Lahtine võistlus 2026 sügis

Ülesanded **2**
- Noorem rühm 2
- Vanem rühm 3

Ülesanded vene keeles **4**
- Младшая группа 4
- Старшая группа 5

Ülesanded inglise keeles **6**
- Juniors 6
- Seniors 7

Lahendused **8**
- Noorem rühm 8
- Vanem rühm 15

Hindamisskeemid **32**
- Noorem rühm 32
- Vanem rühm 36

Võistluskomplekti valmimisse panustasid:

Andres Alumets
Artur Avameri
Artur Bentsa
Aleksei Ganyukov
Jaan Kristjan Kaasik
Oleg Košik
Phil Labuschagne
Lukas Müürsepp
Härmel Nestra
Julia Polikarpus
Bronislav Shatil
Toomas Tennisberg
Kirill Tselovalnikov
Birgit Veldi
Hendrik Vija

Matemaatika lahtine võistlus

26. september 2026 **Noorem rühm**

Lahendamisaega on 5 tundi.
Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti.
Elektroonilised ega kirjalikud abivahendid ei ole lubatud.

1. Leia kõik kahekohalised naturaalarvud, millele liites numbrite järjekorra ümberpööramisel saadava arvu, on tulemuseks mingi täisarvu ruut.

2. Juku asub ruudustiku vasakpoolsel alumisel nurgaruudul. Kas Jukul on võimalik liikuda parempoolsele ülemisele nurgaruudule niimoodi, et ta läbib ruudustiku igat ruutu täpselt ühe korra, kui

a) ruudustiku mõõtmed on 2026×2026;

b) ruudustiku mõõtmed on 2027×2027?

Ühe sammuga tohib liikuda ainult naaberruudule üle ühise külje ja vahepeal ruudustikult lahkumine pole lubatud.

3. Meil kasutusel olevas kalendris on päevade arv määratud järgmiselt.

1) Kui aastaarv ei jagu 4-ga, siis on aastas 365 päeva.
2) Kui aastaarv jagub 4-ga, kuid mitte 100-ga, siis on aastas 366 päeva.
3) Kui aastaarv jagub 100-ga, kuid mitte 400-ga, siis on aastas 365 päeva.
4) Kui aastaarv jagub 400-ga, siis on aastas 366 päeva.

Leia vähim positiivne täisarv n, mille puhul on kindel, et kui võtta mistahes aasta mistahes kuupäev, siis täpselt sama kuupäev n aastat hiljem on olemas ja langeb samale nädalapäevale.

4. Leia kõik sellised positiivsete täisarvude paarid (x, y), et $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{67}$.

5. Punktid D ja E valitakse kolmnurga ABC küljel BC nii, et punkt D asub punktide B ja E vahel. Sirge, mis on risti küljega AB ja läbib punkti D, lõikab kolmnurga ABD ümberringjoont punktis K, $K \neq D$. Sirge, mis on risti küljega AC ja läbib punkti E, lõikab kolmnurga ACE ümberringjoont punktis L, $L \neq E$. On teada, et punktid K, A ja L asuvad ühel sirgel.

a) Leia nurga BAC suurus.

b) Tõesta, et punktid K, D, E ja L asuvad ühel ringjoonel.

6. Ringjoonele tuleb paigutada vabalt valitud järjestuses 75 last. Neist 25 valivad kivi, 25 paberi ja 25 käärid. Pärast ringjoonele paigutamist näitavad kõik lapsed korraga oma valikut. Laps loetakse võitjaks, kui ta võidaks mängus „Kivi-käärid-paber“ mõlemat oma naabrit ringjoonel. Leia suurim võimalik võitjate arv.

Märkus. Kivi võidab käärid, käärid võidavad paberi ja paber võidab kivi. Rohkem võiduolukordi pole.

Matemaatika lahtine võistlus

26. september 2026 **Vanem rühm**

Lahendamisaega on 5 tundi.
Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti.
Elektroonilised ega kirjalikud abivahendid ei ole lubatud.

1. Leia kõik täisarvude paarid (a, b), mille korral leidub selline algarv p, et on rahuldatud võrrandisüsteem

$$\begin{cases} a + b = p, \\ a^2 + b^2 = (p-8)(p+4). \end{cases}$$

2. Annal on a, Bertal b ja Carolil c eurot, kusjuures $50 \geqslant a > b > c$ ja $a + b + c \geqslant 100$. Üheaegselt annab Anna a% enda rahast Bertale ja a% Carolile, Berta b% enda rahast Annale ja b% Carolile ning Carol c% enda rahast Annale ja c% Bertale. Kellel on nüüd kõige rohkem ja kellel kõige vähem raha?

3. Leia kõik positiivsete täisarvude (lõpmatud) jadad $a_1, a_2, a_3, \ldots$, mis rahuldavad tingimust

$$nm \mid a_n - a_m$$

kõigi positiivsete täisarvude n ja m korral.

Märkus. Kirjutis $x \mid y$ tähistab väidet, et arv x on arvu y tegur.

4. Tõesta, et

$$\frac{1}{1\left(\sqrt{1}+\sqrt{3}\right)} + \frac{1}{2\left(\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)} + \frac{1}{3\left(\sqrt{5}+\sqrt{7}\right)} + \ldots + \frac{1}{2026\left(\sqrt{4051}+\sqrt{4053}\right)} < 1.$$

5. Teravnurkses kolmnurgas ABC on külg AB lühem küljest AC. Kolmnurga ABC kõrguste lõikepunkt on H ja tipu A juures oleva sisenurga poolitaja lõikab kolmnurga ABC ümberringjoont punktis K $(K \neq A)$. Sirgel BK võetakse punkt X nii, et lõigud BC ja CX on võrdse pikkusega, sirgel CK aga võetakse punkt Y nii, et lõigud CB ja BY on võrdse pikkusega, kusjuures $X \neq B$, $Y \neq C$. Kolmnurkade CKX ja BKY ümberringjooned lõikuvad punktis P $(P \neq K)$. Tõesta, et sirged AK ja HP on paralleelsed.

6. Tasandile paigutatakse 2026 ühesuurust ruudukujulist plaati ilma ülekateteta. Leia suurim võimalik terve ühise küljega plaadipaaride arv.

Открытое соревнование по математике

26 сентября 2026 г. **Младшая группа**

Время, отводимое для решения: 5 часов.
Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи даёт 7 баллов.
Вспомогательные письменные материалы или электронные приборы не разрешены.

1. Найти все двузначные натуральные числа, при сложении которых с числом, полученным при изменении порядка цифр на противоположный, в результате получается квадрат некоторого целого числа.

2. Юра находится в левой нижней угловой клетке сетки. Может ли он пройти в правую верхнюю угловую клетку так, чтобы побывать в каждой клетке сетки ровно один раз, если

а) размеры сетки — 2026 × 2026;

б) размеры сетки — 2027 × 2027?

За один шаг разрешается переходить только в соседнюю по стороне клетку, причём выходить за пределы сетки нельзя.

3. В используемом нами календаре число дней в году определяется следующим образом.

1) Если номер года не делится на 4, то в году 365 дней.
2) Если номер года делится на 4, а не на 100, то в году 366 дней.
3) Если номер года делится на 100, а не на 400, то в году 365 дней.
4) Если номер года делится на 400, то в году 366 дней.

Найти наименьшее положительное целое число n такое, что если взять любую дату любого года, то ровно через n лет существует дата с теми же числом и месяцем и она приходится на тот же день недели.

4. Найти все такие пары положительных целых чисел (x, y), что $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{67}$.

5. Точки D и E выбираются на стороне BC треугольника ABC так, что точка D находится между точками B и E. Прямая, перпендикулярная стороне AB и проходящая через точку D, пересекает описанную окружность треугольника ABD в точке K, $K \neq D$. Прямая, перпендикулярная стороне AC и проходящая через точку E, пересекает описанную окружность треугольника ACE в точке L, $L \neq E$. Известно, что точки K, A и L лежат на одной прямой.

а) Найти величину угла BAC.

б) Доказать, что точки K, D, E и L лежат на одной окружности.

6. По окружности в произвольном порядке расставляют 75 детей. Из них 25 выбирают камень, 25 — бумагу и 25 — ножницы. После расстановки все дети одновременно показывают свой выбор. Ребёнок считается победителем, если в игре «Камень, ножницы, бумага» он победил бы обоих соседей по окружности. Найти наибольшее возможное число победителей.

Примечание. Камень побеждает ножницы, ножницы побеждают бумагу, а бумага побеждает камень. Других выигрышных ситуаций нет.

Открытое соревнование по математике

26 сентября 2026 г. **Старшая группа**

Время, отводимое для решения: 5 часов.
Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи даёт 7 баллов.
Вспомогательные письменные материалы или электронные приборы не разрешены.

1. Найти все пары целых чисел (a, b), для которых существует такое простое число p, что выполняется система уравнений

$$\begin{cases} a + b = p, \\ a^2 + b^2 = (p-8)(p+4). \end{cases}$$

2. У Ани a, у Вари b, а у Саши c евро, причём $50 \geqslant a > b > c$ и $a+b+c \geqslant 100$. Одновременно Аня отдаёт a% своих денег Варе и a% Саше, Варя отдаёт b% своих денег Ане и b% Саше, а Саша отдаёт c% своих денег Ане и c% Варе. У кого теперь больше всего и у кого меньше всего денег?

3. Найти все (бесконечные) последовательности $a_1, a_2, a_3, \ldots$ положительных целых чисел, удовлетворяющие условию

$$nm \mid a_n - a_m$$

для всех положительных целых чисел n и m.

Примечание. Запись $x \mid y$ означает, что число x является делителем числа y.

4. Доказать, что

$$\frac{1}{1\left(\sqrt{1}+\sqrt{3}\right)} + \frac{1}{2\left(\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)} + \frac{1}{3\left(\sqrt{5}+\sqrt{7}\right)} + \ldots + \frac{1}{2026\left(\sqrt{4051}+\sqrt{4053}\right)} < 1.$$

5. В остроугольном треугольнике ABC сторона AB короче стороны AC. Высоты треугольника ABC пересекаются в точке H, а биссектриса внутреннего угла при вершине A пересекает описанную окружность треугольника ABC в точке K ($K \neq A$). На прямой BK выбирается точка X так, что отрезки BC и CX равной длины, а на прямой CK выбирается точка Y так, что отрезки CB и BY равной длины, причём $X \neq B$, $Y \neq C$. Описанные окружности треугольников CKX и BKY пересекаются повторно в точке P ($P \neq K$). Доказать, что прямые AK и HP параллельны.

6. На плоскости размещают 2026 одинаковых квадратных плиток без наложений. Найти наибольшее возможное число пар плиток, имеющих общую сторону.

Open Contest in Mathematics

September 26, 2026 **Juniors**

Working time: 5 hours.
A correct and sufficiently explained solution to each problem is worth 7 points.
Written materials or electronic devices are not permitted.

1. Find all two-digit natural numbers such that adding the number obtained by reversing its digits results in the square of an integer.

2. Johnny starts at the bottom-left corner square of a grid of unit squares. Is it possible for Johnny to move to the top-right corner square while visiting every square of the grid exactly once, if

a) the grid dimensions are 2026×2026;

b) the grid dimensions are 2027×2027?

A single move consists of moving to an adjacent square sharing a common side, and leaving the grid during the process is not allowed.

3. In the calendar we use, the number of days in a year is determined as follows:

1) If the year is not divisible by 4, the year has 365 days.
2) If the year is divisible by 4 but not by 100, the year has 366 days.
3) If the year is divisible by 100 but not by 400, the year has 365 days.
4) If the year is divisible by 400, the year has 366 days.

Find the smallest positive integer n such that, for any date in any year, the exact same date n years later exists and falls on the same day of the week.

4. Find all pairs of positive integers (x, y) such that $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{67}$.

5. Points D and E are chosen on the side BC of triangle ABC such that point D lies between the points B and E. The line perpendicular to the side AB passing through point D intersects the circumcircle of triangle ABD at point K ($K \neq D$). The line perpendicular to the side AC passing through point E intersects the circumcircle of triangle ACE at point L ($L \neq E$). It is given that points K, A, and L are collinear.

a) Find the size of angle BAC.

b) Prove that points K, D, E, and L lie on a circle.

6. 75 children are to be arranged in a circle in an arbitrary order. Of these, 25 choose rock, 25 choose paper, and 25 choose scissors. After being arranged in the circle, all the children simultaneously reveal their choices. A child is considered a winner if they would beat both of their neighbors in the game of "Rock-Paper-Scissors." Find the maximum possible number of winners.

Note. Rock beats scissors, scissors beats paper, and paper beats rock. There are no other winning situations.

Open Contest in Mathematics

September 26, 2026 **Seniors**

Working time: 5 hours.
A correct and sufficiently explained solution to each problem is worth 7 points.
Written materials or electronic devices are not permitted.

1. Find all pairs of integers (a, b) for which there exists a prime number p such that the system of equations is satisfied.

$$\begin{cases} a + b = p \\ a^2 + b^2 = (p-8)(p+4) \end{cases}$$

2. Anna has a euros, Berta has b euros, and Carol has c euros, with a, b, c such that $50 \geqslant a > b > c$ and $a + b + c \geqslant 100$. Simultaneously, Anna gives a% of her money to Berta and a% to Carol, Berta gives b% of her money to Anna and b% to Carol, and Carol gives c% of her money to Anna and c% to Berta. Who has the most money now, and who has the least?

3. Find all (infinite) sequences of positive integers $a_1, a_2, a_3, \ldots$ that satisfy the condition

$$nm \mid a_n - a_m$$

for all positive integers n and m.

Note. The notation $x \mid y$ denotes the statement that the number x is a divisor of the number y.

4. Prove that

$$\frac{1}{1\left(\sqrt{1}+\sqrt{3}\right)} + \frac{1}{2\left(\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)} + \frac{1}{3\left(\sqrt{5}+\sqrt{7}\right)} + \ldots + \frac{1}{2026\left(\sqrt{4051}+\sqrt{4053}\right)} < 1.$$

5. In an acute-angled triangle ABC, side AB is shorter than side AC. Let H be the orthocenter of triangle ABC, and let the angle bisector of the interior angle at vertex A intersect the circumcircle of triangle ABC at point K $(K \neq A)$. A point X is chosen on the line BK such that the segments BC and CX are equal in length, and a point Y is chosen on the line CK such that the segments CB and BY are equal in length, with $X \neq B$ and $Y \neq C$. The circumcircles of triangles CKX and BKY intersect at point P $(P \neq K)$. Prove that the lines AK and HP are parallel.

6. 2026 identical square tiles are placed on a plane without overlapping. Find the maximum possible number of pairs of tiles sharing a full side.

Lahendused

1. *(Artur Avameri)*

Leia kõik kahekohalised naturaalarvud, millele liites numbrite järjekorra ümberpööramisel saadava arvu, on tulemuseks mingi täisarvu ruut.

Vastus: 29, 38, 47, 56, 65, 74, 83, 92.

Lahendus. Olgu otsitava arvu kümneliste number A ja üheliste number B. Siis arv ise on $10A + B$, numbrite järjekorra ümberpööramisel aga tekib arv $10B + A$. Nende arvude liitmisel saame $(10A + B) + (10B + A)$ ehk $11A + 11B$, mille saab esitada korrutisena $11\,(A + B)$. Järelikult jagub see summa 11-ga. Kuna 11 on algarv, siis selleks, et see summa saaks olla täisarvu ruut, peab ka $A + B$ sisaldama tegurit 11. Samas on $A + B$ kindlasti positiivne ja ei ületa arvu $9 + 9$ ehk 18. Seega ainus võimalus on $A + B = 11$, kust leiame võimalused 29, 38, 47, 56, 65, 74, 83 ja 92. Kõik sellised arvud rahuldavad ülesande tingimusi, kuna arvu ja numbrite järjekorra ümberpööramisel saadava arvu summa on alati $11 \cdot 11$ ehk 11^2.

2. *(Lukas Müürsepp)*

Juku asub ruudustiku vasakpoolsel alumisel nurgaruudul. Kas Jukul on võimalik liikuda parempoolsele ülemisele nurgaruudule niimoodi, et ta läbib ruudustiku igat ruutu täpselt ühe korra, kui

a) ruudustiku mõõtmed on 2026×2026;

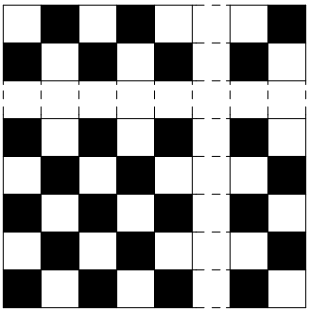
b) ruudustiku mõõtmed on 2027×2027?

Ühe sammuga tohib liikuda ainult naaberruudule üle ühise külje ja vahepeal ruudustikult lahkumine pole lubatud.

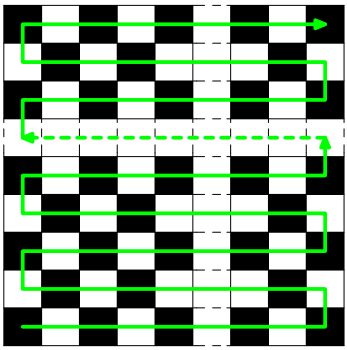
Vastus: a) ei; b) jah.

Lahendus.

a) Värvime ruudustiku malemustris niimoodi, et vasak alumine nurgaruut on must (joonis 1). Siis on ka parem ülemine nurgaruut must. Kõigi ruutude külastamiseks on Jukul vaja teha $2026 \cdot 2026 - 1$ sammu, mis on paaritu arv. Kuna igal sammul vahetub ruudu värv, saab Juku lõpetada vaid valgel ruudul. Seega Jukul pole võimalik kirjeldatud viisil parempoolsele ülemisele nurgaruudule jõuda.



Joonis 1



Joonis 2

b) Liikugu Juku mööda alumist rida paremale kuni parempoolse nurgaruuduni, seejärel mööda järgmist rida vasakule kuni vasakpoolse otsani, siis mööda järgmist rida paremale kuni parempoolse otsani jne (joonis 2). Niimoodi läbib Juku kõigis paaritu numbriga ridades kõik ruudud vasakult paremale ja paarisnumbriga ridades kõik ruudud paremalt vasakule. Kuna ülemine rida on paaritu numbriga, lõpetab Juku parempoolsel ülemisel nurgaruudul nagu vaja.

3. *(Toomas Tennisberg)*

Meil kasutusel olevas kalendris on päevade arv määratud järgmiselt.

1) Kui aastaarv ei jagu 4-ga, siis on aastas 365 päeva.
2) Kui aastaarv jagub 4-ga, kuid mitte 100-ga, siis on aastas 366 päeva.
3) Kui aastaarv jagub 100-ga, kuid mitte 400-ga, siis on aastas 365 päeva.
4) Kui aastaarv jagub 400-ga, siis on aastas 366 päeva.

Leia vähim positiivne täisarv n, mille puhul on kindel, et kui võtta mistahes aasta mistahes kuupäev, siis täpselt sama kuupäev n aastat hiljem on olemas ja langeb samale nädalapäevale.

Vastus: 400.

Lahendus. Olgu n tingimusi rahuldav positiivne täisarv.

Oletame, et n ei jagu 4-ga. Valime suvalise liigaasta a; siis a jagub 4-ga. Samas $a+n$ ei jagu 4-ga, mistõttu $a+n$ pole liigaasta. Seega 29. veebruar on aastas a, kuid mitte aastas $a+n$, vastuolu. Järelikult n peab jaguma 4-ga.

Oletame, et n jagub 4-ga, kuid ei jagu 100-ga. Valime aasta a nii, et $a+n$ jagub 100-ga, kuid mitte 400-ga; siis $a+n$ pole liigaasta. Samas a jagub 4-ga, kuid mitte 100-ga, mistõttu a on liigaasta. Seega 29. veebruar on aastas a, kuid mitte aastas $a+n$, vastuolu. Järelikult n peab jaguma 100-ga.

Oletame viimaks, et n jagub 100-ga, kuid ei jagu 400-ga. Valime aasta a, mis jagub 400-ga; siis a on liigaasta. Samas $a+n$ jagub 100-ga, kuid mitte 400-ga, mistõttu $a+n$ pole liigaasta. Seega 29. veebruar on aastas a, kuid mitte aastas $a+n$, vastuolu. Järelikult n peab jaguma 400-ga.

Näitame, et vähim 400-ga jaguv positiivne täisarv ehk 400 rahuldab tingimusi. Esiteks märkame, et mistahes aasta a korral annavad arvud a ja $a+400$ sama jäägi jagamisel nii 4-ga, 100-ga kui ka 400-ga. Seega kas a ja $a+400$ on mõlemad liigaastad või pole neist kumbki liigaasta. Teiseks leiame, et liigaastaid on 400 aasta kestel $\frac{400}{4}-\frac{400}{100}+\frac{400}{400}$ ehk 97. Seega on 400 aastas kokku $400\cdot 365+97$ ehk 146097 päeva. Kuna see arv jagub 7-ga, on 400 aastas täisarv nädalaid. Seega langeb sama kuupäev 400 aastat hiljem alati samale nädalapäevale.

4. *(Lukas Müürsepp)*

Leia kõik sellised positiivsete täisarvude paarid (x,y), et $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{67}$.

Vastus: $(68,4556)$, $(134,134)$, $(4556,68)$.

Lahendus 1. Korrutades antud võrrandi pooled suurusega $67xy$, saame pärast liikmete viimist ühele poole ja sobivat ümberjärjestamist võrrandi

$$xy-67x-67y=0.$$

Liites veel mõlemale poole 67^2, saame võrrandi $xy-67x-67y+67^2=67^2$, mille vasaku poole tegurdamisel tekib võrrand

$$(x-67)(y-67)=67^2.$$

Kuna 67 on algarv, siis 67^2 ainsad positiivsed tegurid on 1, 67 ja 67^2. Siit leiame arvu 67^2 kuus esitust kahe täisarvu korrutisena: $1\cdot 67^2$, $67\cdot 67$ ja $67^2\cdot 1$ ning $(-1)\cdot\left(-67^2\right)$, $(-67)\cdot(-67)$ ja $\left(-67^2\right)\cdot(-1)$. Kolmes viimases esituses on igaühes vähemalt üks tegur -67 või väiksem, aga kui $x-67\leqslant -67$ või $y-67\leqslant -67$, siis vastavalt $x\leqslant 0$ või $y\leqslant 0$, mis on vastuolus ülesande tingimusega. Seega jäävad sõelale kolm esimest esitust, kus mõlemad tegurid on positiivsed. Vaatame need kolm juhtu ükshaaval läbi:

- kui $x-67=1$ ja $y-67=67^2$, siis $x=1+67=68$ ja $y=67^2+67=4556$;
- kui $x-67=y-67=67$, siis $x=y=67+67=134$;
- kui $x-67=67^2$ ja $y-67=1$, siis $x=67^2+67=4556$ ja $y=1+67=68$.

Lahendus 2. Olgu $x=ad$, $y=bd$, kus $d=\mathrm{SÜT}(x,y)$. Siis a ja b on ühistegurita. Asendades antud võrrandisse, saame $\frac{1}{ad}+\frac{1}{bd}=\frac{1}{67}$. Korrutades mõlemad pooled arvuga $67abd$, saame $67a+67b=abd$ ehk

$$67\,(a+b)=abd. \tag{1}$$

Seega a ja b on mõlemad arvu $67\,(a+b)$ tegurid. Aga kuna arv a on ühistegurita arvuga b, siis on arv a ühistegurita ka arvuga $a+b$. Samamoodi näeme, et arv b on ühistegurita arvuga $a+b$. Seega peavad arvud a ja b olema arvu 67 tegurid. Kuna 67 on algarv, siis kas $a=b=1$ või a ja b on 1 ja 67 emmas-kummas järjestuses. Vaatame kõik kolm juhtu läbi:

- Kui $a=b=1$, siis võrdusest (1) saame $d=67\cdot 2=134$. Seega $x=134$ ja $y=134$.
- Kui $a=1$ ja $b=67$, siis võrdusest (1) saame $67d=67\cdot 68$, mis annab $d=68$. Seega $x=68$ ja $y=67\cdot 68=4556$.
- Juht, kus $a=67$ ja $b=1$, on eelmisega sümmeetriline ja annab $x=4556$, $y=68$.

Kokkuvõttes sobivad parajasti paarid $(134,134)$, $(68,4556)$ ja $(4556,68)$.

Lahendus 3. Antud võrrandist saame $\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{67}-\dfrac{1}{x}=\dfrac{x-67}{67x}$, kust omakorda

$$y(x-67)=67x. \tag{2}$$

Saadud võrrandi parem pool $67x$ jagub 67-ga. Seega ka vasak pool $y(x-67)$ jagub 67-ga. Kuna aga 67 on algarv, siis järeldub sellest, et kas y või $x-67$ jagub 67-ga. Kui arv $x-67$ jagub 67-ga, siis ka arv x jagub 67-ga. Järelikult x või y jagub 67-ga. Kuna algne võrrand on x ja y suhtes sümmeetriline, võime üldisust kitsendamata eeldada, et x jagub 67-ga ehk $x=67x'$, kus x' on mingi positiivne täisarv. Asendades selle võrrandisse (2), saame $y\left(67x'-67\right)=67\cdot 67x'$, milles poolte läbijagamine 67-ga annab

$$y\left(x'-1\right)=67x'. \tag{3}$$

Võrrand (3) näitab, et arv $67x'$ jagub arvuga $x'-1$. Kuna aga arvud x' ja $x'-1$ on ühistegurita, siis peab arvuga $x'-1$ jaguma 67. Algarvulisuse tõttu on vaid kaks võimalust, kas $x'-1=1$ või $x'-1=67$, arvestades, et arvu x' positiivsuse tõttu ei saa arv $x'-1$ olla negatiivne. Kui $x'-1=1$, siis $x'=2$, kust $x=2\cdot 67=134$. Võrrandist (2) saame $y\cdot 67=67\cdot 134$, kust $y=134$. Kui $x'-1=67$, siis $x'=68$, kust $x=68\cdot 67=4556$. Võrrandist (2) saame $y\cdot 67^2=67^2\cdot 68$ ehk $y=68$. Lisaks leitud lahenditele on veel ka sümmeetriline lahend $x=68$, $y=4556$.

5. *(Aleksei Ganyukov, Kirill Tselovalnikov)*

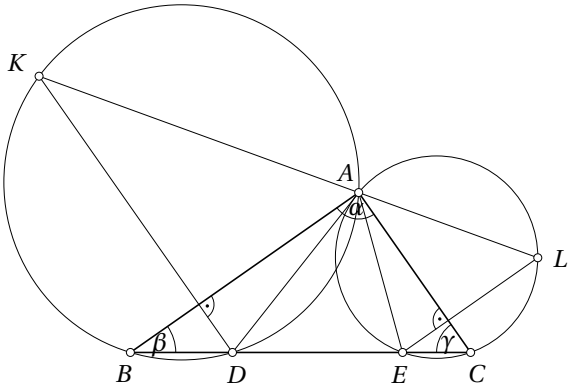
Punktid D ja E valitakse kolmnurga ABC küljel BC nii, et punkt D asub punktide B ja E vahel. Sirge, mis on risti küljega AB ja läbib punkti D, lõikab kolmnurga ABD ümberringjoont punktis K, $K\neq D$. Sirge, mis on risti küljega AC ja läbib punkti E, lõikab kolmnurga ACE ümberringjoont punktis L, $L\neq E$. On teada, et punktid K, A ja L asuvad ühel sirgel.

a) Leia nurga BAC suurus.

b) Tõesta, et punktid K, D, E ja L asuvad ühel ringjoonel.

Lahendus. Tähistame $\angle BAC = \alpha$, $\angle CBA = \beta$ ja $\angle ACB = \gamma$ (joonis 3). Kolmnurga ABD ümberringjoone kaarele AD toetuvatest piirdenurkadest saame $\angle DKA = \angle DBA = \angle CBA = \beta$. Kuna $KD \perp AB$, siis seega $\angle KAB = 90^\circ - \angle DKA = 90^\circ - \beta$. Analoogselt saame $\angle ALE = \gamma$ ja $\angle CAL = 90^\circ - \gamma$.

Kui punktid K, A ja L on ühel sirgel, siis $\angle KAB + \angle BAC + \angle CAL = 180^\circ$ ehk $(90^\circ - \beta) + \alpha + (90^\circ - \gamma) = 180^\circ$, kust $\alpha = \beta + \gamma$. Kolmnurga ABC sisenurkade summast aga $\alpha = 180^\circ - (\beta + \gamma)$. Järelikult $\beta + \gamma = 180^\circ - (\beta + \gamma)$, kust $\beta + \gamma = 90^\circ$.



Joonis 3

a) Eelneva põhjal saame $\alpha = 180^\circ - (\beta + \gamma) = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$.

b) Kasutades kolmnurga ABD ümberringjoone kaarele KB toetuvaid piirdenurki, saame

$$\angle EDK = 180^\circ - \angle KDB = 180^\circ - \angle KAB = 180^\circ - (90^\circ - \beta) = 90^\circ + \beta.$$

Kasutades aga punktide K, A ja L asendit ühel sirgel, saame

$$\angle KLE = \angle ALE = \gamma.$$

Kokkuvõttes $\angle EDK + \angle KLE = 90^\circ + \beta + \gamma = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$, mis tähendabki, et punktid K, D, E ja L on ühel ringjoonel.

6. *(Andres Alumets)*

Ringjoonele tuleb paigutada vabalt valitud järjestuses 75 last. Neist 25 valivad kivi, 25 paberi ja 25 käärid. Pärast ringjoonele paigutamist näitavad kõik lapsed korraga oma valikut. Laps loetakse võitjaks, kui ta võidaks mängus „Kivi-käärid-paber“ mõlemat oma naabrit ringjoonel. Leia suurim võimalik võitjate arv.

Märkus. Kivi võidab käärid, käärid võidavad paberi ja paber võidab kivi. Rohkem võiduolukordi pole.

Vastus: 36.

Lahendus 1. Igast kahest kõrvuti paiknevast lapsest saab ülimalt üks olla võitja. Kui leiduks 37 võitjat, siis peaks leiduma ka 37 kaotajat, kes paiknevad ringjoonel võitjate vahel, kus *kaotajaks* nimetame last, kes pole võitja ehk kes vähemalt üht oma naabritest ei võida. Kuna $75 - 37 - 37 = 1$, siis ülimalt ühes kohas saaks olla kaks kaotajat järjest. Järelikult peaks leiduma järgnevus 37 võitjast vaheldumisi 36 kaotajaga. Kuna iga valik võidab täpselt üht valikut ja kaotab samuti täpselt ühele, siis peaks kõigil võitjatel olema sama valik ja ka kõigil kaotajatel sama valik. See aga ei klapi ülesandes antud arvudega. Seega peab suurim võimalik võitjate arv olema väiksem kui 37.

Näitame, et 36 võitjat on võimalik. Selleks paigutame lapsed ringjoonele kolmes 25-liikmelises rühmas: ühes valitakse vaheldumisi 13 paberit ja 12 kääri, teises vaheldumisi 13 kääri ja 12 kivi ning kolmandas vaheldumisi 13 kivi ja 12 paberit. Igas rühmas on konstruktsiooni põhjal võitjad need 12 last, kelle valik on rühmas vähemuses. Seega on kokku $3 \cdot 12$ ehk 36 võitjat.

Lahendus 2. Tähistagu O_+, I_+ ja X_+ vastavalt kivi, paberi ja käärid valinud laste arvu, kes võitsid mõlemat oma naabrit. Sarnaselt tähistagu O_-, I_- ja X_- vastavalt kivi, paberi või käärid valinud laste arvu, kes vähemalt üht oma naabrit ei võitnud. Kuna iga valikut tegi 25 last, siis kehtivad võrdused

$$\begin{aligned} O_+ + O_- &= 25, \\ I_+ + I_- &= 25, \\ X_+ + X_- &= 25. \end{aligned} \tag{4}$$

Otsime seost I_+ ja O_- vahel. Kui vaatame kõiki paberi valinud lapsi, kes võitsid oma mängud, siis koos oma naabritega moodustavad nad mingi arvu järjendeid lastest, kes valisid vaheldumisi kivi ja paberi, kusjuures igas järjendis on kivi valinud lapsi 1 võrra rohkem kui paberi valinud lapsi. Järelikult kehtib võrratus $I_+ + n \leqslant O_-$, kus n on jutuks olnud järjendite arv. Kui $I_+ > 0$, siis $n \geqslant 1$, mistõttu kehtib võrratus $I_+ + 1 \leqslant O_-$.

Analoogselt näeme, et juhul $X_+ > 0$ kehtib võrratus $X_+ + 1 \leqslant I_-$ ja juhul $O_+ > 0$ kehtib võrratus $O_+ + 1 \leqslant X_-$. Kui nüüd oletada, et näiteks $I_+ = 25$, siis saaksime $O_- \geqslant 26$, mis on vastuolus ülesande tingimustega. Seega $I_+ < 25$ ning analoogselt $X_+ < 25$ ja $O_+ < 25$. Võrdustest (4) järeldub nüüd $I_- > 0$, $X_- > 0$ ja $O_- > 0$. See aga näitab, et võrratused $I_+ + 1 \leqslant O_-$, $X_+ + 1 \leqslant I_-$ ja $O_+ + 1 \leqslant X_-$ kehtivad ka juhul, kui mõni arvudest I_+, X_+ ja O_+ on null. Liites need kolm võrratust ja kasutades võrdusi (4), saame

$$\begin{aligned} O_+ + I_+ + X_+ + 3 \leqslant O_- + I_- + X_- &= (25 - O_+) + (25 - I_+) + (25 - X_+) = \\ &= 75 - (O_+ + I_+ + X_+)\,, \end{aligned}$$

kust $2\,(O_+ + I_+ + X_+) \leqslant 75 - 3 = 72$ ja siit omakorda $O_+ + I_+ + X_+ \leqslant 36$. Seega võitjaid saab olla ülimalt 36.

Seda, et 36 võitjat on võimalik, näitame nagu lahenduses 1.

Lahendused

1. *(Birgit Veldi)*

Leia kõik täisarvude paarid (a, b), mille korral leidub selline algarv p, et on rahuldatud võrrandisüsteem

$$\begin{cases} a + b = p, \\ a^2 + b^2 = (p-8)(p+4). \end{cases}$$

Vastus: $(6,7)$, $(7,6)$.

Lahendus 1. Asendades p esimesest võrrandist teise, saame

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &= (a+b-8)(a+b+4) = \\ &= a^2 + ab + 4a + ab + b^2 + 4b - 8a - 8b - 32 = \\ &= a^2 + 2ab - 4a + b^2 - 4b - 32. \end{aligned}$$

Koondades sarnased liikmed ja jagades võrrandi pooled 2-ga, saame siit $ab-2a-2b-16=0$. Liites mõlemale poole 20, saame $ab-2a-2b+4=20$, mis vasaku poole tegurdamisel omandab kuju

$$(a-2)(b-2) = 20.$$

Arvu 20 esitused kahe täisarvu korrutisena on $1\cdot 20$, $2\cdot 10$ ja $4\cdot 5$, samad korrutised teguritega vastupidises järjestuses ning kõik need korrutised miinusmärgiga tegurite ees. Kuna algse süsteemi esimese võrrandi põhjal on $a+b$ algarv, mis on positiivne, siis vähemalt üks arvudest a ja b peab olema positiivne. Seega saavad tegurid $a-2$ ja $b-2$ olla negatiivsed vaid tingimusel, et üks neist teguritest on -1 ja teine järelikult -20. Siis aga peaksid a ja b olema -18 ja 1, mille summa pole positiivne. Seega võib eeldada, et $a-2$ ja $b-2$ on positiivsed. Järgnevast tabelis vaatame läbi kõik võimalused:

$a-2$	1	2	4	5	10	20
$b-2$	20	10	5	4	2	1
$a+b$	25	16	13	13	16	25

Näeme, et $a+b$ on algarv ainult juhul $a-2=4, b-2=5$ ja juhul $a-2=5, b-2=4$ ehk kui $a=6, b=7$ ja kui $a=7, b=6$.

Lahendus 2. Kuna teise võrrandi vasak pool a^2+b^2 on mittenegatiivne, peab mittenegatiivne olema ka parem pool $(p-8)(p+4)$. Kuna p on algarv ja seetõttu positiivne, on ka tegur $p+4$ positiivne, mistõttu mittenegatiivse korrutise saamiseks peab teine tegur $p-8$ olema mittenegatiivne ehk $p \geqslant 8$. Algarvulisuse tõttu $p \geqslant 11$.

Tõstes süsteemi esimese võrrandi pooled ruutu, saame $a^2+2ab+b^2=p^2$. Sellest võrrandist algse süsteemi teise võrrandi lahutamine annab meile $2ab = p^2-\left(p-8\right)\left(p-4\right) = 4p+32$, kust

$$ab = 2p+16. \tag{5}$$

Kuna algne võrrandisüsteem on a ja b suhtes sümmeetriline, saame üldisust kitsendamata eeldada, et $a \leqslant b$. Siis $b \geqslant \dfrac{a+b}{2}$, mis algse süsteemi esimese võrrandi valguses annab $b \geqslant \dfrac{1}{2}p$. Kui oletada lisaks, et $a \geqslant 7$, saaksime $ab \geqslant 7 \cdot \dfrac{1}{2}p = \dfrac{7}{2}p$. Võrduse (5) tõttu tekib niisiis p suhtes võrratus $2p+16 \geqslant \dfrac{7}{2}p$, kust $\dfrac{3}{2}p \leqslant 16$ ja $p \leqslant \dfrac{32}{3} < 11$, vastuolu. Seega $a \leqslant 6$ ning kuna b peab olema positiivne ja võrduse (5) parem pool on positiivne, siis ka a peab olema positiivne.

Asendades p esialgse süsteemi esimesest võrrandist võrdusse (5), saame $ab = 2\left(a+b\right)+16 = 2a+2b+16$, kust

$$\left(a-2\right)b = 2a+16. \tag{6}$$

Kuna b on positiivne ja a positiivsuse tõttu ka $2a+16$ on positiivne, siis ka $a-2$ on positiivne ehk $a \geqslant 3$. Vaatame läbi kõik sõelale jäänud võimalused, leides b võrdusest (6) ja p esialgse süsteemi esimesest võrrandist:

a	3	4	5	6
b	22	12	$\frac{26}{3}$	7
p	25	16	$\frac{41}{3}$	13

Näeme, et p on algarv ainult juhul $a=6, b=7$. Seega tingimusele $a \leqslant b$ vastab ainsana lahend $(6,7)$. Sümmeetria tõttu sobib lahendiks ka $(7,6)$.

Lahendus 3. Esimesest võrrandist saame $b = p-a$. Asendades selle teise võrrandisse, saame $a^2+\left(p-a\right)^2 = \left(p-8\right)\left(p+4\right)$, kust pärast sulgude avamist, sarnaste liikmete koondamist ja poolte jagamist 2-ga jääb järele $a^2-ap = -2p-16$. Viies liikmed, milles esineb tegur p, paremale ja ülejäänud vasakule, saame pärast tegurdamist

$$a^2+16 = \left(a-2\right)p. \tag{7}$$

Kuna a^2 on mittenegatiivne ja 16 positiivne, on võrduse (7) vasak pool positiivne. Seega on positiivne ka parem pool, mis $p > 0$ tõttu annab $a - 2 > 0$. Nagu lahenduses 1 saame võrduse (7) ja järeldame, et $a - 2 > 0$.

Kuna algne võrrandisüsteem on a ja b suhtes sümmeetriline, saame üldisust kitsendamata eeldada, et $a \leqslant b$. Siis algse süsteemi esimese võrrandi põhjal $2a \leqslant p$. Võrdusest (7) saame nüüd $a^2 + 16 \geqslant (a-2) \cdot 2a$ ehk

$$a^2 - 4a - 16 \leqslant 0.$$

Ruutvõrrand $a^2 - 4a - 16 = 0$ annab lahenditeks $a = 2 \pm \sqrt{20}$, seega nendes punktides muudab võrratus märki. Kuna nende vahel (näiteks kohal $a = 0$) võrratus kehtib, siis piisab kontrollida täisarve $a < 2 + \sqrt{20} < 7$, kusjuures eelnevast juba teame, et $a > 2$. Vaatame läbi kõik sõelale jäänud juhud ja avaldame p seosest (7):

a	3	4	5	6
p	25	16	$\frac{41}{3}$	13

Näeme, et p on algarv ainult juhul $a = 6$ ja $b = 13 - 6 - 7$. Seega tingimusele $a \leqslant b$ vastab ainsana lahend $(6, 7)$. Sümmeetria tõttu sobib lahendiks ka $(7, 6)$.

Lahendus 4. Nagu lahenduses 3 saame võrduse $a^2 - ap = -2p - 16$. Viies kõik liikmed vasakule, saame a suhtes ruutvõrrandi

$$a^2 - pa + \big(2p + 16\big) = 0. \tag{8}$$

Selle ruutvõrrandi diskriminant on $p^2 - 4\big(2p + 16\big)$ ehk $p^2 - 8p - 64$. Kuna lahendid peavad olema täisarvud, peab diskriminant olema täisruut. Seega

$$p^2 - 8p - 64 = t^2 \tag{9}$$

mingi täisarvu t korral. Liidame võrduse (9) mõlemale poole 80; saame $p^2 - 8p + 16 = t^2 + 80$ ehk $\big(p - 4\big)^2 = t^2 + 80$. Viies t^2 vasakule, saame pärast tegurdamist

$$(p - 4 - t)(p - 4 + t) = 80.$$

Jääb üle kontrollida arvu 80 tegurdusi. Sümmeetria tõttu võime üldistust kitsendamata eeldada, et $t \geqslant 0$. Kuna algse süsteemi teise võrrandi põhjal $p \geqslant 8$, siis $p - 4 \geqslant 4$, mistõttu piisab kontrollida arvu 80 positiivseid tegureid. Samuti märkame, et $p - 4 - t$ ja $p - 4 + t$ peavad olema ühe ja sama paarsusega, aga kuna paaritute arvude korrutis ei saa olla paarisarv 80, piisab uurida paaris tegureid. Tabel esitab kõik võimalused:

$p - 4 - t$	2	4	8
$p - 4 + t$	40	20	10
t	19	8	1
p	25	16	13

Arv p tuleb algarv ainult siis, kui tegurid on 8 ja 10; siis $t = 1$ ja $p = 13$. Asendades $p = 13$ võrrandisse (8), saame $a^2 - 13a + 42 = 0$, mille lahendid on $a = 6$ ja $a = 7$. Vastavalt saame $b = 7$ ja $b = 6$.

Märkus. Selle asemel, et eraldada täisruut $(p-4)^2$, võib lahenduses 4 vaadata võrdust (9) omakorda ruutvõrrandina p suhtes. Taas peab diskriminant olema täisruut, kust saame, et $64 + 4\left(t^2 + 64\right) = s^2$ ehk $\left(\frac{s}{2}\right)^2 = t^2 + 80$ ehk $\left(\frac{s}{2} - t\right)\left(\frac{s}{2} + t\right) = 80$. Vaadates analoogiliselt lahenduse 4 lõpuosaga läbi arvu 80 tegurdused, kus $p-4$ asemel on $\frac{s}{2}$, saame variandid $t = 19$, $t = 8$ ja $t = 1$. Asendades need võrrandisse (9), saame negatiivseid lahendeid kõrvale jättes vastavalt $p = 25$, $p = 16$ ja $p = 13$. Jätkame nagu lahenduses 4.

2. *(Hendrik Vija, Härmel Nestra)*

Annal on a, Bertal b ja Carolil c eurot, kusjuures $50 \geqslant a > b > c$ ja $a + b + c \geqslant 100$. Üheaegselt annab Anna a% enda rahast Bertale ja a% Carolile, Berta b% enda rahast Annale ja b% Carolile ning Carol c% enda rahast Annale ja c% Bertale. Kellel on nüüd kõige rohkem ja kellel kõige vähem raha?

Vastus: kõige rohkem Carolil, kõige vähem Annal.

Lahendus 1. Anna annab ära $\frac{2a}{100} \cdot a$ eurot ning saab Bertalt $\frac{b}{100} \cdot b$ eurot ja Carolilt $\frac{c}{100} \cdot c$ eurot. Kokku on tal lõpuks seega $a - \frac{2a^2}{100} + \frac{b^2}{100} + \frac{c^2}{100}$ ehk $\frac{\left(a^2+b^2+c^2\right) - \left(3a^2 - 100a\right)}{100}$ eurot. Analoogselt näeme, et Bertal on lõpuks $\frac{\left(a^2+b^2+c^2\right) - \left(3b^2 - 100b\right)}{100}$ ja Carolil $\frac{\left(a^2+b^2+c^2\right) - \left(3c^2 - 100c\right)}{100}$ eurot.

Ülesande lahendamiseks piisab nüüd uurida arvude $3a^2 - 100a$, $3b^2 - 100b$ ja $3c^2 - 100c$ omavahelist suurusvahekorda, sest ülejäänud osa Anna, Berta ja Caroli varanduslikku seisu näitavast avaldisest on neil sama. Arvude $3a^2 - 100a$ ja $3b^2 - 100b$ suurusvahekord on sama nagu arvudel $3a^2 - 3b^2$ ja $100a - 100b$, ehk teisiti väljendudes arvudel $3(a-b)(a+b)$ ja $100(a-b)$. Kuna $a > b$, on nende arvude suurusvahekord sama mis arvudel $3(a+b)$ ja 100. Eeldustest $50 \geqslant a > b > c$ ja $a+b+c \geqslant 100$ aga tuleneb $a+b \geqslant 50$. Seega $3(a+b) \geqslant 150 > 100$, mis eelneva põhjal näitab, et $3a^2 - 100a > 3b^2 - 100b$. Analoogselt leiame, et $3b^2 - 100b > 3c^2 - 100c$. Järelikult

$$\frac{\left(a^2+b^2+c^2\right) - \left(3a^2 - 100a\right)}{100} < \frac{\left(a^2+b^2+c^2\right) - \left(3b^2 - 100b\right)}{100} < \\ < \frac{\left(a^2+b^2+c^2\right) - \left(3c^2 - 100c\right)}{100},$$

millest tulenevalt on lõpus kõige rohkem raha Carolil ja kõige vähem Annal.

Märkus 1. Võib tunduda ahvatlev võrreldavad arvud $3a^2-100a$, $3b^2-100b$ ja $3c^2-100c$ tegurdada kujule $a(3a-100)$, $b(3b-100)$ ja $c(3c-100)$ ning sellest, et $a>b>c$, järeldada $3a-100>3b-100>3c-100$ ja ühtlasi $a(3a-100)>b(3b-100)>c(3c-100)$. Viimane samm on aga korrektne ainult juhul, kui $3a-100$, $3b-100$ ja $3c-100$ on positiivsed. Ülesande tingimused siiski nende arvude positiivsust ei taga. Näiteks võib algul olla Annal 35, Bertal 33 ja Carolil 32 eurot, siis on nii $3b-100$ kui ka $3c-100$ negatiivsed.

Kui ülesande tekstis puuduks tingimus $a+b+c\geqslant 100$, siis saaks tekkida ka teisi järjestusi. Olgu näiteks $b=20$ ja $c=10$ (a võib valida suvaliselt nii, et ülesande muud tingimused kehtiksid). Siis $b(3b-100)=20\cdot(-40)=-800$ ja $c(3c-100)=10\cdot(-70)=-700$ ehk $b(3b-100)<c(3c-100)$, olgugi et $b>c$.

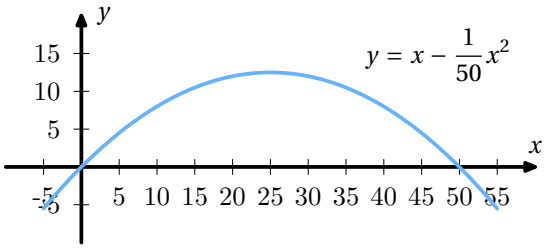
Märkus 2. Lahenduse 1 esimeses lõigus kasutati Anna varanduslikku seisu väljendava murru teisendamiseks trikki liita ja lahutada lugejas a^2 (Berta ja Caroli puhul vastavalt b^2 ja c^2). Selle mõte oli järgnevaid võrdlusi lihtsustada, eraldades kõigi murdude lugejates ühise osa $a^2+b^2+c^2$. Ülesande lahendamiseks seda trikki tingimata vaja kasutada ei ole, selle asemel saab Anna, Berta ja Caroli uued eurode arvud kohe omavahel kõrvutada ja lihtsustada avaldised võrdluste käigus.

Lahendus 2. Anna annab ära $\dfrac{2a}{100}\cdot a$ eurot, seega peale raha ära andmist (aga enne teistelt raha vastuvõtmist) on tal alles $a-\dfrac{2a}{100}\cdot a$ ehk $a-\dfrac{1}{50}a^2$ eurot. Analoogselt on Bertal peale raha ära andmist alles $b-\dfrac{1}{50}b^2$ eurot ja Carolil $c-\dfrac{1}{50}c^2$ eurot. Näitame, et Carolil on siis raha kõige rohkem ning Annal kõige vähem (kusjuures võib kehtida ka võrdus). Selleks piisab näidata, et

$$c-\frac{1}{50}c^2\geqslant b-\frac{1}{50}b^2\geqslant a-\frac{1}{50}a^2.$$

Uurime selleks funktsiooni $y=x-\dfrac{1}{50}x^2$. See on ruutfunktsioon maksimumiga kohal $x=-\dfrac{1}{-\frac{1}{50}\cdot 2}=25$, tema graafik on sirge $x=25$ suhtes sümmeetriline parabool (joonis 4). See tähendab, et $x-\dfrac{1}{50}x^2$ on seda suurem, mida väiksem on $|x-25|$. Järelikult piisab näidata, et

$$|a-25|\geqslant|b-25|\geqslant|c-25|.$$



Joonis 4

Paneme tähele, et $100 \leqslant a+b+c < 3a$, kust $a > \dfrac{100}{3} > 25$. Samuti paneme tähele, et $b > 25$, kuna vastasel juhul $b+c < 25+25 = 50$, mis koos tingimusega $a \leqslant 50$ annab $100 \leqslant a+b+c < 50+50 = 100$, vastuolu. Seega jäävad käsitleda kaks juhtu: $a > b > c \geqslant 25$ ja $a > b > 25 > c$.

- Kui $a > b > c \geqslant 25$, siis $|a-25| > |b-25| > |c-25|$, nagu soovitud.
- Kui $a > b > 25 > c$, siis $b+c \geqslant 100-a \geqslant 50$, kust $b-25 \geqslant 25-c > 0$. Seega $|a-25| > |b-25| \geqslant |c-25|$, nagu soovitud.

Anna, Berta ja Carol saavad ülejäänud kahelt vastavalt $\dfrac{b^2}{100}+\dfrac{c^2}{100}$, $\dfrac{a^2}{100}+\dfrac{c^2}{100}$ ja $\dfrac{a^2}{100}+\dfrac{b^2}{100}$ eurot. Kuna $a > b > c$, siis $\dfrac{b^2}{100}+\dfrac{c^2}{100} < \dfrac{a^2}{100}+\dfrac{c^2}{100} < \dfrac{a^2}{100}+\dfrac{b^2}{100}$. Seega saab Carol ülejäänud kahelt kõige rohkem raha ning Anna kõige vähem. Seega on ka pärast teistelt raha vastuvõtmist Carolil seda kõige rohkem ja Annal kõige vähem.

3. *(Kirill Tselovalnikov)*

Leia kõik positiivsete täisarvude (lõpmatud) jadad $a_1, a_2, a_3, \ldots$, mis rahuldavad tingimust

$$nm \mid a_n - a_m$$

kõigi positiivsete täisarvude n ja m korral.

Märkus. Kirjutis $x \mid y$ tähistab väidet, et arv x on arvu y tegur.

Vastus: kõik konstantsed jadad.

Lahendus 1. Näitame, et rahuldamaks antud jaguvustingimust, peab jada olema konstantne. Selleks võtame suvalised positiivsed täisarvud n ja m ning näitame, et $a_n = a_m$ ehk $a_n - a_m = 0$. Selleks on omakorda piisav näidata, et $a_n - a_m$ jagub iga positiivse täisarvuga, sest nullist erinevad täisarvud ei saa jaguda lõpmata paljude täisarvudega.

Olgu niisiis s suvaline positiivne täisarv ja näitame, et $s \mid a_n - a_m$. Võttes ülesande tingimuses $m = s$, saame $ns \mid a_n - a_s$, millest omakorda järeldub

$$s \mid a_n - a_s. \tag{10}$$

Võttes aga ülesande tingimuses $n = s$, saame $sm \mid a_s - a_m$, millest järeldub

$$s \mid a_s - a_m. \tag{11}$$

Liites seosed (10) ja (11), saame

$$s \mid a_n - a_m,$$

mida oligi vaja.

Teisalt on lihtne kontrollida, et kõik konstantsed jadad tõepoolest rahuldavad antud seost.

Lahendus 2. Pannes antud jaguvustingimuses n asemele a_n, saame

$$a_n m \mid a_{a_n} - a_m,$$

millest omakorda järeldub, et

$$a_n \mid a_{a_n} - a_m \tag{12}$$

kõigi positiivsete täisarvude n ja m korral. Pannes seoses (12) m asemele n, saame $a_n \mid a_{a_n} - a_n$. Kuna $a_n \mid a_n$, siis järeldub sellest

$$a_n \mid a_{a_n} \tag{13}$$

iga positiivse täisarvu n korral. Seosed (12) ja (13) koos aga annavad

$$a_n \mid a_m$$

kõigi positiivsete täisarvude n ja m korral. Seega jada kõik liikmed jaguvad vastastikku üksteisega. Kuna need väärtused on positiivsed täisarvud, siis jada on konstantne ehk leidub selline positiivne täisarv c, et

$$a_n = c$$

iga positiivse täisarvu n korral. On lihtne veenduda, et kõik konstantsed jadad tõepoolest rahuldavad antud seost.

Lahendus 3. Võttes antud jaguvustingimuses $m = 1$, saame $n \mid a_n - a_1$. Seega iga positiivse täisarvu n korral leidub selline täisarv k_n, et $k_n \cdot n = a_n - a_1$ ehk

$$a_n = k_n \cdot n + a_1. \tag{14}$$

Fikseerime nüüd suvalise positiivse täisarvu n ning olgu m suvaline positiivne täisarv, mis rahuldab tingimust $\text{SÜT}(n, m) = 1$. Algsest jaguvusest ja võrdusest (14) järeldub, et

$$nm \mid (k_n \cdot n + a_1) - (k_m \cdot m + a_1) = k_n \cdot n - k_m \cdot m.$$

Seega ka $m \mid k_n \cdot n - k_m \cdot m$ ja kuna $m \mid k_m \cdot m$, siis saame siit $m \mid k_n \cdot n$. Lisaks aga kehtib SÜT$(n, m) = 1$, mistõttu saab viimane jaguvus kehtida vaid juhul, kui $m \mid k_n$. Niisiis oleme näidanud, et arv k_n jagub iga positiivse täisarvuga m, mis on arvuga n ühistegurita. Kuna selliseid arve m on lõpmata palju, on ainus võimalus $k_n = 0$. See kehtib iga positiivse täisarvu n korral. Kokkuvõttes oleme näidanud, et iga jada liige avaldub kujul $a_n = 0 \cdot n + a_1 = a_1$ ehk vaadeldav jada peab olema konstantne.

Teisalt on lihtne kontrollida, et kõik konstantsed jadad tõepoolest rahuldavad antud seost.

4. *(Artur Bentsa)*

Tõesta, et

$$\frac{1}{1\left(\sqrt{1}+\sqrt{3}\right)}+\frac{1}{2\left(\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)}+\frac{1}{3\left(\sqrt{5}+\sqrt{7}\right)}+\ldots+\frac{1}{2026\left(\sqrt{4051}+\sqrt{4053}\right)}<1.$$

Lahendus 1. Teisendame igat liidetavat eraldi. Nimetaja vabastamisega irratsionaalsusest saame

$$\begin{aligned}\frac{1}{n\left(\sqrt{2n-1}+\sqrt{2n+1}\right)} &= \frac{\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n-1}}{n\left(\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n-1}\right)\left(\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n-1}\right)} = \\ &= \frac{\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n-1}}{n\left((2n+1)-(2n-1)\right)} = \\ &= \frac{\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n-1}}{2n}.\end{aligned}$$

Nüüd paneme tähele, et

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n-1}}{2n} &= \frac{\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n-1}}{\sqrt{4n^2}} < \\ &< \frac{\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n-1}}{\sqrt{4n^2-1}} = \\ &= \frac{\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n-1}}{\sqrt{2n+1}\cdot\sqrt{2n-1}} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2n-1}}-\frac{1}{\sqrt{2n+1}}.\end{aligned}$$

Järelikult

$$\begin{aligned}&\frac{1}{1\left(\sqrt{1}+\sqrt{3}\right)}+\frac{1}{2\left(\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)}+\frac{1}{3\left(\sqrt{5}+\sqrt{7}\right)}+\ldots+\frac{1}{2026\left(\sqrt{4051}+\sqrt{4053}\right)}< \\ &< \left(\frac{1}{\sqrt{1}}-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{5}}-\frac{1}{\sqrt{7}}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{\sqrt{4051}}-\frac{1}{\sqrt{4053}}\right)= \\ &= \frac{1}{\sqrt{1}}-\frac{1}{\sqrt{4053}}=1-\frac{1}{\sqrt{4053}}<1.\end{aligned}$$

Lahendus 2. Iga positiivse täisarvu n korral $4n^2-1 \geqslant 3n^2$, sest $n^2 \geqslant 1$. Järelikult

$$\begin{aligned}\left(\sqrt{2n-1}+\sqrt{2n+1}\right)^2 &= (2n-1)+2\sqrt{2n-1}\sqrt{2n+1}+(2n+1) = \\ &= 4n+2\sqrt{4n^2-1} \geqslant \\ &\geqslant 4n+2\sqrt{3n^2} = \\ &= 4n+2\sqrt{3}n = \left(4+2\sqrt{3}\right)n = \left(1+\sqrt{3}\right)^2 n,\end{aligned}$$

millest pooliti juurides saame

$$\sqrt{2n-1}+\sqrt{2n+1} \geqslant \left(1+\sqrt{3}\right)\sqrt{n}. \tag{15}$$

Tähistagu $m = 2026$. Siis võrratuse (15) põhjal

$$\sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n\left(\sqrt{2n-1}+\sqrt{2n+1}\right)} \leqslant \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{\left(1+\sqrt{3}\right)n\sqrt{n}} = \frac{1}{1+\sqrt{3}} \sum_{n=1}^{m} n^{-\frac{3}{2}}.$$

Nüüd on ülesande lahendamiseks piisav näidata, et

$$\sum_{n=1}^{m} n^{-\frac{3}{2}} < 1+\sqrt{3}. \tag{16}$$

Vaatleme funktsiooni $f(x) = x^{-\frac{3}{2}}$. Märkame, et f on kahanev, mistõttu iga 1-st suurema naturaalarvu n ja iga $x \in [n-1, n]$ korral $n^{-\frac{3}{2}} \leqslant x^{-\frac{3}{2}}$. Seega $n^{-\frac{3}{2}} \leqslant \int_{n-1}^{n} x^{-\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}x$. Eraldame võrratuse (16) vasakus pooles olevast summast kolm esimest liidetavat 1, $\frac{1}{2\sqrt{2}}$ ja $\frac{1}{3\sqrt{3}}$; ülejäänute jaoks järeldub eelnevast

$$\sum_{n=4}^{m} n^{-\frac{3}{2}} \leqslant \sum_{n=4}^{m} \int_{n-1}^{n} x^{-\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}x = \int_{3}^{m} x^{-\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}x.$$

Kuna $\int x^{-\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}x = -2x^{-\frac{1}{2}}+C = -\frac{2}{\sqrt{x}}+C$, siis Newtoni-Leibnizi valemi põhjal

$$\int_{3}^{m} x^{-\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{2}{\sqrt{m}} < \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Seega

$$\sum_{n=1}^{m} n^{-\frac{3}{2}} < 1+\frac{1}{2\sqrt{2}}+\frac{1}{3\sqrt{3}}+\frac{2}{\sqrt{3}} = 1+\frac{1}{2\sqrt{2}}+\frac{7}{3\sqrt{3}}.$$

Võrratuse (16) tõestamiseks piisab nüüd näidata, et $\frac{1}{2\sqrt{2}}+\frac{7}{3\sqrt{3}} < \sqrt{3}$. Kuna $\sqrt{3} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \frac{9}{3\sqrt{3}}$, on see samaväärne võrratusega $\frac{1}{2\sqrt{2}} < \frac{2}{3\sqrt{3}}$, mis omakorda on samaväärne võrratusega $3\sqrt{3} < 4\sqrt{2}$. Viimane aga kehtib, sest ruutu tõstes saame tõese võrratuse $27 < 32$.

5. *(Bronislav Shatil)*

Teravnurkses kolmnurgas ABC on külg AB lühem küljest AC. Kolmnurga ABC kõrguste lõikepunkt on H ja tipu A juures oleva sisenurga poolitaja lõikab kolmnurga ABC ümberringjoont punktis K ($K \neq A$). Sirgel BK võetakse punkt X nii, et lõigud BC ja CX on võrdse pikkusega, sirgel CK aga võetakse punkt Y nii, et lõigud CB ja BY on võrdse pikkusega, kusjuures $X \neq B$, $Y \neq C$. Kolmnurkade CKX ja BKY ümberringjooned lõikuvad punktis P ($P \neq K$). Tõesta, et sirged AK ja HP on paralleelsed.

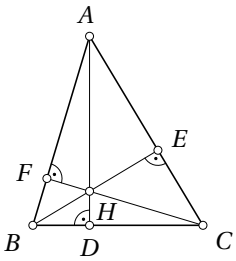
Lahendus 1. Olgu $\angle BAC = \alpha$, $\angle CBA = \beta$ ja $\angle ACB = \gamma$. Olgu kolmnurga ABC tippudest A, B ja C tõmmatud kõrguste aluspunktid vastavalt D, E ja F (joonis 5).

Näitame esmalt, et $BHCP$ on kõõlnelinurk. Ühelt poolt saame

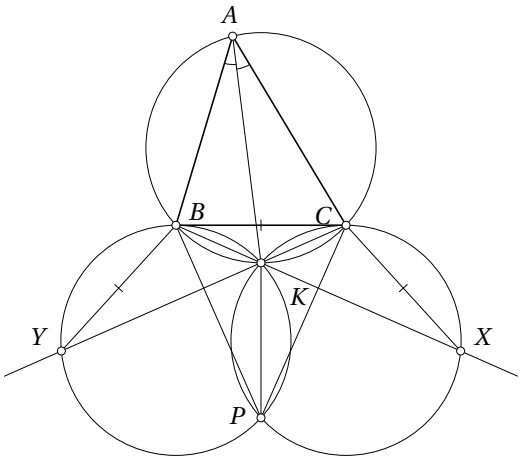
$$\angle BHD = 90^\circ - \angle DBH = 90^\circ - \angle CBE = 90^\circ - \big(90^\circ - \angle ECB\big) = \angle ECB = \gamma$$

ja analoogiliselt $\angle DHC = \beta$, millest kokkuvõttes $\angle BHC = \gamma + \beta = 180^\circ - \alpha$. Teisalt (joonis 6) saame kolmnurga CKX ümberringjoone samale kaarele toetuvatest piirdenurkadest $\angle CPK = \angle CXK = \angle CXB$, kolmnurga ABC ümberringjoone samale kaarele toetuvatest piirdenurkadest saame aga $\angle KAC = \angle KBC = \angle XBC$. Kuna $|BC| = |CX|$, siis $\angle CXB = \angle XBC$, nii et $\angle CPK = \angle KAC = \frac{1}{2}\alpha$. Analoogiliselt saame $\angle KPB = \frac{1}{2}\alpha$, kust kokkuvõttes $\angle CPB = \angle CPK + \angle KPB = \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\alpha = \alpha$. Järelikult

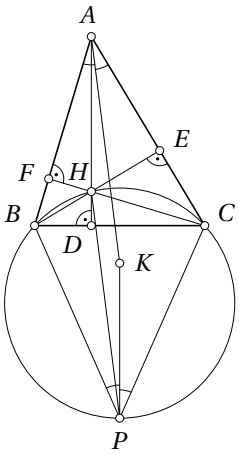
$$\angle BHC + \angle CPB = 180^\circ - \alpha + \alpha = 180^\circ,$$



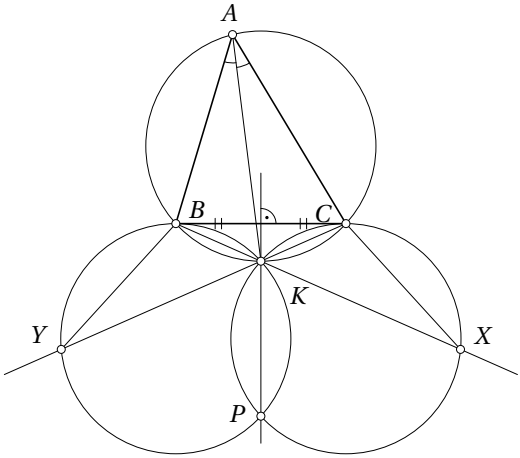
Joonis 5



Joonis 6



Joonis 7



Joonis 8

mis tähendabki, et $BHCP$ on kõõlnelinurk (joonis 7).
Teiseks näitame, et $\angle HAK = \angle KPH$. Tõepoolest,

$$\angle HAK = \angle BAK - \angle BAH = \angle BAK - \angle BAD = \frac{1}{2}\alpha - \left(90^\circ - \beta\right).$$

Kasutades aga nelinurga $BHCP$ ümberringjoone samale kaarele toetuvaid piirdenurki ja eelnevalt tõestatud võrdust $\angle KPB = \frac{1}{2}\alpha$, näeme, et

$$\begin{aligned}\angle KPH = \angle KPB - \angle HPB = \angle KPB - \angle HCB &= \angle KPB - \angle FCB = \\ &= \frac{1}{2}\alpha - \left(90^\circ - \beta\right).\end{aligned}$$

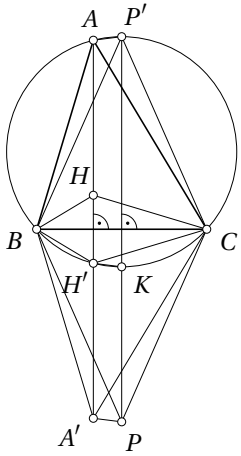
Järelikult $\angle HAK = \angle KPH$.
Kolmandaks tõestame, et $AH \parallel KP$. Kuna $AH \perp BC$, piisab näidata, et $KP \perp BC$. Kuna $\angle BAK = \angle KAC$, on kolmnurga ABC ümberringjoone kaared BK ja KC ja ühtlasi vastavad kõõlud võrdsed, mistõttu K asub külje BC keskristsirgel (joonis 8). Punktid B ja C on külje BC keskristsirge suhtes sümmeetrilised, järelikult on külje BC keskristsirge suhtes sümmeetrilised ka punktid X ja Y ning ühtlasi ka kolmnurkade CKX ja BKY ümberringjooned. Seega asub nende ringjoonte lõikepunkt P külje BC keskristsirgel, millest nähtubki, et $KP \perp BC$.
Kuna $\angle HAK = \angle KPH$ ja $AH \parallel KP$, siis $AK \parallel HP$, mida oligi tarvis tõestada.
Lahendus 2. Nagu lahenduses 1 leiame, et $\angle BHC = 180^\circ - \alpha$ ja $\angle CPK = \frac{1}{2}\alpha$, kus $\alpha = \angle BAC$, ja tõestame, et $AH \parallel KP$. Ülesande lahendamiseks piisab

nüüd näidata, et $|AH| = |KP|$, sest siis saab järeldada, et $AHPK$ on rööpkülik ja tema vastasküljed AK ja HP on paralleelsed.

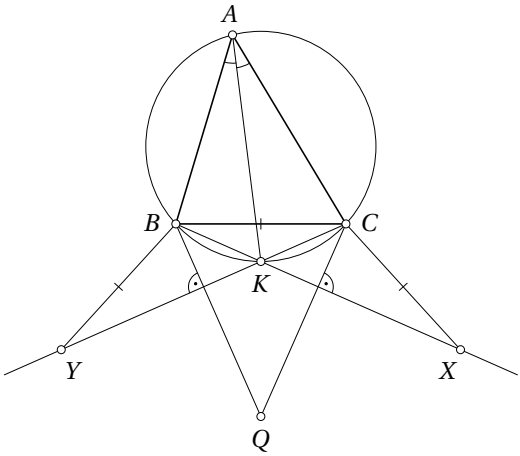
Näitamaks võrdust $|AH| = |KP|$, olgu A', H' ja P' vastavalt punktide A, H ja P peegeldused sirgest BC (joonis 9). Sümmeetriale tuginedes saame võrdused

$$\angle CH'B = \angle BHC = 180^\circ - \alpha,$$
$$\angle BP'C = \angle CPB = 2\angle CPK = 2 \cdot \frac{1}{2}\alpha = \alpha.$$

Seega asuvad punktid H' ja P' kolmnurga ABC ümberringjoonel. Kuna $AH \perp BC$ ja $KP \perp BC$, asuvad punktid A, H ja H' ühel sirgel ning K, P ja P' samuti ühel sirgel. Seega AH' ja $P'K$ on kolmnurga ABC ümberringjoone kaks paralleelset kõõlu. Järelikult on $AH'KP'$ võrdhaarne trapets, kust saame $\angle AP'K = \angle P'KH'$. Sümmeetria tõttu sirge BC suhtes on aga ka $AA'PP'$ võrdhaarne trapets, millest tulenevalt $\angle AP'P = \angle P'PA'$. Kuna $\angle AP'K = \angle AP'P$, saame kokkuvõttes $\angle P'KH' = \angle P'PA'$. Seega $H'K \parallel A'P$. Kuna samas $H'A' \parallel KP$, on $H'A'PK$ rööpkülik, millest tulenevalt $|H'A'| = |KP|$. Sümmeetria tõttu sirge BC suhtes aga $|AH| = |H'A'|$. Kokkuvõttes olemegi tõestanud, et $|AH| = |KP|$.



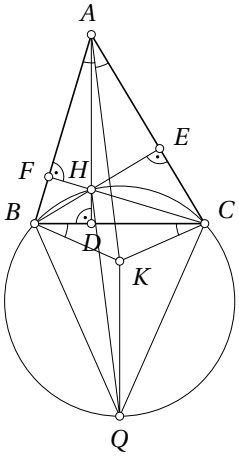
Joonis 9



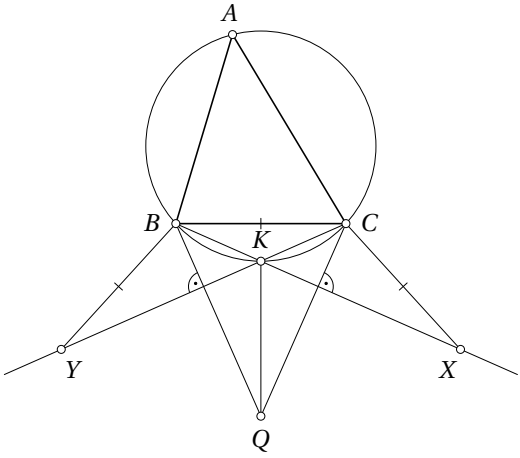
Joonis 10

Lahendus 3. Nagu lahenduses 1 tähistame nurgad α, β ja γ, tähistame kõrguste aluspunktid D, E ja F ning tõestame võrdused $\angle BHD = \gamma$ ja $\angle BHC = 180^\circ - \alpha$.

Olgu Q punkt, kus lõikuvad kolmnurga BCX tipust C tõmmatud kõrguse ja kolmnurga CBY tipust B tõmmatud kõrguse pikendused (joonis 10). Kuna $\angle XBC = \angle KBC = \angle KAC = \frac{1}{2}\alpha$, siis $\angle BCQ = 90^\circ - \frac{1}{2}\alpha$. Analoog-



Joonis 11



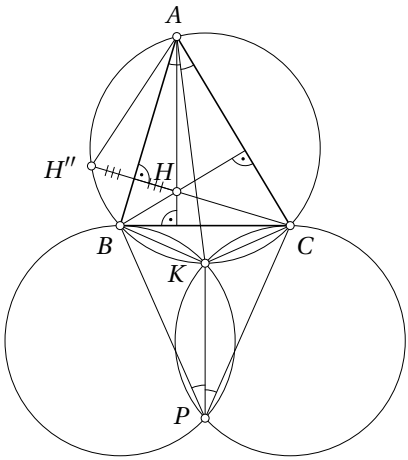
Joonis 12

selt leiame $\angle QBC = 90^\circ - \frac{1}{2}\alpha$, mis näitab, et $|BQ| = |CQ|$. Arvutame ka $\angle CQB = 180^\circ - 2\left(90^\circ - \frac{1}{2}\alpha\right) = \alpha$. Koos võrdusega $\angle BHC = 180^\circ - \alpha$ tuleneb sellest, et $BHCQ$ on kõõlnelinurk (joonis 11).

Kasutades nelinurga $BHCQ$ ümberringjoone samale kaarele toetuvaid piirdenurki, saame $\angle DHQ = \angle BHQ - \angle BHD = \angle BCQ - \angle BHD = 90^\circ - \frac{1}{2}\alpha - \gamma$. Samas $\angle DAK = \angle DAC - \angle KAC = 90^\circ - \gamma - \frac{1}{2}\alpha$. Järelikult $\angle DHQ = \angle DAK$, mis näitab, et $HQ \parallel AK$.

Ülesande lahendamiseks jääb veel tõestada, et $P = Q$. Kuna $BK \perp CQ$ ja $CK \perp BQ$, on K kolmnurga BCQ kõrguste lõikepunkt (joonis 12). Võrdhaarse kolmnurga tipunurgast tõmmatud kõrgus poolitab tipunurga, mistõttu $\angle CQK = \angle KQB = \frac{1}{2}\alpha$. Samas ka $\angle CXK = \angle CXB = \angle XBC = \angle KBC = \frac{\alpha}{2}$ ja $\angle KYB = \angle CYB = \angle BCY = \angle BCK = \frac{\alpha}{2}$. Seega $\angle CXK = \angle CQK$ ja $\angle KYB = \angle KQB$, mis näitab, et Q asub kolmnurkade CKX ja BKY ümberringjoontel. See näitabki, et $P = Q$.

Lahendus 4. Nagu lahenduses 1 leiame, et $\angle CPK = \frac{1}{2}\alpha$, kus $\alpha = \angle BAC$, ja tõestame, et KP on külje BC keskristsirge, millest tulenevalt $AH \parallel KP$. Ülesande lahendamiseks piisab nüüd näidata, et $|AH| = |KP|$, sest siis saab järeldada, et $AHPK$ on rööpkülik ja tema vastasküljed AK ja HP on paralleelsed.



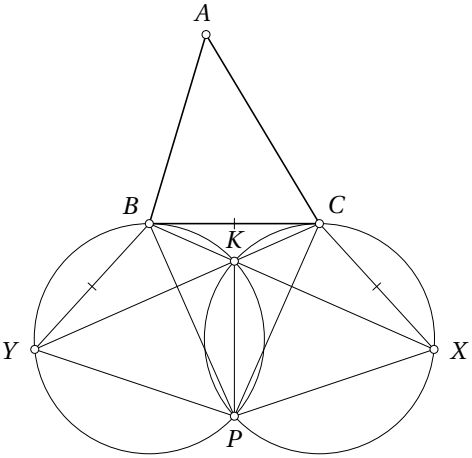
Joonis 13

Olgu nüüd H'' punkti H peegeldus sirgest AB (joonis 13); tuntud fakti põhjal asub punkt H'' kolmnurga ABC ümberringjoonel. Kuna $|AH''| = |AH|$, piisab meil näidata, et $|AH''| = |KP|$. Kuna kolmnurkades ACK ja PCK on külje CK vastasnurk sama suurusega $\frac{1}{2}\alpha$, siis siinusteoreemi põhjal on nende kolmnurkade ümberringjoonte raadiused võrdsed. Seega AH'' ja KP on kõõlud võrdsete raadiustega ringjoontes, mistõttu nende võrdsuseks piisab näidata, et neile toetuvad piirdenurgad on võrdsed ehk $\angle ACH'' = \angle KCP$.

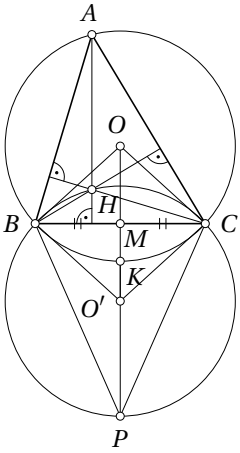
Selleks märkame ühelt poolt, et $\angle ACH'' = \angle ACH = 90^\circ - \alpha$. Teiselt poolt, kolmnurgas CKP kehtib $\angle CPK = \frac{1}{2}\alpha$ ning kuna sümmeetria tõttu $\angle PKC = \angle BKP$, siis $\angle PKC = \frac{360^\circ - (180^\circ - \alpha)}{2} = 90^\circ + \frac{1}{2}\alpha$. Siit saame, et $\angle KCP = 180^\circ - \frac{1}{2}\alpha - \left(90^\circ + \frac{1}{2}\alpha\right) = 90^\circ - \alpha$. Kokkuvõttes ongi näidatud, et $\angle ACH'' = \angle KCP$.

Lahendus 5. Nagu lahenduses 1 leiame, et $\angle CPB = \alpha$, kus $\alpha = \angle BAC$, tõestame, et punktid X ja Y on sirge KP suhtes sümmeetrilised, ning veendume, et $AH \parallel KP$. Ülesande lahendamiseks piisab nüüd näidata, et $|AH| = |KP|$, sest siis saab järeldada, et $AHPK$ on rööpkülik ja tema vastasküljed AK ja HP on paralleelsed.

Sümmeetria ning kolmnurga BKY ümberringjoone võrdsetele kaartele toetuvate piirdenurkade põhjal kehtib $\angle KXP = \angle PYK = \angle BPK$ (joonis 14). Seega asub punkt P lõigu BX keskristsirgel. Kuivõrd ka punkt C asub lõigu BX keskristsirgel, on sirged CP ja BX risti. Analoogiliselt näeme, et sirged



Joonis 14



Joonis 15

BP ja CY on risti. See aga tähendab, et sirgete BX ja CY lõikepunkt K on kolmnurga PBC kõrguste lõikepunkt.

Kuna kolmnurkades ABC ja PBC on külje BC vastasnurk sama suurusega α, on nende kolmnurkade ümberringjoonte raadiused siinusteoreemi põhjal võrdsed. Olgu O kolmnurga ABC ümberringjoone keskpunkt, O' kolmnurga BCP ümberringjoone keskpunkt ning M külje BC keskpunkt (joonis 15). Raadiuste võrdsuse põhjal $|OB| = |OC| = |O'C| = |O'B|$, mistõttu ka kolmnurgad OBC ja $O'BC$ on võrdsed. Järelikult on ka vastavad kõrgused võrdsed ehk $|OM| = |OM'|$. Tuntud fakti põhjal aga $|AH| = 2|OM|$ ja analoogiliselt $|KP| = 2|O'M|$. Kokkuvõttes $|AH| = |KP|$.

Märkus 1. Lahenduses 4 kasutasime kolmnurga ABC ja külje AB jaoks järgmist tuntud fakti: *kolmnurga kõrguste lõikepunkti peegeldus küljest asub ümberringjoonel.* See fakt on lahenduses 2 möödaminnes ära tõestatud kolmnurga ABC ja külje BC jaoks.

Lahenduse 5 eelviimases lauses kasutasime kaks korda järgmist samuti tuntud fakti: *kolmnurga tipu kaugus kõrguste lõikepunktist võrdub kahekordse vastaskülje keskpunkti ja ümberringjoone keskpunkti vahelise kaugusega.* Ka seda on lihtne tõestada. Kasutame selleks lahenduste 1 ja 5 tähistusi. Esiteks märkame, et

$$\begin{aligned}
\angle HAO &= \angle HAC - \angle OAC = \\
&= \angle HAC - \left(90^\circ - \frac{1}{2}\angle COA\right) = \\
&= \angle HAC - \left(90^\circ - \angle CBA\right) = \\
&= \left(90^\circ - \gamma\right) - \left(90^\circ - \beta\right) = \\
&= \beta - \gamma.
\end{aligned}$$

Lahenduses 5 tehtust selgub, et kolmnurkade ABC ja PBC ümberringjooned on teineteise peegeldused sirgest BC. Eelmise tuntud fakti põhjal asub punkt H' kolmnurga ABC ümberringjoonel. Kasutades sümmeetriat koos selle faktiga, saame

$$\begin{aligned}\angle OO'H &= \angle MO'H = \angle H'OM = \angle H'OC - \angle MOC = \\ &= \angle H'OC - \frac{1}{2}\angle BOC = 2\angle H'AC - \angle BAC = \\ &= 2\left(90^\circ - \gamma\right) - \alpha = 180^\circ - 2\gamma - \alpha = \beta - \gamma.\end{aligned}$$

Kokkuvõttes $\angle HAO = \angle OO'H$. Kuna $AH \parallel OO'$, siis järeldub sellest, et ka $AO \parallel HO'$, mistõttu $AOO'H$ on rööpkülik. Seega $|AH| = |OO'| = 2|OM|$.

Märkus 2. Kirjutisega $|l|$ tähistame lõigu l pikkust.

6. *(Andres Alumets)*

Tasandile paigutatakse 2026 ühesuurust ruudukujulist plaati ilma ülekateteta. Leia suurim võimalik terve ühise küljega plaadipaaride arv.

Vastus: 3961.

Lahendus. Nimetame *sidusaks tükiks* plaatide hulga sellist paigutust, kus hulga iga plaadi pealt saab üle tervete ühiste servade liikuda iga ülejäänud plaadi peale selles hulgas. Üldisust kitsendamata võime eeldada, et kõik plaadid katavad täpselt lõpmatu ruudustiku ühikruute, sest vajadusel saame plaate või nende sidusaid tükke pöörata ja ümber tõsta nii, et terve ühise küljega plaadipaaride arv ei muutu. Samuti saame üldisust kitsendamata eeldada, et kõik plaadid moodustavad üheainsa sidusa tüki, sest mitme sidusa tüki puhul saame tükke kokku nihutades terve ühise küljega plaadipaaride arvu suurendada.

Tähistagu s vaadeldava paigutuse ühise küljega plaadipaaride arvu. Olgu veel r vaadeldava paigutuse hõlmatavate plaadiridade arv ja v veergude arv (ridades ja veergudes ei pruugi kõik kohad olla täidetud). Vähemalt 2 äärmist plaadikülge igas hõlmatavas reas, nagu ka 2 äärmist plaadikülge igas hõlmatavas veerus, ei ole kahe plaadi ühiseks küljeks. Kokku on $2026 \cdot 4$ plaadikülge, millest eelneva põhjal vähemalt $2(r+v)$ plaadikülge ei ole ühegi kahe plaadi jaoks ühised. Seega ülimalt $2026 \cdot 4 - 2(r+v)$ plaadikülge on mingi kahe plaadi jaoks ühised. Teisalt on igas terve ühise küljega plaadipaaris koos 2 plaadikülge, mistõttu selliseid plaadikülgi, mis on mingile kahele plaadile ühised, on kokku $2s$. Kokkuvõttes $2s \leqslant 2026 \cdot 4 - 2(r+v)$ ehk

$$s \leqslant 2026 \cdot 2 - (r+v) = 4052 - (r+v).$$

Kuid aritmeetilise ja geomeetrilise keskmise vahelisest võrratusest tuleneb $\dfrac{r+v}{2} \geqslant \sqrt{rv}$. Kuna r rea ja v veeru sisse peab mahtuma 2026 plaati, siis $rv \geqslant 2026$. Seega kokkuvõttes

$$r + v \geqslant 2\sqrt{rv} \geqslant 2\sqrt{2026} > 2 \cdot 45 = 90,$$

mistõttu $r + v \geqslant 91$. Seega $s \leqslant 4052 - 91 = 3961$.

Paigutades 2025 plaati 45×45 ruudustikuna ja lisades 46-nda veeru ülemisse ritta veel ühe plaadi, saavutame leitud ülempiiri. Tõepoolest, vertikaalse ühise küljega plaadipaare on $1 \cdot 45 + 44 \cdot 44$ ja horisontaalse ühise küljega plaadipaare $45 \cdot 44$. Kokku on ühise küljega plaadipaare $1 \cdot 45 + 44 \cdot 44 + 45 \cdot 44$ ehk $44 \cdot 44 + 45 \cdot 45$ ehk 3961.

Hindamisskeemid ja kontrollijate kommentaarid

1. *(Paula Russak)*

Lahenduse allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Tõestatud, et kahekohalise arvu ja numbrite järjekorra vahetamisel saadud arvu summa jagub 11-ga: 4 p
  Sealhulgas:
  - Väidetud või kasutatud seda väidet ilma tõestuseta: *1 p*
  - Kasutatud kahekohalise arvu esitamiseks kuju $10A + B$: *1 p*
- Tõestatud, et $A + B = 11$ (kus A ja B on arvu numbrid): 2 p
  Sealhulgas:
  - Pandud kirja võrratus $A + B \leqslant 18$ või $n^2 \leqslant 198$: *1 p*
- Eelneva põhjal leitud õiged lahendid: 1 p

Tööd, kus oli piirdutud arvude läbi proovimisega, said ülimalt ühe punkti lahendite leidmise eest. Maksimumpunktid said sellised tööd vaid juhul, kui oli läbi vaadatud kõik kahekohalised arvud.

2. *(Ervin Ivanov)*

Lahenduse allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Tõestatud, et 2026×2026 ruudustiku jaoks pole nõutud viisil liikuda võimalik: 4 p
- Leitud sobiv konstruktsioon 2027×2027 ruudustiku jaoks: 3 p

Ainult õige vastuse eest punkte ei antud.

Vastuse üldistamise eest paaris ja paaritu n jaoks või n paarsuse mainimise eest (kus n on ruudustiku külje pikkus) anti 1 punkt, kui töö ei väärinud muid punkte.

Õpilased võisid kaotada kuni 1 punkt väikese puudujäägi korral a-osa lahenduse seletuses, kui lahenduse idee oli õige.

Üldiselt kasutasid kõik lahendused b-osas samasugust konstruktsiooni (ehk 2027×2027 ruudustiku läbimise meetodit), mis oli kasutatud ametlikus lahenduses. Kui b-osas oli pakutud see konstruktsioon (kasvõi illustreeriva joonise kujul) väiksema paaritu n jaoks (näiteks $n = 5$ või $n = 7$) ja sellest järeldatud vastus $n = 2027$ juhu jaoks, kuid polnud ammendavalt selgitatud, miks või kuidas saab seda üldistada või rakendada juhul $n = 2027$ (näiteks

polnud märgatud, et konstruktsiooni saab kasutada, kui vähemalt üks ruudustiku külg on paaritu), siis anti hindamisskeemi teise rea järgi 2 punkti, kui konstruktsiooni oli võimalik lihtsasti üldistada ka juhu $n = 2027$ jaoks. Üldiselt kui õpilane polnud demonstreerinud, et ta saab aru ja oskab seletada, miks konstruktsioon, mis töötab väikese paaritu juhu jaoks, peaks töötama ka $n = 2027$ jaoks (ja igasuguse parajasti paaritu n jaoks), sai ta hindamisskeemi teise rea järgi 2 punkti. Samuti sai õpilane 2 punkti selle rea järgi, kui pakkus õiget konstruktsiooni, kuid ajas sassi vastused (väites, et konstruktsioon töötab parajasti paarisarvude n jaoks).

Enimlevinud veaks osutus see, et püüti järeldada a-osa vastust sellest, et konstruktsioon b-osast ei tööta sama hästi paarisarvulise n jaoks. Näiteks pandi tähele, et väikeste $n = 2$, $n = 4$ korral konstruktsioon ei tööta. Näidetest, kus ruudustiku mingi läbimisviisiga „üks ruut jääb alati läbimata“ või „üks rida jääb alati läbimata“, ei piisa aga tõestamiseks, et $n = 2026$ jaoks ei leidu mõnda teist läbimisviisi, mis töötaks. Õpilased, kes püüdsid järeldada a-osa vastust sellest, et sama konstruktsioon, mis töötab $n = 2027$ jaoks, ei tööta $n = 2026$ jaoks, said 0 punkti hindamisskeemi esimese rea järgi.

Veel üks tüüpviga oli see, et mõned õpilased, kes tõestasid, et a-osas on läbimine võimatu (näiteks malemustrit kasutades), järeldasid sama meetodit rakendades, et b-osa on siis võimalik, jättes kontrollimata, kas leidub sobiv konstruktsioon. Samuti järeldasid mõned b-osa läbimise võimalikkuse empiiriliselt väikeste juhtude vaatlemisest. Õpilased, kes püüdsid lahendada b-osa ilma selge viisita (ehk konstruktsioonita), kuidas läbida 2027×2027 ruudustikku vastavalt tingimustele, said 0 punkti hindamisskeemi teise rea järgi.

Ülesande a-osale pakuti ka mõnda sellist lahendust, mis erineb ametlikust lahendusest. Üldiselt kasutasid kõik lahendused n paarsust ühel või teisel moel.

3. *(Martin Rahe)*

Lahenduse allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Tõestatud, et n peab jaguma 400-ga: 3 p
  Sealhulgas:
  - Näidatud, et aastad a ja $a + 400$ kas on mõlemad liigaastad või pole seda kumbki: *1 p*
- Tõestatud, et päevade arv 400 aastas jagub 7-ga: 3 p
  Sealhulgas:
  - Näidatud, et 400 aasta jooksul on 97 liigaastat: *1 p*
- Järeldatud, et sama kuupäev langeb 400 aastat hiljem alati samale nädalapäevale: 1 p

Korrektse loogikaga lahendused, kus vastus oli vale üksnes kergesti parandatava arvutusvea tõttu, kaotasid ühe punkti.

Ülesanne osutus oodatust keerulisemaks. Suur osa võistlejaid eirasid tingimusi 3) ja 4) ning said tulemuseks $n = 28$. Levinud tüüpveaks oli ka eeldamine, et n peab sobima vaid mingi konkreetse aasta ja kuupäeva jaoks, sellistes lahendustes oli enamasti tulemuseks $n = 5$.

Ülesande sisu õigesti mõistnud võistlejate hulgas oli täislahenduste osakaal kõrge ning ka seitsmega jagamisel tekkivaid jääke arvutati üldjuhul õigesti.

4. *(Lukas Müürsepp)*

Tööde hindamiseks kasutati kolme erinevat skeemi. Iga skeemi rakendamisel selles märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

Skeem žürii lahendusega 1 sarnanevate tööde hindamiseks:

- Võrrand teisendatud kujule $xy - 67x - 67y = 0$: 1 p
- Võrrandi pooltele liidetud 67^2: 2 p
- Võrrandi vasak pool tegurdatud: 2 p
- Leitud arvu 67^2 tegurid: 1 p
- Leitud kõik kolm lahendit: 1 p

Skeem žürii lahendusega 2 sarnanevate tööde hindamiseks:

- Võrrand viidud kujule $67(a + b) = abd$, kus $d = \text{SÜT}(x, y)$ ja $ad = x$, $bd = y$: 2 p
- Näidatud, et arvud a ja b on arvuga $a + b$ ühistegurita: 1 p
- Järeldatud, et a ja b on arvu 67 tegurid: 1 p
- Leitud arvu 67 tegurid: 1 p
- Leitud võimalikud a ja b väärtuste kombinatsioonid: 1 p
- Õigesti arvutatud d väärtus ja leitud lahendite paarid: 1 p

Skeem žürii lahendusega 3 sarnanevate tööde hindamiseks:

- Tõestatud, et x või y jagub 67-ga: 3 p
- Tõestatud võrdus (3) või analoogne võrdus eeldusel $y = 67y'$: 1 p
- Järeldatud koos põhjendusega, et $x' - 1$ on arvu 67 tegur, või tehtud analoogne järeldus y' kohta: 1 p
- Leitud arvu 67 tegurid: 1 p
- Leitud kõik kolm lahendit: 1 p

Ülesandes ei antud ühte punkti kõikide õigete lahendite leidmise eest, kui polnud pädevalt põhjendatud, miks rohkem lahendeid ei ole, või kui peale õigete lahendite oli lisatud ka mõni vale lahendipaar.

5. *(Aleksei Ganyukov)*

Lahenduse allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Tõestatud, et $\angle BAC = 90^\circ$: 4 p
  Sealhulgas:
  - Saadud $\angle KAB = 90^\circ - \angle ABC$ või sellega analoogne seos: *1 p*

- Saadud $\angle BAC = \angle ABC + \angle ACB$ või sellega ilmselgelt samaväärne seos: *2 p*
- Järeldatud, et $\angle BAC = 90^\circ$: *1 p*

◦ Tõestatud, et punktid K, D, E ja L asuvad ühel ringjoonel: 3 p
Sealhulgas:
- Ülesanne taandatud võrduse $\angle KLE + \angle EDK = 180^\circ$ või sellega analoogse seose tõestamisele: *1 p*
- Saadud $\angle EDK = 90^\circ + \angle ABC$ või sellega analoogne seos, mis koos eelmisel real hinnatud väitega võimaldab teha vajaliku järelduse: *1 p*
- Lahendus lõpule viidud: *1 p*

Skeemi esimese rea järgi anti 1 punkt ka joonise põhjal esitatud hüpoteesi $\angle BAC = 90^\circ$ eest, kui joonisel olid ülesande tingimuste kohaselt punktid K, A ja L ühel sirgel.

6. *(Madis Roosma)*

Lahenduse allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

◦ Näidatud, et võitjaid saab olla 36: 3 p
Sealhulgas:
- Leitud ülesande tingimusi rahuldav konstruktsioon 36 võitjaga: *2 p*
- Leitud õige vastus: *1 p*

◦ Tõestatud, et võitjaid ei saa olla 37 või rohkem: 4 p
Sealhulgas:
- Leitud võitjate arvu ja kaotajate arvu vahel mõni kasulik seos: *2 p*

Tööd, milles oli toodud ülesande tingimusi rahuldav konstruktsioon vähemalt 25, kuid vähem kui 36 võitjaga, said skeemi esimese rea järgi 1 punkti.

Hindamisskeemid ja kontrollijate kommentaarid

1. *(Birgit Veldi)*

Erinevate lähenemistega tööde hindamiseks kasutati nelja eri skeemi. Skeemisiselt selles märgitud osade eest antud punktid summeeriti. Töö sai punkte selle skeemi põhjal, mille põhjal see oli väärt kõige rohkem punkte.

Skeem žürii lahendusega 1 sarnaste tööde hindamiseks:

- Saadud võrrand $ab - 2a - 2b - 16 = 0$: 1 p
- Liidetud (mingisuguse) võrrandi mõlemale poolele midagi juurde või avaldatud üks tundmatutest: 1 p
- Tegurdus, mis võrdub mingi täisarvulise konstandiga või eraldatud täisosa nii, et murdosa lugejasse jääb täisarvuline konstant: 2 p
- Saadud aru, et lahenduse lõpetamiseks tuleb kontrollida selle täisarvu võimalikke tegurdusi: 1 p
- Leitud õige vastus ning välistatud ülejäänud veel seni välistamata võimalused: 2 p

  Sealhulgas:
  - Välistatud ainult negatiivsed arvud või jäetud väike osa võimalusi kontrollimata: *1 p*

Skeem žürii lahendusega 2 sarnaste tööde hindamiseks:

- Märgatud, et $p \geqslant 11$: 1 p
- Saadud võrrand $ab = 2p + 16$: 1 p
- Tehtud eeldus $a \leqslant b$ ning see kuhugi võrrandisse asendatud, saades võrratuse: 1 p
- Välistatud juht $a \geqslant 7$: 2 p
- Välistatud juht $a \leqslant 2$ või $a < 0$: 1 p
- Leitud õige vastus ning välistatud ülejäänud veel seni välistamata võimalused: 1 p

Skeem žürii lahendusega 3 sarnaste tööde hindamiseks:

- Saadud $a^2 + 16 = (a-2)p$: 2 p

  Sealhulgas:
  - Võrrand samade liikmetega, aga ilma tegurdamata: *1 p*
- Tehtud eeldus $a \leqslant b$ ning see kuhugi võrrandisse asendatud, saades võrratuse: 1 p

- Välistatud juht $a \geqslant 7$: 2 p
- Välistatud juht $a \leqslant 2$ või $a < 0$: 1 p
- Leitud õige vastus ning välistatud ülejäänud veel seni välistamata võimalused: 1 p

Skeem žürii lahendusega 4 sarnaste tööde hindamiseks:

- Saadud võrrand $a^2 - ap + 16 + 2p = 0$ ning on seda vaadatud ruutvõrrandina a suhtes: 2 p
- Pandud tähele, et diskriminant on ruut: 1 p
- Liitetud midagi mõlemale poole juurde ja rühmitatud või vaadatud diskriminanti uuesti ning saadud, et ruutude vahe on täisarv: 1 p
- Tegurdatud ruutude vahe või saadud muul viisil aru, et see jätab kontrollida lõpliku arvu variante p jaoks: 1 p
- Leitud õige vastus ning välistatud ülejäänud veel seni välistamata võimalused: 2 p

  Sealhulgas:
  - Jäetud mõned kontrollimata: *1 p*

Ülesanne osutus raskeks. Kui töös muud punktiväärset ei olnud, aga oli leitud õiged lahendid ja neid ka kontrollitud, siis sai selle eest 1 punkti.

Kui töös oli kusagil mainitud sümmeetriat, aga lahendiks kirjutatud vaid üks sobivatest arvupaaridest, siis selle eest ei karistatud.

Ootamatult valmistas raskusi ka algarvu mõiste, mis aeti segi numbriga.

2. *(Hendrik Vija)*

Erinevate lähenemistega tööde hindamiseks kasutati kahte eri skeemi. Skeemisiselt selles märgitud osade eest antud punktid summeeriti. Töö sai punkte selle skeemi põhjal, mille põhjal see oli väärt kõige rohkem punkte.

Skeem žürii lahendusega 1 sarnaste tööde hindamiseks:

- Avaldatud, mitu eurot on igaühel lõpuks: 2 p

  Sealhulgas:
  - Leitud üks avaldistest: *1 p*
- Taandatud esimese kahe avaldise võrdlus avaldiste $3a^2 - 100a$ ja $3b^2 - 100b$ võrdlemisele: 2 p
- Avaldised korrektselt võrreldud: 3 p

  Sealhulgas tüüpiliste osaliste mõttekäikude eest:
  - Leitud, et piisab võrrelda avaldisi 100 ja $3(a + b)$ või midagi ilmselgelt samaväärset: *1 p*
  - Leitud, et $y = 3x^2 - 100x$ on ruutfunktsioon miinimumiga punktis $x = \frac{50}{3}$ ning selle suhtes sümmeetriline: *1 p*

Skeem žürii lahendusega 2 sarnaste tööde hindamiseks:

- Avaldatud, mitu eurot on igaühel enda rahast alles peale teistele raha andmist: 2 p
- Avaldised korrektselt võrreldud: 3 p
  Sealhulgas tüüpiliste osaliste mõttekäikude eest:
  - Leitud, et piisab võrrelda avaldisi 50 ja $a+b$ või midagi ilmselgelt samaväärset: *1 p*
  - Leitud, et $y = x - \frac{1}{50}x^2$ on ruutfunktsioon maksimumiga punktis $x = 25$ ning selle suhtes sümmeetriline, või jõutud ilmselgelt samaväärse vahetulemuseni: *1 p*
  - Vajalikest juhtudest üks läbi vaadatud: *1 p*
- Pandud tähele, et Carol saab ülejäänud kahelt kõige rohkem raha ning Anna kõige vähem: 2 p
  Sealhulgas:
  - Põhjendatud ainult üks kahest väitest: *1 p*

Ainult vastuse eest punkte ei antud. Samuti ei antud punkte muutujatele a, b, c konkreetsete arvuliste väärtuste omistamise ning nende jaoks arvutuse läbi tegemise eest, kuna ei saa ju eeldada, et kõigi väärtuste puhul tuleb vastus alati sama. Paljudes töödes eeldati veel, et a, b, c on täisarvud (mida nad ei pruugi tegelikult olla), aga see üldjuhul õnneks lahenduse korrektsust ei mõjutanud.

3. *(Kirill Tselovalnikov)*

Lahenduse allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Näidatud, et konstantne jada rahuldab ülesande tingimust: 1 p
- Tõestatud, et konstantsed jadad on ainsad jadad, mis antud tingimust rahuldavad: 6 p
  Sealhulgas žürii lahendusega 1 sarnaste mõttekäikude korral:
  - Näidatud, et vahe $a_n - a_m$ jagub lõpmata paljude erinevate naturaalarvudega kõigi positiivsete täisarvude n ja m korral (või midagi sellega ilmselgelt samaväärset): *4 p*
  - Põhjendatud, miks eelnevast järeldub, et tegemist on konstantse jadaga: *2 p*

  Sealhulgas žürii lahendusega 2 sarnaste mõttekäikude korral:
  - Idee vaadelda suvalise jada liikme a_n suvalist jagajat m: *1 p*
  - Saadud, et $m \mid a_m$: *1 p*
  - Tõestatud, et $m \mid a_i$, kus a_i on suvaline jada liige: *2 p*
  - Näidatud, et see on võimalik vaid siis, kui kõik jada liikmed on omavahel võrdsed: *2 p*

  Sealhulgas žürii lahendusega 3 sarnaste mõttekäikude korral:
  - Saadud, et iga jada liige a_n on kujul $a_n = n \cdot k_n + a_1$ (või midagi ilmselgelt samaväärset): *2 p*

- Näidatud, et kui SÜT$(n, m) = 1$, siis $m \mid k_n$: *2 p*
- Lahendus lõpuni viidud: *2 p*

Ülesanne osutus oodatust palju keerulisemaks. Samas oli üllatav näha, et kõigist komplekti ülesannetest just seda ülesannet proovis lahendada kõige vähem õpilasi.

Paljud õpilased, kes ülesannet proovisid, valisid otsitavaks jadaks aritmeetilise ja/või geomeetrilise jada ning uurisid, kas need võivad ülesande tingimust rahuldada. Kuna selline lähenemine on vaid mõne konkreetse erijuhu käsitlemine, ei saanud sellised tööd üldjuhul punkte, aga leidus siiski paar tööd, kus aritmeetilise jada sobivuse analüüs kasutas samu ideid nagu üldjuhu lahendus žürii lahenduses 3. Sellel juhul anti 3. skeemi vastavate ridade eest pooled punktid.

Veel üheks levinud puudujäägiks oli kontrolli tegemise ära unustamine. Kuigi selles ülesandes kontroll, et konstantne jada on alati ülesande lahendiks, on väga lihtne, pidi see siiski töös olema selgelt välja kirjutatud, et vastav punkt saada. Lahendite kontroll on iga funktsionaalvõrrandi/funktsionaaljaguvuse (ja see ülesanne oligi tegelikult funktsionaaljaguvus, mis oli kirja pandud jada keeles) lahutamatu osa. Vabalt võib tekkida olukord, kus tõestus näitab, et kui jada sobib, siis ta peab olema konstantne, aga pannes konstantse jada algse ülesande tingimuse sisse, tuleb välja, et selle konstandi väärtus peab olema mingi konkreetne täisarv. Ilma kontrolli tegemata seda ei märkaks. Selles ülesandes muidugi sobisid kõikvõimalikud konstandid, aga mõne teise ülesande puhul ei pruugi see nii olla.

4. *(Artur Bentsa)*

Erinevate lähenemistega tööde hindamiseks kasutati kahte eri skeemi. Skeemisiselt selles märgitud osade eest antud punktid summeeriti. Töö sai punkte selle skeemi põhjal, mille põhjal see oli väärt kõige rohkem punkte.

Skeem žürii lahendusega 1 sarnaste tööde hindamiseks:

- Nimetaja irratsionaalsusest vabastamine: 1 p
- Mõte kasutada võrratust $2n > \sqrt{4n^2 - 1}$: 1 p
- Teleskoopsumma leidmine: 4 p
- Lahenduse lõpuleviimine: 1 p

Skeem žürii lahendusega 2 sarnaste tööde hindamiseks:

- Mõte piirata summat ülalt avaldisega $C \cdot \sum_{n=1}^{2026} n^{-\frac{3}{2}}$ mingi konstandi C jaoks: 1 p
- Sobiva konstandi C leidmine: 2 p
- Summa $\sum_{n=1}^{2026} n^{-\frac{3}{2}}$ piiramine integraaliga ja selle arvutamine: 3 p

- Lahenduse lõpuleviimine: 1 p

Nagu arvata võis, osutus ülesanne vaatamata lahenduse lühidusele raskeks. Üks põhjus võib olla see, et summa väärtus ületab 0,92, mistõttu peab ülalt tõkestamise meetod olema väga täpne. Selleks tuli leida mittetriviaalne teleskoopsumma või tõkestada summat integraaliga. Paljud õpilased neid võimalusi ei märganud.

5. *(Bronislav Shatil)*

Lahenduse allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Tõestatud, et $BHCP$ on kõõlnelinurk: 2 p
  Sealhulgas:
  - Tõestatud, et $\angle BHC = 180^\circ - \angle BAC$: *1 p*
  - Tõestatud, et $\angle BPC = \angle BAC$: *1 p*
- Tõestatud, et $\angle HAK = \angle KPH$: 2 p
- Tõestatud, et AH ja KP on paralleelsed: 2 p
- Lahendus lõpuni viidud: 1 p

Hindamisskeem on tehtud žürii lahenduse 1 mõttekäigu järgi. Kui õpilane leiab oma tööst mõne teise täislahenduse olulisi osi, siis võib ka nende eest punkte saada.

Punkte anti ka kasulike ideede eest; selliste punktide maht hinnati igas konkreetses olukorras eraldi.

6. *(Andres Alumets)*

Lahenduse allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Tõestatud, et piisab vaadelda ainult selliseid plaatide paigutusi, kus kõik plaadid katavad täpselt lõpmatu ruudustiku ühikruute: 1 p
- Tõestatud, et plaadipaaride arvu ülempiir on 3961: 5 p
  Sealhulgas:
  - Toodud välja üldkujul valem r rea ja v veeruga paigutuse suurima paaride arvu jaoks: *2 p*
  - Leitud plaatidest moodustuva kujundi ümbermõõdu alampiir koos põhjendusega või midagi ilmselgelt samaväärset: *3 p*
- Näidatud konstruktsioon, kuidas suurim plaadipaaride arv on võimalik saavutada koos õige arvulise vastusega: 1 p

Ainult õige vastuse eest punkte ei antud. Kui lahenduses oli vaadeldud ainult ristkülikukujulisi paigutusi, siis hindamisskeemi teise rea esimese alapunkti järgi punkti ei antud. Aritmeetilise ja geomeetrilise keskmise vahelise võrratuse rakendamise eest lahenduse seisukohalt kasulikul viisil anti hindamisskeemi teise rea teise alapunkti järgi 1 punkt.

Paljudes lahendustes oli öeldud, et ruut on ilmselgelt kõige kompaktsem viis paigutamiseks. Selle eest anti punkt ainult siis kui seda oli põhjendatud, näiteks kasutades aritmeetilise ja geomeetrilise keskmise suurusvahekorda.