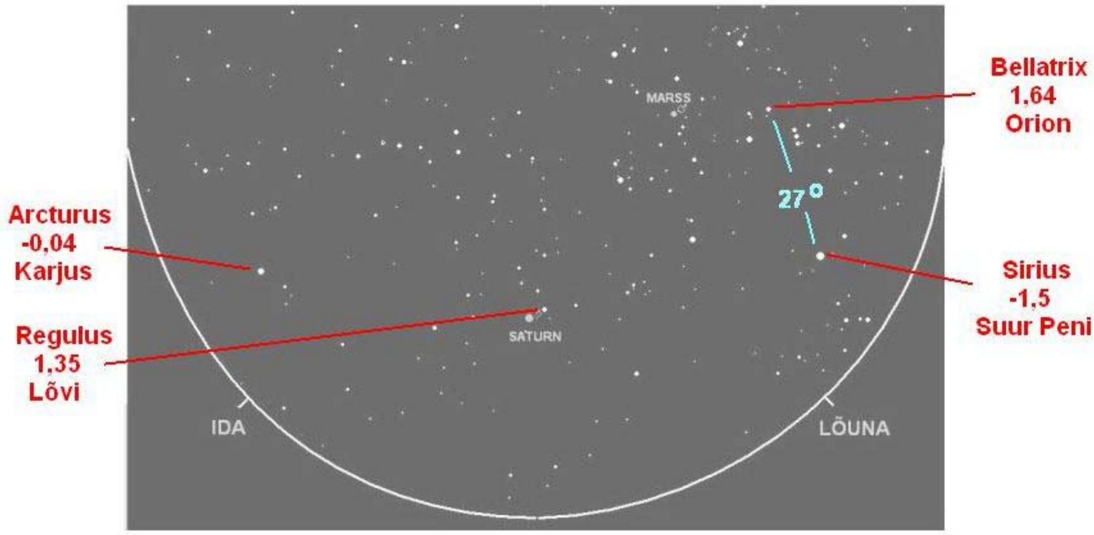
IV lahtine astronoomiavõistlus

Ülesannete lahendused.

Ülesanne 1 Kas tunned tähistaevast?

Küsimused olid samad nii nooremale kui vanemale rühmale. Noorema rühma ülesandes olid kaardil ka tähtkujude joonised, vanemal mitte.

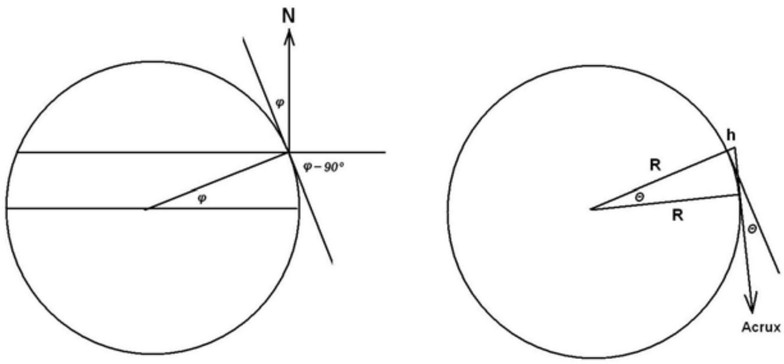
Lahendus:



Hindamine: max 10 pt (4 tähte × 3 küsimust à 1 p. + kuni 3 punkti kauguse eest) × ⅔ .

Ülesanne 2. Lõunarist Siinai poolsaarelt. Taevapooluse (põhjapoolkeral Põhjanaela) kõrgus horisondist on võrdne vaatluskoha geograafilise laiusega φ; ekvaatori kõrgus põhjapoolsest horisondist järelikult 90° + φ, lõunapoolsest 90° – φ. Et tähe kulminatsioonipunkt oleks horisondist kõrgemal, peab tema käänе δ olema suurem kui φ – 90°, Sharm-el-Sheikhi jaoks seega 27°50'53" – 90° = – 62°09'07". Acrux'i käänе on δ = – 63°05'57", seega on puudujääv nurk Θ = 0°56'50".

Et täht nähtavale ilmuks, tuleb vähendada geograafilist laiust (sõita lõuna poole) või tõusta merepinna tasemest kõrgemale. Vaatame joonist ja arvutame:

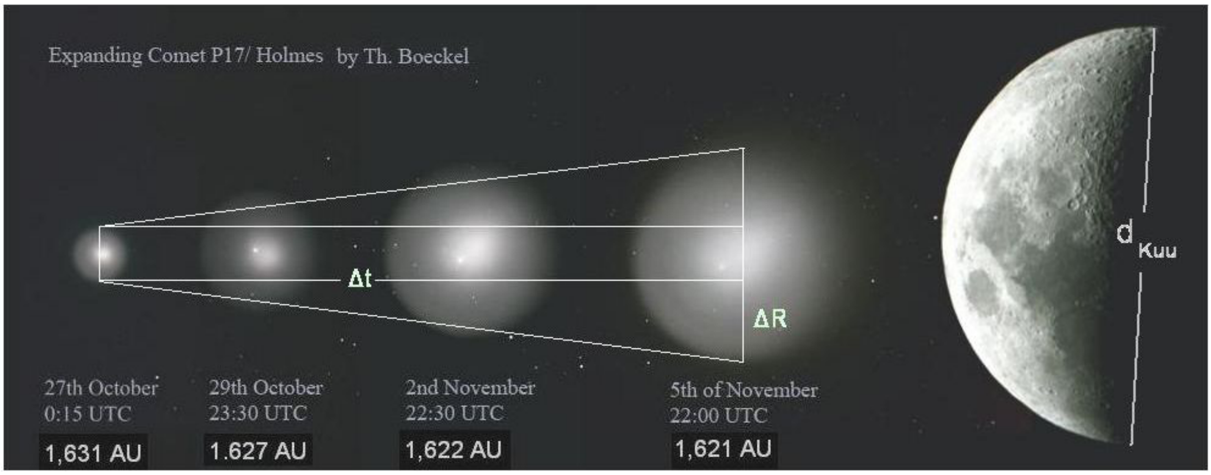


Noorem rühm: $$s = \frac{\Theta \cdot 40000\ \text{km}}{360°} = \frac{0{,}95° \cdot 40000\ \text{km}}{360°} \approx 105\ \text{km}.$$

Vanem rühm: $$\frac{R}{R+h} = \cos\Theta; \quad h = R\left(\frac{1}{\cos\Theta} - 1\right) = 6370\ \text{km} \cdot \left(\frac{1}{\cos 0{,}95°} - 1\right) \approx 0{,}87\ \text{km}$$

Seega piisaks St. Catherina otsa ronimisest, kui mägi asuks rannikul. Kahjuks on ta aga 150 km põhja pool…

Ülesanne 3. Noorem rühm: Saladuslik plahvatus



Kõige lihtsam on mõõta jooniselt pilve paisumise ulatus ΔR, teisendada see kilomeetriteks ning jagada paisumise ajaga t. Teades, et Kuu nurkläbimõõt on 0,5 kraadi, saame pilve paisumise nurgamõõdus:

$$\Delta\alpha = \frac{\Delta R}{d_{\mathrm{Kuu}}} \cdot 0°,5 = 0°,082 = 1,43 \cdot 10^{-3} \text{ rad.}$$

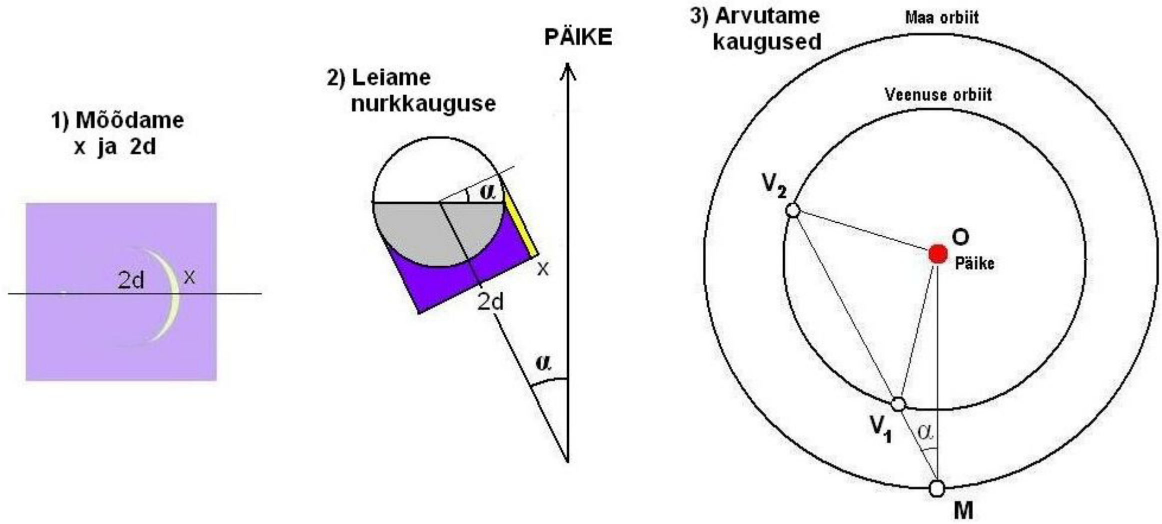
Et komeedi kaugus Maast r_{komeet} vaadeldava ajavahemiku vältel oluliselt ei muutunud, võime kasutada komeedi keskmist kaugust Maast 1,626 AU. Saame

$$v = \frac{\Delta\alpha \cdot r_{\mathrm{komeet}}}{\Delta t} = \frac{1,43 \cdot 10^{-3} \cdot 1,626 \cdot 1,5 \cdot 10^{8} \text{ km}}{237,75 \text{ h}} = 1467 \text{ km/h} = 0,41 \text{ km/s.}$$

Täpsema tulemuse leidmiseks tuleks kanda graafikule teljestikus "aeg – läbimõõt" kõik neli vaatluspunkti ning rakendada lineaarset regressiooni. Arvestades fotolt tehtud mõõtmiste väikest täpsust, pole sel tegelikult mõtet.

Ülesanne 3. Vanem rühm: Kuu katab Veenuse.

Lahenduse idee: Kuu faas on fotolt mõõdetav ja selle abil saab leida Kuu ja Päikese vahelise nurkkauguse. Et Veenus asub otse Kuu kõrval, on tema nurkkaugus Päikesest peaaegu sama (foto järgi võiks Veenus olla Päikesest umbes 0,3 kraadi võrra kaugemal, kui Kuu keskpunkt)



Kõigepealt faasi valem: jooniselt näeme, et heleda osa läbimõõt $\boldsymbol{x = d - d \cos \alpha}$. Otsitava nurga $\boldsymbol{\alpha}$ saame seosest

$$\frac{x}{2d} = \frac{d - d\cos\alpha}{2d} = \frac{1-\cos\alpha}{2} \qquad \Rightarrow \qquad \cos\alpha = 1 - \frac{2x}{2d} = 1 - \frac{3,5}{23} = 0,848 \ ,$$

millest $\boldsymbol{\alpha}$ = 32º.

Läheme joonise kolmanda osa juurde. Et Veenuse maksimaalne kaugus Päikesest on 46º(= arc cos(0,7 / 1), siis lõikab vaatekiir MV_1V_2 Veenuse orbiiti kahes punktis. Kuna täiendav informatsioon Veenuse asukohast puudub, ongi ülesandel kaks lahendit.

Otsitavate kauguste MV_1 ja MV_2 leidmiseks võib kasutada nii siinus- kui koosinuslauset:

$$OV^2 = MV^2 + OM^2 - 2MVOM\cos\alpha \quad \text{või} \quad \frac{OV}{\sin\alpha} = \frac{OM}{\sin(MV_1O)} = \frac{MV_1}{\sin(MOV_1)} \ .$$

Esimesel juhul saame kohe ruutvõrrandi. Kui võtta kaugused astronoomilistes ühikutes, siis:

$$0,7^2 = (MV_1)^2 + 1^2 - 2(MV_1)\cdot 1 \cdot \cos\alpha \quad \text{ehk} \quad (MV_1)^2 - 2\cdot 0,848(MV_1) + 1 - 0,49 = 0 \ ,$$

millest $(MV_1)_1$ = 1,305 AU = 196 milj. km ning $(MV_1)_2$ = 0,39 AU = 59 milj. km.

Siinuslauset rakendades leiame kõigepealt esimesest võrdusest nurga MV_1O.

$$\frac{0,7}{\sin 32^\circ} = \frac{1}{\sin(MV_1O} = \frac{MV_1}{\sin(MOV_1)} \ .$$

$$\sin(MV_1O) = (OM\sin\alpha)/OV = 0,53/0,7 = 0,757;$$

Seejuures ei tohi unustada, et arkussiinusel on kaks väärtust.

$$\angle(MV_1O)_1 = 49^\circ,2; \quad \angle(MV_1O)_2 = 180^\circ - 49^\circ,2 = 130^\circ,8.$$

Lõpuks leiame teisest võrdusest otsitava pikkuse MV:

$$MV = \frac{OM}{\sin(MV_1O)}\cdot\sin(MOV_1) = \frac{1}{0,757}\cdot\sin(180^\circ - 32^\circ - \angle(MV_1O)).$$

Asendades siia nurga MV_1O väärtused, saame jällegi Veenuse kaugused. Proovige, kas tulevad samad.

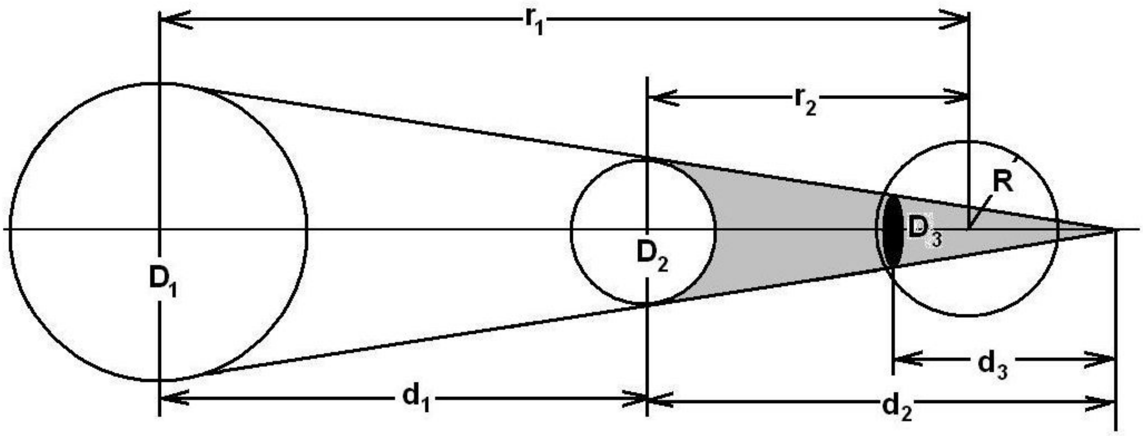
Faasi leidmine. Esimesel juhul kehtib sama seos, mis Kuu faasilgi. Järelikult on kõrvuti asuvate Kuu ja Veenuse faasid ühesugused.

Teisel juhul tuleb rehkendada. Faasi määrab nüüd nurk MV_2O. Valem tuleb:

$$\Phi = \frac{1+\cos(MV_2O)}{2} = \frac{1+\cos 49^\circ,2}{2} = 0,83 \ .$$

Ülesanne 4. Päikesevarjutus Jupiteril. Idee on järgmine: a) tuleb leida Kallisto varju läbimõõt; b) tuleb leida varju liikumiskiirus Jupiteri pinnal ja c) leida varjutuse maksimaalne aeg.

Esimene on lihtne geomeetriaülesanne ja lahendub sarnaste kolmnurkade baasil:



Andmed: $r_1 = 780000$ on Jupiteri kaugus Päikesest (Jupiteri orbiidi raadius)
$r_2 = 1822$ on Kallisto kaugus Jupiterist (Kallisto orbiidi raadius)
$D_1 = 1400$ Päikese läbimõõt; $D_2 = 4{,}28$ Kallisto läbimõõt; $R = 71{,}5$ Jupiteri raadius

Arvväärtused on tuhandetes kilomeetrites. Otsitav on varju läbimõõt Jupiteri pinnal D_3.

$$\frac{D_1}{D_2} = \frac{d_1 + d_2}{d_2}; \quad d_1 = r_1 - r_2 \quad \Rightarrow \quad d_2 = \frac{D_2}{D_1 - D_2}(r_1 - r_2) \approx \frac{D_2}{D_1} r_1 = 2385 \text{ tuh. km.}$$

$$\frac{D_3}{D_2} = \frac{d_3}{d_2}; \quad d_3 = d_2 - r_2 + R \quad \Rightarrow \quad D_3 = \frac{d_2 - r_2 + R}{d_2} D_2 = 1{,}139 \text{ tuh. km.}$$

Teise probleemi lahendamiseks tuleb leida liikuva varju kiirus liikuva vaatleja suhtes. Selleks tuleb kõigepealt jagada kaaslase orbiidi pikkus ja planeedi ümbermõõt vastavalt Kallisto tiirlemisperioodiga T_K = 16d16h31m ja Jupiteri pöörlemisperioodiga T_J = 10h ning seejärel need lahutada (kuna pöörlemine ja tiirlemine on samasuunalised). Teisendades pikkused kilomeetriteks ja perioodid sekunditeks, saame:

$$v_{vari} = v_{kaaslane} - v_{pind} = \frac{2\pi r_2}{T_{kaaslane}} - \frac{2\pi R}{T_{Jupiter}} = -4{,}54 \text{ km/s.}$$

$$t_{varjutus} = \frac{D_3}{v_{vari}} = 250 \text{ s} = 4 \text{ min. } 10 \text{ s}$$

See, et kiirus tuli miinusmärgiga, näitab, et Jupiteri pind liigub kiiremini kui kaaslase vari. Seetõttu liigub seal kaaslane Päikese ette mitte läänekaarest (nagu maise päikesevarjutuse puhul), vaid idast.

Kui tahaksime olla täiesti täpsed, peaksime arvestama ka Jupiteri liikumist Päikese suhtes – teiste sõnadega, tuleks asendada sideerilised perioodid sünoodilistega. Et aga Jupiteri tiirlemisperiood on väga palju suurem nii tema pöörlemisperioodist kui Kallisto tiirlemisperioodist, võime selle ka tegemata jätta. Suurem viga – aga ainult 0,4% ehk umbes 1 sekund – tuleb muidugi Kallisto liikumisest.

Ülesanne 5. Ülim täpsus.

Et tähesuuruste vahe väljendab heleduste suhet, tuleb arvutada kõigepealt heleduste suhe ja teisendada see siis tähesuurusteks. Kuna tegu on suhtega, ei pea me muretsema absoluutsete suuruste pärast. Et varjutatud Jupiteril jääb valgust vähemaks parasjagu nii palju, kui langeb Kallistole, saame heleduste suhteks:

$$\frac{L_v}{L} = \frac{S_{Jupiter} - S_{Kallisto}}{S_{Jupiter}} = 1 - \frac{D_2^2}{4R^2} = 0,9991.$$

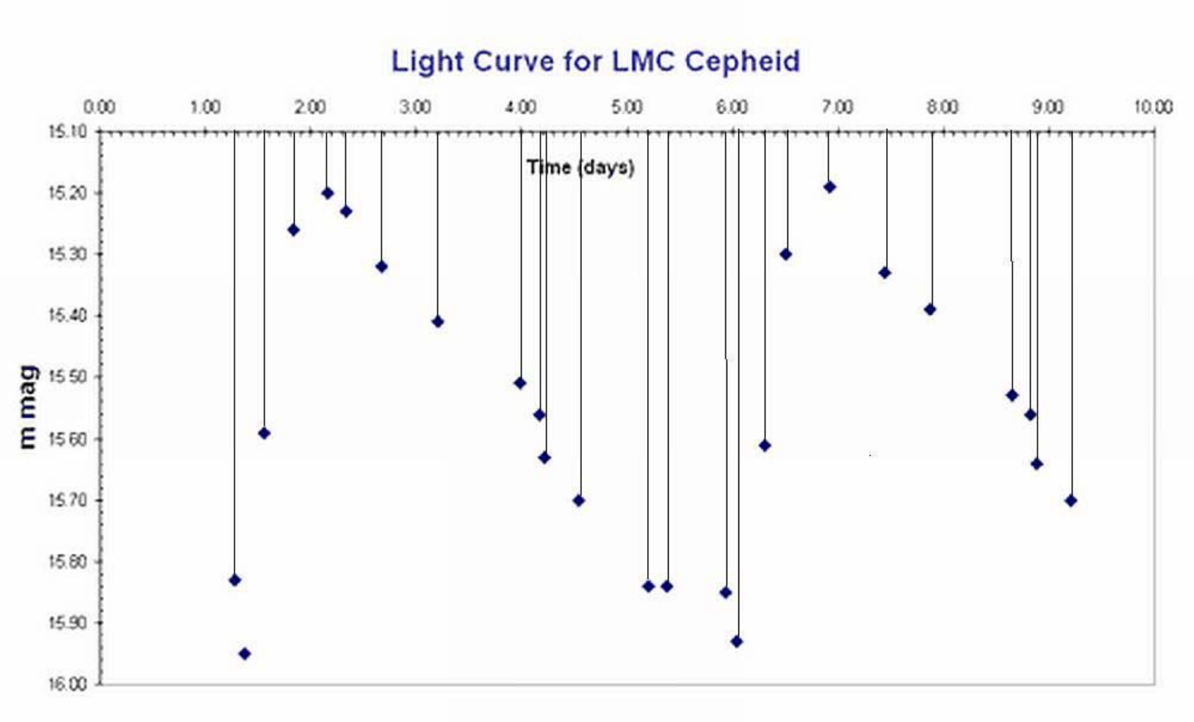
Tähesuurustes teeb see:

$$\Delta m = L - L_v = 2,5 \log \frac{L_v}{L} = -0,000973 \approx -0,001.$$

Napilt, aga siiski… Miinusmärk tuleb sellest, et heledama (varjutamata) Jupiteri tähesuurus on väiksem kui varjutuse ajal.

Ülesanne 6. Muutlik täht.

Avalikustame originaalfaili. Tegu oli niisiis tsefeiidiga Suures Magalhaes´i pilves, seega pulseeriva tähega. Varjutusmuutliku tähe miinimumid peavad olema sümmeetrilised..



Tähelepanuks: heleduskõvera tegemisel tuleks arvestada, et väiksem number tähistab suuremat heledust. Niisiis, pulseeriva tähe heledus kasvab kiiresti ning kahaneb aeglaselt. Kui tähesuuruste telg ümber pöörata, oleks pilt vastupidine…