Points D and E are chosen on the side BC of triangle ABC such that point D lies between the points B and E . The line perpendicular to the side AB passing through point D intersects the circumcircle of triangle ABD at point K ($K \neq D$). The line perpendicular to the side AC passing through point E intersects the circumcircle of triangle ACE at point L ($L \neq E$). It is given that points K , A , and L are collinear.
 - a) Find the size of angle BAC .
 - b) Prove that points K , D , E , and L lie on a circle.
6. 75 children are to be arranged in a circle in an arbitrary order. Of these, 25 choose rock, 25 choose paper, and 25 choose scissors. After being arranged in the circle, all the children simultaneously reveal their choices. A child is considered a winner if they would beat both of their neighbors in the game of "Rock-Paper-Scissors." Find the maximum possible number of winners.

Note. Rock beats scissors, scissors beats paper, and paper beats rock. There are no other winning situations.



Open Contest in Mathematics

September 26, 2026

Seniors

Working time: 5 hours.

A correct and sufficiently explained solution to each problem is worth 7 points.

Written materials or electronic devices are not permitted.

1. Find all pairs of integers (a, b) for which there exists a prime number p such that the system of equations is satisfied.

$$\begin{cases} a + b = p \\ a^2 + b^2 = (p-8)(p+4) \end{cases}$$

2. Anna has a euros, Berta has b euros, and Carol has c euros, with a, b, c such that $50 \geq a > b > c$ and $a + b + c \geq 100$. Simultaneously, Anna gives $a\%$ of her money to Berta and $a\%$ to Carol, Berta gives $b\%$ of her money to Anna and $b\%$ to Carol, and Carol gives $c\%$ of her money to Anna and $c\%$ to Berta. Who has the most money now, and who has the least?
3. Find all (infinite) sequences of positive integers $a_1, a_2, a_3, \dots$ that satisfy the condition

$$nm \mid a_n - a_m$$

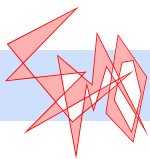
for all positive integers n and m .

Note. The notation $x \mid y$ denotes the statement that the number x is a divisor of the number y .

4. Prove that

$$\frac{1}{1(\sqrt{1} + \sqrt{3})} + \frac{1}{2(\sqrt{3} + \sqrt{5})} + \frac{1}{3(\sqrt{5} + \sqrt{7})} + \dots + \frac{1}{2026(\sqrt{4051} + \sqrt{4053})} < 1.$$

5. In an acute-angled triangle ABC , side AB is shorter than side AC . Let H be the orthocenter of triangle ABC , and let the angle bisector of the interior angle at vertex A intersect the circumcircle of triangle ABC at point K ($K \neq A$). A point X is chosen on the line BK such that the segments BC and CX are equal in length, and a point Y is chosen on the line CK such that the segments CB and BY are equal in length, with $X \neq B$ and $Y \neq C$. The circumcircles of triangles CKX and BKY intersect at point P ($P \neq K$). Prove that the lines AK and HP are parallel.
6. 2026 identical square tiles are placed on a plane without overlapping. Find the maximum possible number of pairs of tiles sharing a full side.



Lahendused

1. (Artur Avameri)

Leia kõik kahekohalised naturaalarvud, millele liites numbrite järjekorra ümberpööramisele saadava arvu, on tulemuseks mingi täisarvu ruut.

Vastus: 29, 38, 47, 56, 65, 74, 83, 92.

Lahendus. Olgu otsitava arvu kümneliste number A ja üheliste number B . Siis arv ise on $10A + B$, numbrite järjekorra ümberpööramisele aga tekib arv $10B + A$. Nende arvude liitmisel saame $(10A + B) + (10B + A)$ ehk $11A + 11B$, mille saab esitada korrutisena $11(A + B)$. Järelikult jagub see summa 11-ga. Kuna 11 on algarv, siis selleks, et see summa saaks olla täisarvu ruut, peab ka $A + B$ sisaldama tegurit 11. Samas on $A + B$ kindlasti positiivne ja ei ületa arvu $9 + 9$ ehk 18. Seega ainus võimalus on $A + B = 11$, kust leiame võimalused 29, 38, 47, 56, 65, 74, 83 ja 92. Kõik sellised arvud rahuldavad ülesande tingimusi, kuna arvu ja numbrite järjekorra ümberpööramisele saadava arvu summa on alati $11 \cdot 11$ ehk 11^2 .

2. (Lukas Müürsepp)

Juku asub ruudustiku vasakpoolisel alumisel nurgaruudul. Kas Jukul on võimalik liikuda parempoolsele ülemisele nurgaruudule niimoodi, et ta läbib ruudustiku igat ruutu täpselt ühe korra, kui

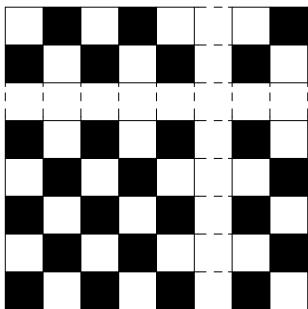
- a) ruudustiku mõõtmed on 2026×2026 ;
- b) ruudustiku mõõtmed on 2027×2027 ?

Ühe sammuga tohib liikuda ainult naaberruudule üle ühise külje ja vahepeal ruudustikult lahkumine pole lubatud.

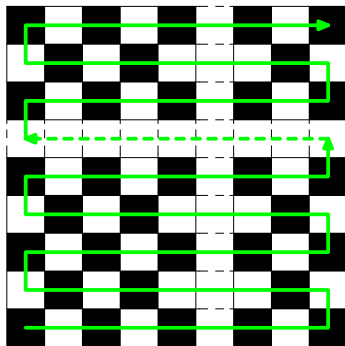
Vastus: a) ei; b) jah.

Lahendus.

- a) Värvime ruudustiku malemustris niimoodi, et vasak alumine nurgaruut on must (joonis 1). Siis on ka parem ülemine nurgaruut must. Kõigi ruutude külastamiseks on Jukul vaja teha $2026 \cdot 2026 - 1$ sammu, mis on paaritu arv. Kuna igal sammul vahetub ruudu värv, saab Juku lõpetada vaid valgel ruudul. Seega Jukul pole võimalik kirjeldatud viisil parempoolsele ülemisele nurgaruudule jõuda.



Joonis 1



Joonis 2

- b) Liikugu Juku mööda alumist rida paremale kuni parempoolse nurgaruuduni, seejärel mööda järgmist rida vasakule kuni vasakpoolse otsani, siis mööda järgmist rida paremale kuni parempoolse otsani jne (joonis 2). Niimoodi läbib Juku kõigis paaritu numbriga ridades kõik ruudud vasakult paremale ja paarisnumbriga ridades kõik ruudud paremalt vasakule. Kuna ülemine rida on paaritu numbriga, lõpetab Juku parempoolsel ülemisel nurgaruudul nagu vaja.

3. (Toomas Tennisberg)

Meil kasutusel olevas kalendris on päevade arv määratud järgmiselt.

- 1) Kui aastaarv ei jagu 4-ga, siis on aastas 365 päeva.
- 2) Kui aastaarv jagub 4-ga, kuid mitte 100-ga, siis on aastas 366 päeva.
- 3) Kui aastaarv jagub 100-ga, kuid mitte 400-ga, siis on aastas 365 päeva.
- 4) Kui aastaarv jagub 400-ga, siis on aastas 366 päeva.

Leia vähim positiivne täisarv n , mille puhul on kindel, et kui võtta mistahes aasta mistahes kuupäev, siis täpselt sama kuupäev n aastat hiljem on olemas ja langeb samale nädalapäevale.

Vastus: 400.

Lahendus. Olgu n tingimusi rahuldav positiivne täisarv.

Oletame, et n ei jagu 4-ga. Valime suvalise liigaasta a ; siis a jagub 4-ga. Samas $a + n$ ei jagu 4-ga, mistõttu $a + n$ pole liigaasta. Seega 29. veebruar on aastas a , kuid mitte aastas $a + n$, vastuolu. Järelikult n peab jaguma 4-ga.

Oletame, et n jagub 4-ga, kuid ei jagu 100-ga. Valime aasta a nii, et $a + n$ jagub 100-ga, kuid mitte 400-ga; siis $a + n$ pole liigaasta. Samas a jagub 4-ga, kuid mitte 100-ga, mistõttu a on liigaasta. Seega 29. veebruar on aastas a , kuid mitte aastas $a + n$, vastuolu. Järelikult n peab jaguma 100-ga.

Oletame viimaks, et n jagub 100-ga, kuid ei jagu 400-ga. Valime aasta a , mis jagub 400-ga; siis a on liigaasta. Samas $a + n$ jagub 100-ga, kuid mitte 400-ga, mistõttu $a + n$ pole liigaasta. Seega 29. veebruar on aastas a , kuid mitte aastas $a + n$, vastuolu. Järelikult n peab jaguma 400-ga.

Näitame, et vähim 400-ga jaguv positiivne täisarv ehk 400 rahuldab tingimusi. Esiteks märkame, et mistahes aasta a korral annavad arvud a ja $a + 400$ sama jäägi jagamisel nii 4-ga, 100-ga kui ka 400-ga. Seega kas a ja $a + 400$ on mõlemad liigaastad või pole neist kumbki liigaasta. Teiseks leiame, et liigaastaid on 400 aasta kestel $\frac{400}{4} - \frac{400}{100} + \frac{400}{400}$ ehk 97. Seega on 400 aastas kokku $400 \cdot 365 + 97$ ehk 146097 päeva. Kuna see arv jagub 7-ga, on 400 aastas täisarv nädalaid. Seega langeb sama kuupäev 400 aastat hiljem alati samale nädalapäevale.

4. (Lukas Määrsepp)

Leia kõik sellised positiivsete täisarvude paarid (x, y) , et $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{67}$.

Vastus: $(68, 4556)$, $(134, 134)$, $(4556, 68)$.

Lahendus 1. Korrutades antud võrrandi pooled suurusega $67xy$, saame pärast liikmete viimist ühele poole ja sobivat ümberjärjestamist võrrandi

$$xy - 67x - 67y = 0.$$

Liites veel mõlemale poole 67^2 , saame võrrandi $xy - 67x - 67y + 67^2 = 67^2$, mille vasaku poole tegurdamisel tekib võrrand

$$(x - 67)(y - 67) = 67^2.$$

Kuna 67 on algarv, siis 67^2 ainsad positiivsed tegurid on 1, 67 ja 67^2 . Siit leiame arvu 67^2 kuus esitust kahe täisarvu korrutisena: $1 \cdot 67^2$, $67 \cdot 67$ ja $67^2 \cdot 1$ ning $(-1) \cdot (-67^2)$, $(-67) \cdot (-67)$ ja $(-67^2) \cdot (-1)$. Kolmes viimases esituses on igaühes vähemalt üks tegur -67 või väiksem, aga kui $x - 67 \leq -67$ või $y - 67 \leq -67$, siis vastavalt $x \leq 0$ või $y \leq 0$, mis on vastuolus ülesande tingimusega. Seega jäävad sõelale kolm esimest esitust, kus mõlemad tegurid on positiivsed. Vaatame need kolm juhtu ükshaaval läbi:

- kui $x - 67 = 1$ ja $y - 67 = 67^2$, siis $x = 1 + 67 = 68$ ja $y = 67^2 + 67 = 4556$;
- kui $x - 67 = y - 67 = 67$, siis $x = y = 67 + 67 = 134$;
- kui $x - 67 = 67^2$ ja $y - 67 = 1$, siis $x = 67^2 + 67 = 4556$ ja $y = 1 + 67 = 68$.

Lahendus 2. Olgu $x = ad$, $y = bd$, kus $d = \text{SÜT}(x, y)$. Siis a ja b on ühis-tegurita. Asendades antud võrrandisse, saame $\frac{1}{ad} + \frac{1}{bd} = \frac{1}{67}$. Korrutades mõlemad pooled arvuga $67abd$, saame $67a + 67b = abd$ ehk

$$67(a + b) = abd. \quad (1)$$

Seega a ja b on mõlemad arvu 67 ($a + b$) tegurid. Aga kuna arv a on ühistegurita arvuga b , siis on arv a ühistegurita ka arvuga $a + b$. Samamoodi näeme, et arv b on ühistegurita arvuga $a + b$. Seega peavad arvud a ja b olema arvu 67 tegurid. Kuna 67 on algarv, siis kas $a = b = 1$ või a ja b on 1 ja 67 emmas-kummas järjestuses. Vaatame kõik kolm juhtu läbi:

- Kui $a = b = 1$, siis võrdusest (1) saame $d = 67 \cdot 2 = 134$. Seega $x = 134$ ja $y = 134$.
- Kui $a = 1$ ja $b = 67$, siis võrdusest (1) saame $67d = 67 \cdot 68$, mis annab $d = 68$. Seega $x = 68$ ja $y = 67 \cdot 68 = 4556$.
- Juht, kus $a = 67$ ja $b = 1$, on eelmisega sümmeetriline ja annab $x = 4556$, $y = 68$.

Kokkuvõttes sobivad parajasti paarid (134, 134), (68, 4556) ja (4556, 68).

Lahendus 3. Antud võrrandist saame $\frac{1}{y} = \frac{1}{67} - \frac{1}{x} = \frac{x - 67}{67x}$, kust omakorda

$$y(x - 67) = 67x. \quad (2)$$

Saadud võrrandi parem pool $67x$ jagub 67-ga. Seega ka vasak pool $y(x - 67)$ jagub 67-ga. Kuna aga 67 on algarv, siis järeldub sellest, et kas y või $x - 67$ jagub 67-ga. Kui arv $x - 67$ jagub 67-ga, siis ka arv x jagub 67-ga. Järelikult x või y jagub 67-ga. Kuna algne võrrand on x ja y suhtes sümmeetriline, võime üldisust kitsendamata eeldada, et x jagub 67-ga ehk $x = 67x'$, kus x' on mingi positiivne täisarv. Asendades selle võrrandisse (2), saame $y(67x' - 67) = 67 \cdot 67x'$, milles poolte läbijagamine 67-ga annab

$$y(x' - 1) = 67x'. \quad (3)$$

Võrrand (3) näitab, et arv $67x'$ jagub arvuga $x' - 1$. Kuna aga arvud x' ja $x' - 1$ on ühistegurita, siis peab arvuga $x' - 1$ jaguma 67. Algarvulisuse tõttu on vaid kaks võimalust, kas $x' - 1 = 1$ või $x' - 1 = 67$, arvestades, et arvu x' positiivsuse tõttu ei saa arv $x' - 1$ olla negatiivne. Kui $x' - 1 = 1$, siis $x' = 2$, kust $x = 2 \cdot 67 = 134$. Võrrandist (2) saame $y \cdot 67 = 67 \cdot 134$, kust $y = 134$. Kui $x' - 1 = 67$, siis $x' = 68$, kust $x = 68 \cdot 67 = 4556$. Võrrandist (2) saame $y \cdot 67^2 = 67^2 \cdot 68$ ehk $y = 68$. Lisaks leitud lahenditele on veel ka sümmeetriline lahend $x = 68$, $y = 4556$.

5. (Aleksei Ganyukov, Kirill Tselovalnikov)

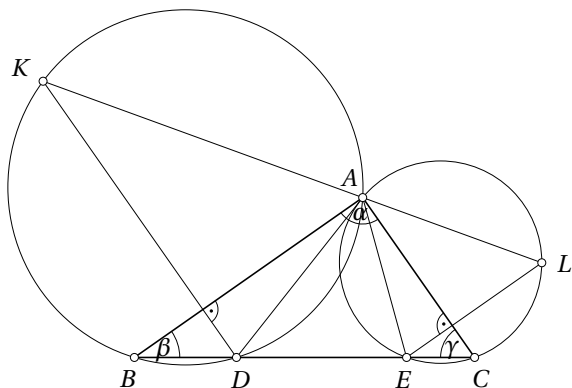
Punktid D ja E valitakse kolmnurga ABC küljel BC nii, et punkt D asub punktide B ja E vahel. Sirge, mis on risti küljega AB ja läbib punkti D , lõikab kolmnurga ABD ümberringjoont punktis K , $K \neq D$. Sirge, mis on risti küljega AC ja läbib punkti E , lõikab kolmnurga ACE ümberringjoont punktis L , $L \neq E$. On teada, et punktid K , A ja L asuvad ühel sirgel.

a) Leia nurga BAC suurus.

b) Tõesta, et punktid K , D , E ja L asuvad ühel ringjoonel.

Lahendus. Tähistame $\angle BAC = \alpha$, $\angle CBA = \beta$ ja $\angle ACB = \gamma$ (joonis 3). Kolmnurga ABD ümberringjoone kaarele AD toetuvatest piiridenurkadest saame $\angle DKA = \angle DBA = \angle CBA = \beta$. Kuna $KD \perp AB$, siis seega $\angle KAB = 90^\circ - \angle DKA = 90^\circ - \beta$. Analoogselt saame $\angle ALE = \gamma$ ja $\angle CAL = 90^\circ - \gamma$.

Kui punktid K , A ja L on ühel sirgel, siis $\angle KAB + \angle BAC + \angle CAL = 180^\circ$ ehk $(90^\circ - \beta) + \alpha + (90^\circ - \gamma) = 180^\circ$, kust $\alpha = \beta + \gamma$. Kolmnurga ABC sisenurkade summast aga $\alpha = 180^\circ - (\beta + \gamma)$. Järelikult $\beta + \gamma = 180^\circ - (\beta + \gamma)$, kust $\beta + \gamma = 90^\circ$.



Joonis 3

a) Eelneva põhjal saame $\alpha = 180^\circ - (\beta + \gamma) = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$.

b) Kasutades kolmnurga ABD ümberringjoone kaarele KB toetuvaid piiridenurki, saame

$$\angle EDK = 180^\circ - \angle KDB = 180^\circ - \angle KAB = 180^\circ - (90^\circ - \beta) = 90^\circ + \beta.$$

Kasutades aga punktide K , A ja L asendit ühel sirgel, saame

$$\angle KLE = \angle ALE = \gamma.$$

Kokkuvõttes $\angle EDK + \angle KLE = 90^\circ + \beta + \gamma = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$, mis tähendabki, et punktid K , D , E ja L on ühel ringjoonel.

6. (Andres Alumets)

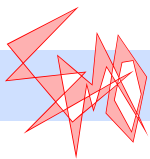
Ringjoonele tuleb paigutada vabalt valitud järjestuses 75 last. Neist 25 valivad kivi, 25 paberi ja 25 käärid. Pärast ringjoonele paigutamist näitavad kõik lapsed korraga oma valikut. Laps loetakse võitjaks, kui ta võidaks mängus „Kivi-käärid-paber“ mõlemat oma naabrit ringjoonel. Leia suurim võimalik võitjate arv.

Märkus. Kivi võidab käärid, käärid võidavad paberi ja paber võidab kivi. Rohkem võiduolukordi pole.

Vastus: 36.

Lahendus. Igast kahest kõrvuti paiknevast lapsest saab ülimalt üks olla võitja. Kui leiduks 37 võitjat, siis peaks leiduma ka 37 kaotajat, kes paiknevad ringjoonel võitjate vahel. Kuna $75 - 37 - 37 = 1$, siis ülimalt ühes kohas saaks olla kaks kaotajat järjest. Järelikult peaks leiduma järgnevus 37 võitjast vaheldumisi 36 kaotajaga. Kuna iga valik võidab täpselt üht valikut ja kaotab samuti täpselt ühele, siis peaks kõigil võitjatel olema sama valik ja ka kõigil kaotajatel sama valik. See aga ei klapi ülesandes antud arvudega. Seega peab suurim võimalik võitjate arv olema väiksem kui 37.

Näitame, et 36 võitjat on võimalik. Selleks paigutame lapsed ringjoonele kolmes 25-liikmelises rühmas: ühes valitakse vaheldumisi 13 paberit ja 12 kääri, teises vaheldumisi 13 kääri ja 12 kivi ning kolmandas vaheldumisi 13 kivi ja 12 paberit. Igas rühmas on konstruktsiooni põhjal võitjad need 12 last, kelle valik on rühmas vähemuses. Seega on kokku $3 \cdot 12$ ehk 36 võitjat.



Lahendused

1. (Birgit Veldi)

Leia kõik täisarvude paarid (a, b) , mille korral leidub selline algarv p , et on rahuldatud võrrandisüsteem

$$\begin{cases} a + b = p, \\ a^2 + b^2 = (p - 8)(p + 4). \end{cases}$$

Vastus: $(6, 7)$, $(7, 6)$.

Lahendus 1. Asendades p esimesest võrrandist teise, saame

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &= (a + b - 8)(a + b + 4) = \\ &= a^2 + ab + 4a + ab + b^2 + 4b - 8a - 8b - 32 = \\ &= a^2 + 2ab - 4a + b^2 - 4b - 32. \end{aligned}$$

Koondades sarnased liikmed ja jagades võrrandi pooled 2-ga, saame siit $ab - 2a - 2b - 16 = 0$. Liites mõlemale poole 20, saame $ab - 2a - 2b + 4 = 20$, mis vasaku poole tegurdamisel omandab kuju

$$(a - 2)(b - 2) = 20.$$

Arvu 20 esitused kahe täisarvu korrutisena on $1 \cdot 20$, $2 \cdot 10$ ja $4 \cdot 5$, samad korrutised teguritega vastupidises järjestuses ning kõik need korrutised miinusmärgiga tegurite ees. Kuna algse süsteemi esimese võrrandi põhjal on $a + b$ algarv, mis on positiivne, siis vähemalt üks arvudest a ja b peab olema positiivne. Seega saavad tegurid $a - 2$ ja $b - 2$ olla negatiivsed vaid tingimusel, et üks neist teguritest on -1 ja teine järelikult -20 . Siis aga peaksid a ja b olema -18 ja 1 , mille summa pole positiivne. Seega võib eeldada, et $a - 2$ ja $b - 2$ on positiivsed. Järgnevalt tabelis vaatame läbi kõik võimalused:

$a - 2$	1	2	4	5	10	20
$b - 2$	20	10	5	4	2	1
$a + b$	25	16	13	13	16	25

Näeme, et $a + b$ on algarv ainult juhul $a - 2 = 4$, $b - 2 = 5$ ja juhul $a - 2 = 5$, $b - 2 = 4$ ehk kui $a = 6$, $b = 7$ ja kui $a = 7$, $b = 6$.

Lahendus 2. Kuna teise võrrandi vasak pool $a^2 + b^2$ on mittenegatiivne, peab mittenegatiivne olema ka parem pool $(p - 8)(p + 4)$. Kuna p on algarv ja seetõttu positiivne, on ka tegur $p + 4$ positiivne, mistõttu mittenegatiivse korrutise saamiseks peab teine tegur $p - 8$ olema mittenegatiivne ehk $p \geq 8$. Algarvulisuse tõttu $p \geq 11$.

Tõstes süsteemi esimese võrrandi pooled ruutu, saame $a^2 + 2ab + b^2 = p^2$. Sellest võrrandist algse süsteemi teise võrrandi lahutamine annab meile $2ab = p^2 - (p - 8)(p - 4) = 4p + 32$, kust

$$ab = 2p + 16. \quad (4)$$

Kuna algne võrrandisüsteem on a ja b suhtes sümmeetriline, saame üldisust kitsendamata eeldada, et $a \leq b$. Siis $b \geq \frac{a+b}{2}$, mis algse süsteemi esimese võrrandi valguses annab $b \geq \frac{1}{2}p$. Kui oletada lisaks, et $a \geq 7$, saaksime $ab \geq 7 \cdot \frac{1}{2}p = \frac{7}{2}p$. Võrduse (4) tõttu tekib niisiis p suhtes võrratus $2p + 16 \geq \frac{7}{2}p$, kust $\frac{3}{2}p \leq 16$ ja $p \leq \frac{32}{3} < 11$, vastuolu. Seega $a \leq 6$ ning kuna b peab olema positiivne ja võrduse (4) parem pool on positiivne, siis ka a peab olema positiivne.

Asendades p esialgse süsteemi esimesest võrrandist võrdusse (4), saame $ab = 2(a + b) + 16 = 2a + 2b + 16$, kust

$$(a - 2)b = 2a + 16. \quad (5)$$

Kuna b on positiivne ja a positiivsuse tõttu ka $2a + 16$ on positiivne, siis ka $a - 2$ on positiivne ehk $a \geq 3$. Vaatame läbi kõik sõelale jäänud võimalused, leides b võrdusest (5) ja p esialgse süsteemi esimesest võrrandist:

a	3	4	5	6
b	22	12	$\frac{26}{3}$	7
p	25	16	$\frac{41}{3}$	13

Näeme, et p on algarv ainult juhul $a = 6, b = 7$. Seega tingimusele $a \leq b$ vastab ainsana lahend (6, 7). Sümmeetria tõttu sobib lahendiks ka (7, 6).

Lahendus 3. Esimesest võrrandist saame $b = p - a$. Asendades selle teise võrrandisse, saame $a^2 + (p - a)^2 = (p - 8)(p + 4)$, kust pärast sulgude avamist, sarnaste liikmete koondamist ja poolte jagamist 2-ga jääb järele $a^2 - ap = -2p - 16$. Viies liikmed, milles esineb tegur p , paremale ja ülejäänud vasakule, saame pärast tegurdamist

$$a^2 + 16 = (a - 2)p. \quad (6)$$

Kuna a^2 on mittenegatiivne ja 16 positiivne, on võrduse (6) vasak pool positiivne. Seega on positiivne ka parem pool, mis $p > 0$ tõttu annab $a - 2 > 0$. Nagu lahenduses 1 saame võrduse (6) ja järeldame, et $a - 2 > 0$.

Kuna algne võrrandisüsteem on a ja b suhtes sümmeetriline, saame üldisust kitsendamata eeldada, et $a \leq b$. Siis algse süsteemi esimese võrrandi põhjal $2a \leq p$. Võrdusest (6) saame nüüd $a^2 + 16 \geq (a - 2) \cdot 2a$ ehk

$$a^2 - 4a - 16 \leq 0.$$

Ruutvõrrand $a^2 - 4a - 16 = 0$ annab lahenditeks $a = 2 \pm \sqrt{20}$, seega nendes punktides muudab võrratus märki. Kuna nende vahel (näiteks kohal $a = 0$) võrratus kehtib, siis piisab kontrollida täisarve $a < 2 + \sqrt{20} < 7$, kusjuures eelnevast juba teame, et $a > 2$. Vaatame läbi kõik sõelale jäänud juhud ja avaldame p seosest (6):

$$\frac{a}{p} \left| \begin{array}{cccc} 3 & 4 & 5 & 6 \\ 25 & 16 & \frac{41}{3} & 13 \end{array} \right.$$

Näeme, et p on algarv ainult juhul $a = 6$ ja $b = 13 - 6 = 7$. Seega tingimusele $a \leq b$ vastab ainsana lahend (6, 7). Sümmeetria tõttu sobib lahendiks ka (7, 6).

2. (Hendrik Vija, Härmel Nestra)

Annal on a , Bertal b ja Carolil c eurot, kusjuures $50 \geq a > b > c$ ja $a + b + c \geq 100$. Üheaegselt annab Anna $a\%$ enda rahast Bertale ja $a\%$ Carolile, Berta $b\%$ enda rahast Annale ja $b\%$ Carolile ning Carol $c\%$ enda rahast Annale ja $c\%$ Bertale. Kellel on nüüd kõige rohkem ja kellel kõige vähem raha?

Vastus: kõige rohkem Carolil, kõige vähem Annal.

Lahendus. Anna annab ära $\frac{2a}{100} \cdot a$ eurot ning saab Bertalt $\frac{b}{100} \cdot b$ eurot ja Carolilt $\frac{c}{100} \cdot c$ eurot. Kokku on tal lõpuks seega $a - \frac{2a^2}{100} + \frac{b^2}{100} + \frac{c^2}{100}$ ehk $\frac{(a^2 + b^2 + c^2) - (3a^2 - 100a)}{100}$ eurot. Analoogselt näeme, et Bertal on lõpuks $\frac{(a^2 + b^2 + c^2) - (3b^2 - 100b)}{100}$ ja Carolil $\frac{(a^2 + b^2 + c^2) - (3c^2 - 100c)}{100}$ eurot.

Ülesande lahendamiseks piisab nüüd uurida arvude $3a^2 - 100a$, $3b^2 - 100b$ ja $3c^2 - 100c$ omavahelist suurusvahekorda, sest ülejäänud osa Anna, Berta ja Caroli varanduslikku seisust näitavast avaldisest on neil sama. Arvude $3a^2 - 100a$ ja $3b^2 - 100b$ suurusvahekord on sama nagu arvudel $3a^2 - 3b^2$ ja $100a - 100b$, ehk teisiti väljendudes arvudel $3(a - b)(a + b)$ ja $100(a - b)$. Kuna $a > b$, on nende arvude suurusvahekord sama mis arvudel $3(a + b)$ ja 100 . Eeldustest $50 \geq a > b > c$ ja $a + b + c \geq 100$ aga tuleneb $a + b \geq 50$. Seega

$3(a + b) \geq 150 > 100$, mis eelneva põhjal näitab, et $3a^2 - 100a > 3b^2 - 100b$. Analoogselt leiame, et $3b^2 - 100b > 3c^2 - 100c$. Järelikult

$$\frac{(a^2 + b^2 + c^2) - (3a^2 - 100a)}{100} < \frac{(a^2 + b^2 + c^2) - (3b^2 - 100b)}{100} < \frac{(a^2 + b^2 + c^2) - (3c^2 - 100c)}{100},$$

millest tulenevalt on lõpus kõige rohkem raha Carolil ja kõige vähem Annal.

Märkus 1. Võib tunduda ahvatlev võrreldavad arvud $3a^2 - 100a$, $3b^2 - 100b$ ja $3c^2 - 100c$ tegurdada kujule $a(3a - 100)$, $b(3b - 100)$ ja $c(3c - 100)$ ning sellest, et $a > b > c$, järeldada $3a - 100 > 3b - 100 > 3c - 100$ ja ühtlasi $a(3a - 100) > b(3b - 100) > c(3c - 100)$. Viimane samm on aga korrektne ainult juhul, kui $3a - 100$, $3b - 100$ ja $3c - 100$ on positiivsed. Ülesande tingimused siiski nende arvude positiivsust ei taga. Näiteks võib algul olla Annal 35, Bertal 33 ja Carolil 32 eurot, siis on nii $3b - 100$ kui ka $3c - 100$ negatiivsed.

Kui ülesande tekstis puuduks tingimus $a + b + c \geq 100$, siis saaks tekkida ka teisi järjestusi. Olgu näiteks $b = 20$ ja $c = 10$ (a võib valida suvaliselt nii, et ülesande muud tingimused kehtiksid). Siis $b(3b - 100) = 20 \cdot (-40) = -800$ ja $c(3c - 100) = 10 \cdot (-70) = -700$ ehk $b(3b - 100) < c(3c - 100)$, olgugi et $b > c$.

Märkus 2. Lahenduse esimeses lõigus kasutati Anna varanduslikku seisu väljendava murru teisendamiseks trikki liita ja lahutada lugejas a^2 (Berta ja Caroli puhul vastavalt b^2 ja c^2). Selle mõte oli järgnevaid võrdlusi lihtsustada, eraldades kõigi murdude lugejates ühise osa $a^2 + b^2 + c^2$. Ülesande lahendamiseks seda trikki tingimata vaja kasutada ei ole, selle asemel saab Anna, Berta ja Caroli uued eurode arvud kohe omavahel kõrvutada ja lihtsustada avaldised võrdluste käigus.

3. (Kirill Tselovalnikov)

Leia kõik positiivsete täisarvude (lõpmatud) jadad $a_1, a_2, a_3, \dots$, mis rahuldavad tingimust

$$nm \mid a_n - a_m$$

kõigi positiivsete täisarvude n ja m korral.

Märkus. Kirjutis $x \mid y$ tähistab väidet, et arv x on arvu y tegur.

Vastus: kõik konstantsed jadad.

Lahendus 1. Näitame, et rahuldamiseks antud jaguvustingimust, peab jada olema konstantne. Selleks võtame suvalised positiivsed täisarvud n ja m ning näitame, et $a_n = a_m$ ehk $a_n - a_m = 0$. Selleks on omakorda piisav näidata, et $a_n - a_m$ jagub iga positiivse täisarvuga, sest nullist erinevad täisarvud ei saa jaguda lõpmata paljude täisarvudega.

Olgu niisiis s suvaline positiivne täisarv ja näitame, et $s \mid a_n - a_m$. Võttes ülesande tingimuses $m = s$, saame $ns \mid a_n - a_s$, millest omakorda järeldub

$$s \mid a_n - a_s. \quad (7)$$

Võttes aga ülesande tingimuses $n = s$, saame $sm \mid a_s - a_m$, millest järeldub

$$s \mid a_s - a_m. \quad (8)$$

Liites seosed (7) ja (8), saame

$$s \mid a_n - a_m,$$

mida oligi vaja.

Teisalt on lihtne kontrollida, et kõik konstantsed jadad tõepoolest rahuldavad antud seost.

Lahendus 2. Pannes antud jaguvustingimuses n asemele a_n , saame

$$a_n m \mid a_{a_n} - a_m,$$

millest omakorda järeldub, et

$$a_n \mid a_{a_n} - a_m \quad (9)$$

kõigi positiivsete täisarvude n ja m korral. Pannes seoses (9) m asemele n , saame $a_n \mid a_{a_n} - a_n$. Kuna $a_n \mid a_n$, siis järeldub sellest

$$a_n \mid a_{a_n} \quad (10)$$

iga positiivse täisarvu n korral. Seosed (9) ja (10) koos aga annavad

$$a_n \mid a_m$$

kõigi positiivsete täisarvude n ja m korral. Seega jada kõik liikmed jaguvad vastastikku üksteisega. Kuna need väärtused on positiivsed täisarvud, siis jada on konstantne ehk leidub selline positiivne täisarv c , et

$$a_n = c$$

iga positiivse täisarvu n korral. On lihtne veenduda, et kõik konstantsed jadad tõepoolest rahuldavad antud seost.

4. (Artur Bentsa)

Tõesta, et

$$\frac{1}{1(\sqrt{1} + \sqrt{3})} + \frac{1}{2(\sqrt{3} + \sqrt{5})} + \frac{1}{3(\sqrt{5} + \sqrt{7})} + \dots + \frac{1}{2026(\sqrt{4051} + \sqrt{4053})} < 1.$$

Lahendus. Teisendame igat liidetavat eraldi. Nimetaja vabastamisega irratsionaalsusest saame

$$\begin{aligned} \frac{1}{n(\sqrt{2n-1} + \sqrt{2n+1})} &= \frac{\sqrt{2n+1} - \sqrt{2n-1}}{n(\sqrt{2n+1} + \sqrt{2n-1})(\sqrt{2n+1} - \sqrt{2n-1})} = \\ &= \frac{\sqrt{2n+1} - \sqrt{2n-1}}{n((2n+1) - (2n-1))} = \\ &= \frac{\sqrt{2n+1} - \sqrt{2n-1}}{2n}. \end{aligned}$$

Nüüd paneme tähele, et

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{2n+1} - \sqrt{2n-1}}{2n} &= \frac{\sqrt{2n+1} - \sqrt{2n-1}}{\sqrt{4n^2}} < \\ &< \frac{\sqrt{2n+1} - \sqrt{2n-1}}{\sqrt{4n^2 - 1}} = \\ &= \frac{\sqrt{2n+1} - \sqrt{2n-1}}{\sqrt{2n+1} \cdot \sqrt{2n-1}} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2n-1}} - \frac{1}{\sqrt{2n+1}}. \end{aligned}$$

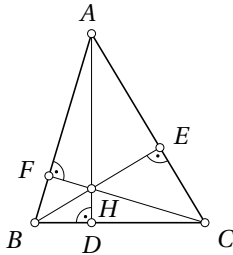
Järelikult

$$\begin{aligned} \frac{1}{1(\sqrt{1} + \sqrt{3})} + \frac{1}{2(\sqrt{3} + \sqrt{5})} + \frac{1}{3(\sqrt{5} + \sqrt{7})} + \dots + \frac{1}{2026(\sqrt{4051} + \sqrt{4053})} &< \\ &< \left(\frac{1}{\sqrt{1}} - \frac{1}{\sqrt{3}} \right) + \left(\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{5}} \right) + \left(\frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{7}} \right) + \dots + \left(\frac{1}{\sqrt{4051}} - \frac{1}{\sqrt{4053}} \right) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{1}} - \frac{1}{\sqrt{4053}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{4053}} < 1. \end{aligned}$$

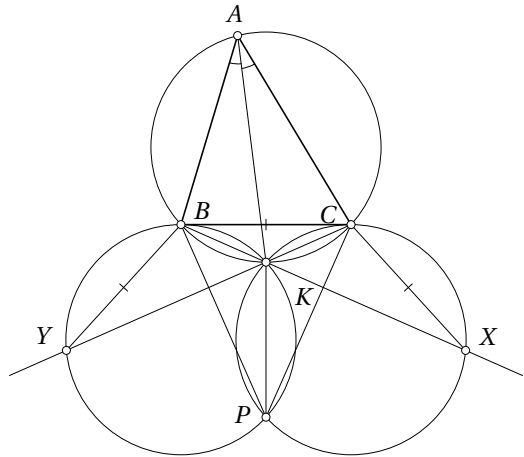
5. (Bronislav Shatil)

Teravnurkses kolmnurgas ABC on külg AB lühem küljest AC . Kolmnurga ABC kõrguste lõikepunkt on H ja tipu A juures oleva sisenurga poolitaja lõikab kolmnurga ABC ümberringjoont punktis K ($K \neq A$). Sirgel BK võetakse punkt X nii, et lõigud BC ja CX on võrdse pikkusega, sirgel CK aga võetakse punkt Y nii, et lõigud CB ja BY on võrdse pikkusega, kusjuures $X \neq B$, $Y \neq C$. Kolmnurkade CKX ja BKY ümberringjooned lõikuvad punktis P ($P \neq K$). Tõesta, et sirged AK ja HP on paralleelsed.

Lahendus 1. Olgu $\angle BAC = \alpha$, $\angle CBA = \beta$ ja $\angle ACB = \gamma$. Olgu kolmnurga ABC tippudest A , B ja C tõmmatud kõrguste aluspunktid vastavalt D , E ja F (joonis 4).



Joonis 4



Joonis 5

Näitame esmalt, et $BHCP$ on kõõlnelinurk. Ühelt poolt saame

$$\angle BHD = 90^\circ - \angle DBH = 90^\circ - \angle CBE = 90^\circ - (90^\circ - \angle ECB) = \angle ECB = \gamma$$

ja analoogiliselt $\angle DHC = \beta$, millest kokkuvõttes $\angle BHC = \gamma + \beta = 180^\circ - \alpha$. Teisalt (joonis 5) saame kolmnurga CKX ümberringjoone samale kaarele toetuvatest piirdenurkadest $\angle CPK = \angle CXK = \angle CXB$, kolmnurga ABC ümberringjoone samale kaarele toetuvatest piirdenurkadest saame aga $\angle KAC = \angle KBC = \angle XBC$. Kuna $|BC| = |CX|$, siis $\angle CXB = \angle XBC$, nii et $\angle CPK = \angle KAC = \frac{1}{2}\alpha$. Analoogiliselt saame $\angle KPB = \frac{1}{2}\alpha$, kust kokkuvõttes $\angle CPB = \angle CPK + \angle KPB = \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\alpha = \alpha$. Järelikult

$$\angle BHC + \angle CPB = 180^\circ - \alpha + \alpha = 180^\circ,$$

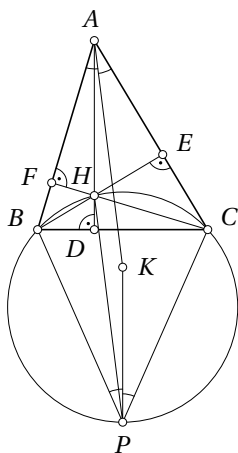
mis tähendabki, et $BHCP$ on kõõlnelinurk (joonis 6).

Teiseks näitame, et $\angle HAK = \angle KPH$. Tõepoolest,

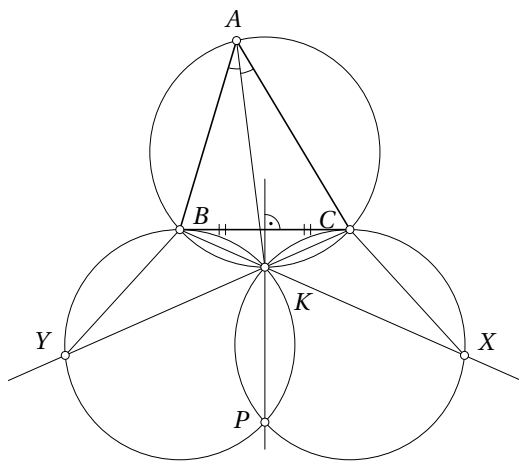
$$\angle HAK = \angle BAK - \angle BAH = \angle BAK - \angle BAD = \frac{1}{2}\alpha - (90^\circ - \beta).$$

Kasutades aga nelinurga $BHCP$ ümberringjoone samale kaarele toetuvaid piirdenurki ja eelnevalt tõestatud võrdsust $\angle KPB = \frac{1}{2}\alpha$, näeme, et

$$\begin{aligned} \angle KPH &= \angle KPB - \angle HPB = \angle KPB - \angle HCB = \angle KPB - \angle FCB = \\ &= \frac{1}{2}\alpha - (90^\circ - \beta). \end{aligned}$$



Joonis 6



Joonis 7

Järelikult $\angle HAK = \angle KPH$.

Kolmandaks tõestame, et $AH \parallel KP$. Kuna $AH \perp BC$, piisab näidata, et $KP \perp BC$. Kuna $\angle BAK = \angle KAC$, on kolmnurga ABC ümberringjoone kaared BK ja KC ja ühtlasi vastavad kõõlud võrdsed, mistõttu K asub külje BC keskrisirgel (joonis 7). Punktid B ja C on külje BC keskrisirge suhtes sümmeetrilised, järelikult on külje BC keskrisirge suhtes sümmeetrilised ka punktid X ja Y ning ühtlasi ka kolmnurkade CKX ja BKY ümberringjooned. Seega asub nende ringjoonte lõikepunkt P külje BC keskrisirgel, millest nähtubki, et $KP \perp BC$.

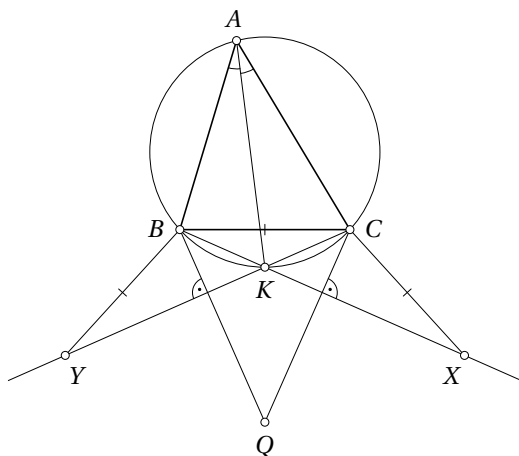
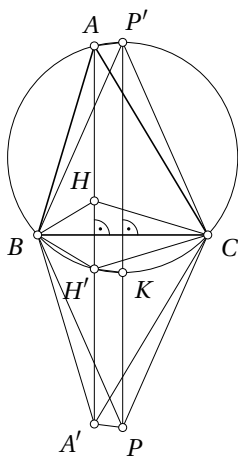
Kuna $\angle HAK = \angle KPH$ ja $AH \parallel KP$, siis $AK \parallel HP$, mida oligi tarvis tõestada.

Lahendus 2. Nagu lahenduses 1 leiame, et $\angle BHC = 180^\circ - \alpha$ ja $\angle CPK = \frac{1}{2}\alpha$, kus $\alpha = \angle BAC$, ja tõestame, et $AH \parallel KP$. Ülesande lahendamiseks piisab nüüd näidata, et $|AH| = |KP|$, sest siis saab järeldada, et $AHPK$ on rõõpkülik ja tema vastasküljed AK ja HP on paralleelsed.

Näitamaks võrdsust $|AH| = |KP|$, olgu A' , H' ja P' vastavalt punktide A , H ja P peegeldused sirgest BC (joonis 8). Sümmeetriaie tuginedes saame võrdsused

$$\begin{aligned}\angle CH'B &= \angle BHC = 180^\circ - \alpha, \\ \angle BP'C &= \angle CPB = 2\angle CPK = 2 \cdot \frac{1}{2}\alpha = \alpha.\end{aligned}$$

Seega asuvad punktid H' ja P' kolmnurga ABC ümberringjoonel. Kuna $AH \perp BC$ ja $KP \perp BC$, asuvad punktid A , H ja H' ühel sirgel ning

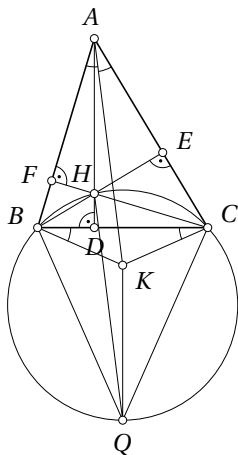


K , P ja P' samuti ühel sirgel. Seega AH' ja $P'K$ on kolmnurga ABC ümberringjoone kaks paralleelset kõõlu. Järelikult on $AH'KP'$ võrdhaarne trapets, kust saame $\angle AP'K = \angle P'KH'$. Sümmeetria tõttu sirge BC suhtes on aga ka $AA'PP'$ võrdhaarne trapets, millest tulenevalt $\angle AP'P = \angle P'PA'$. Kuna $\angle AP'K = \angle AP'P$, saame kokkuvõttes $\angle P'KH' = \angle P'PA'$. Seega $H'K \parallel A'P$. Kuna samas $H'A' \parallel KP$, on $H'A'PK$ rööpkülik, millest tulenevalt $|H'A'| = |KP|$. Sümmeetria tõttu sirge BC suhtes aga $|AH| = |H'A'|$. Kokkuvõttes olemegi tõestanud, et $|AH| = |KP|$.

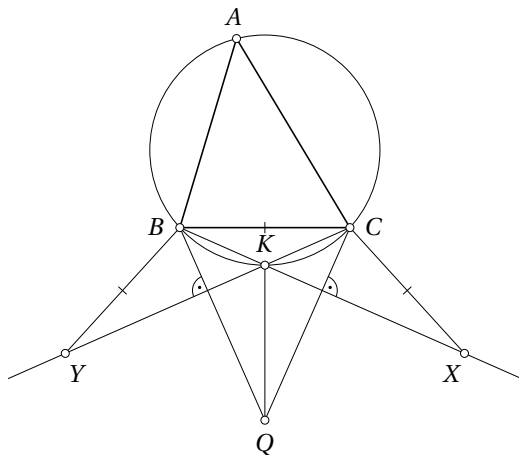
Lahendus 3. Nagu lahenduses 1 tähistame nurgad α , β ja γ , tähistame kõrguste aluspunktid D , E ja F ning tõestame võrdused $\angle BHD = \gamma$ ja $\angle BHC = 180^\circ - \alpha$.

Olgu Q punkt, kus lõikuvad kolmnurga BCX tipust C tõmmatud kõrguse ja kolmnurga CBY tipust B tõmmatud kõrguse pikendused (joonis 9). Kuna $\angle XBC = \angle KBC = \angle KAC = \frac{1}{2}\alpha$, siis $\angle BCQ = 90^\circ - \frac{1}{2}\alpha$. Analoogselt leiame $\angle QBC = 90^\circ - \frac{1}{2}\alpha$, mis näitab, et $|BQ| = |CQ|$. Arvutame ka $\angle CQB = 180^\circ - 2\left(90^\circ - \frac{1}{2}\alpha\right) = \alpha$. Koos võrdusega $\angle BHC = 180^\circ - \alpha$ tuleb sellest, et $BHCQ$ on kõõlnelinurk (joonis 10).

Kasutades nelinurga $BHCQ$ ümberringjoone samale kaarele toetuvaid piir-
denurki, saame $\angle DHQ = \angle BHQ - \angle BHD = \angle BCQ - \angle BHD = 90^\circ - \frac{1}{2}\alpha - \gamma$.
Samas $\angle DAK = \angle DAC - \angle KAC = 90^\circ - \gamma - \frac{1}{2}\alpha$. Järelikult $\angle DHQ = \angle DAK$,
mis näitab, et $HQ \parallel AK$.



Joonis 10



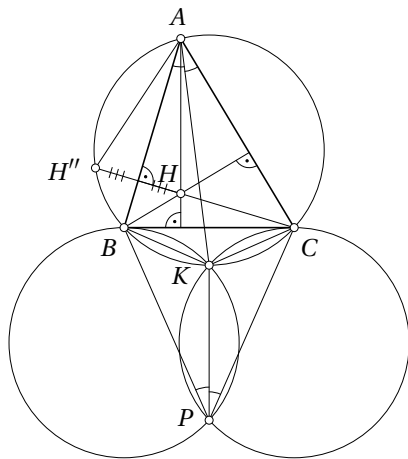
Joonis 11

Ülesande lahendamiseks jääb veel tõestada, et $P = Q$. Kuna $BK \perp CQ$ ja $CK \perp BQ$, on K kolmnurga BCQ kõrguste lõikepunkt (joonis 11). Võrdhaar-se kolmnurga tipunurgast tõmmatud kõrgus poolitab tipunurga, mistõttu $\angle CQK = \angle KQB = \frac{1}{2}\alpha$. Samas ka $\angle CXK = \angle CXB = \angle XBC = \angle KBC = \frac{\alpha}{2}$ ja $\angle KYB = \angle CYB = \angle BCY = \angle BCK = \frac{\alpha}{2}$. Seega $\angle CXK = \angle CQK$ ja $\angle KYB = \angle KQB$, mis näitab, et Q asub kolmnurkade CKX ja BKY ümber-ringjoontel. See näitabki, et $P = Q$.

Lahendus 4. Nagu lahenduses 1 leiame, et $\angle CPK = \frac{1}{2}\alpha$, kus $\alpha = \angle BAC$, ja tõestame, et KP on külje BC keskristsirge, millest tulenevalt $AH \parallel KP$. Ülesande lahendamiseks piisab nüüd näidata, et $|AH| = |KP|$, sest siis saab järeldada, et $AHPK$ on rööpkülik ja tema vastasküljed AK ja HP on paral-leelsed.

Olgu nüüd H'' punkti H peegeldus sirgest AB (joonis 12); tuntud fakti põh-jal asub punkt H'' kolmnurga ABC ümberringjoonel. Kuna $|AH''| = |AH|$, piisab meil näidata, et $|AH''| = |KP|$. Kuna kolmnurkades ACK ja PCK on külje CK vastasnurk sama suurusega $\frac{1}{2}\alpha$, siis siinusteoreemi põhjal on nen-de kolmnurkade ümberringjoonte raadiused võrdsed. Seega AH'' ja KP on kõõlud võrdsete raadiustega ringjoontes, mistõttu nende võrdsuseks piisab näidata, et neile toetuvad piirdenurgad on võrdsed ehk $\angle ACH'' = \angle KCP$.

Selleks märkame ühelt poolt, et $\angle ACH'' = \angle ACH = 90^\circ - \alpha$. Teiselt poolt, kolmnurgas CKP kehtib $\angle CPK = \frac{1}{2}\alpha$ ning kuna sümmeetria tõttu



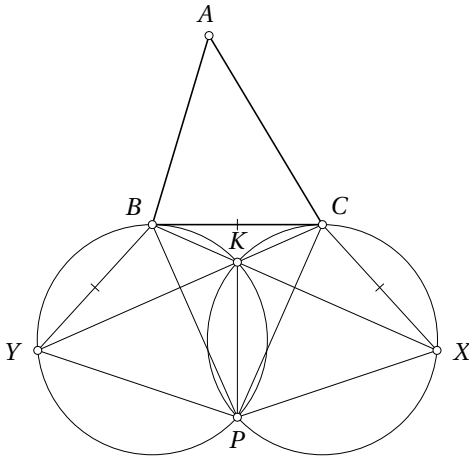
Joonis 12

$\angle PKC = \angle BKP$, siis $\angle PKC = \frac{360^\circ - (180^\circ - \alpha)}{2} = 90^\circ + \frac{1}{2}\alpha$. Siit saame, et $\angle KCP = 180^\circ - \frac{1}{2}\alpha - \left(90^\circ + \frac{1}{2}\alpha\right) = 90^\circ - \alpha$. Kokkuvõttes ongi näidatud, et $\angle ACH'' = \angle KCP$.

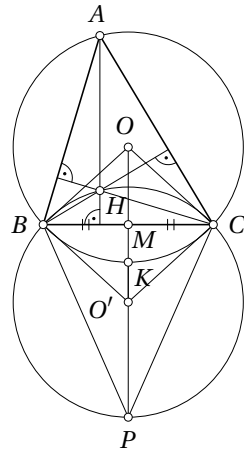
Lahendus 5. Nagu lahenduses 1 leiame, et $\angle CPB = \alpha$, kus $\alpha = \angle BAC$, tõestame, et punktid X ja Y on sirge KP suhtes sümmeetrilised, ning veendume, et $AH \parallel KP$. Ülesande lahendamiseks piisab nüüd näidata, et $|AH| = |KP|$, sest siis saab järeldada, et $AHPK$ on rööpkülik ja tema vastasküljed AK ja HP on paralleelsed.

Sümmeetria ning kolmnurga BKY ümberringjoone võrdsetele kaarte toetuvate piiridenurkade põhjal kehtib $\angle KXP = \angle PYK = \angle BPK$ (joonis 13). Seega asub punkt P lõigu BX keskristsirgel. Kuivõrd ka punkt C asub lõigu BX keskristsirgel, on sirged CP ja BX risti. Analoogiliselt näeme, et sirged BP ja CY on risti. See aga tähendab, et sirgete BX ja CY lõikepunkt K on kolmnurga PBC kõrguste lõikepunkt.

Kuna kolmnurkades ABC ja PBC on külje BC vastasnurk sama suurusega α , on nende kolmnurkade ümberringjoonte raadiused siinusteoreemi põhjal võrdsed. Olgu O kolmnurga ABC ümberringjoone keskpunkt, O' kolmnurga BPC ümberringjoone keskpunkt ning M külje BC keskpunkt (joonis 14). Raadiuste võrdsuse põhjal $|OB| = |OC| = |O'C| = |O'B|$, mistõttu ka kolmnurgad OBC ja $O'BC$ on võrdsed. Järelikult on ka vastavad kõrgused võrdsed ehk $|OM| = |O'M'|$. Tuntud fakti põhjal aga $|AH| = 2|OM|$ ja analoogiliselt $|KP| = 2|O'M'|$. Kokkuvõttes $|AH| = |KP|$.



Joonis 13



Joonis 14

Märkus 1. Lahenduses 4 kasutasime kolmnurga ABC ja külje AB jaoks järgmist tuntud fakti: kolmnurga kõrguste lõikepunkti peegeldus küljest asub ümberringjoonel. See fakt on lahenduses 2 möödaminnes ära tõestatud kolmnurga ABC ja külje BC jaoks.

Lahenduse 5 eelviimases lauses kasutasime kaks korda järgmist samuti tuntud fakti: kolmnurga tipu kaugus kõrguste lõikepunktist võrdub kahekordse vastaskülje keskpunkti ja ümberringjoone keskpunkti vahelise kaugusega. Ka seda on lihtne tõestada. Kasutame selleks lahenduste 1 ja 5 tähistusi. Esiteks märkame, et

$$\begin{aligned}
 \angle HAO &= \angle HAC - \angle OAC = \\
 &= \angle HAC - \left(90^\circ - \frac{1}{2}\angle COA\right) = \\
 &= \angle HAC - (90^\circ - \angle CBA) = \\
 &= (90^\circ - \gamma) - (90^\circ - \beta) = \\
 &= \beta - \gamma.
 \end{aligned}$$

Lahenduses 5 tehtust selgub, et kolmnurkade ABC ja PBC ümberringjooned on teineteise peegeldused sirgest BC . Eelmise tuntud fakti põhjal asub punkt H' kolmnurga ABC ümberringjoonel. Kasutades sümmeetriat koos selle faktiga, saame

$$\begin{aligned}
 \angle OO'H &= \angle MO'H = \angle H'OM = \angle H'OC - \angle MOC = \\
 &= \angle H'OC - \frac{1}{2}\angle BOC = 2\angle H'AC - \angle BAC = \\
 &= 2(90^\circ - \gamma) - \alpha = 180^\circ - 2\gamma - \alpha = \beta - \gamma.
 \end{aligned}$$

Kokkuvõttes $\angle HAO = \angle OO'H$. Kuna $AH \parallel OO'$, siis järeldub sellest, et ka $AO \parallel HO'$, mistõttu $AOO'H$ on rööpkülik. Seega $|AH| = |OO'| = 2|OM|$.

Märkus 2. Kirjutisega $|l|$ tähistame lõigu l pikkust.

6. (Andres Alumets)

Tasandile paigutatakse 2026 ühesuurust ruudukujulist plaati ilma ülekate-teta. Leia suurim võimalik terve ühise küljega plaadipaaride arv.

Vastus: 3961.

Lahendus. Nimetame *sidusaks tükiks* plaatide hulga sellist paigutust, kus hulga iga plaadi pealt saab üle tervete ühiste servade liikuda iga ülejäänud plaadi peale selles hulgas. Üldisust kitsendamata võime eeldada, et kõik plaadid katavad täpselt lõpmatu ruudustiku ühikruute, sest vajadusel saame plaate või nende sidusaid tükke pöörata ja ümber tõsta nii, et terve ühise küljega plaadipaaride arv ei muutu.

Tähistagu s vaadeldava paigutuse ühise küljega plaadipaaride arvu. Olgu veel r vaadeldava paigutuse hõlmatavate plaadiridade arv ja v veergude arv (ridades ja veergudes ei pruugi kõik kohad olla täidetud). Vähemalt 2 äärmist plaadikülge igas hõlmatavas reas, nagu ka 2 äärmist plaadikülge igas hõlmatavas veerus, ei ole kahe plaadi ühiseks küljeks. Kokku on $2026 \cdot 4$ plaadikülge, millest eelneva põhjal vähemalt $2(r + v)$ plaadikülge ei ole ühegi kahe plaadi jaoks ühised. Seega ülimalt $2026 \cdot 4 - 2(r + v)$ plaadikülge on mingi kahe plaadi jaoks ühised. Teisalt on igas terve ühise küljega plaadipaaris koos 2 plaadikülge, mistõttu selliseid plaadikülgi, mis on mingile kahele plaadile ühised, on kokku $2s$. Kokkuvõttes $2s \leq 2026 \cdot 4 - 2(r + v)$ ehk

$$s \leq 2026 \cdot 2 - (r + v) = 4052 - (r + v).$$

Kuid aritmeetilise ja geomeetrilise keskmise vahelisest võrratusest tulenevalt $\frac{r + v}{2} \geq \sqrt{rv}$. Kuna r rea ja v veeru sisse peab mahtuma 2026 plaati, siis $rv \geq 2026$. Seega kokkuvõttes

$$r + v \geq 2\sqrt{rv} \geq 2\sqrt{2026} > 2 \cdot 45 = 90,$$

mistõttu $r + v \geq 91$. Seega $s \leq 4052 - 91 = 3961$.

Paigutades 2025 plaati 45×45 ruudustikuna ja lisades 46-nda veeru ülemisse ritta veel ühe plaadi, saavutame leitud ülempiiri. Tõepoolest, vertikaalse ühise küljega plaadipaare on $1 \cdot 45 + 44 \cdot 44$ ja horisontaalse ühise küljega plaadipaare $45 \cdot 44$. Kokku on ühise küljega plaadipaare $1 \cdot 45 + 44 \cdot 44 + 45 \cdot 44$ ehk $44 \cdot 44 + 45 \cdot 45$ ehk 3961.