ASTRONOOMIA
LAHTINE VÕISTLUS

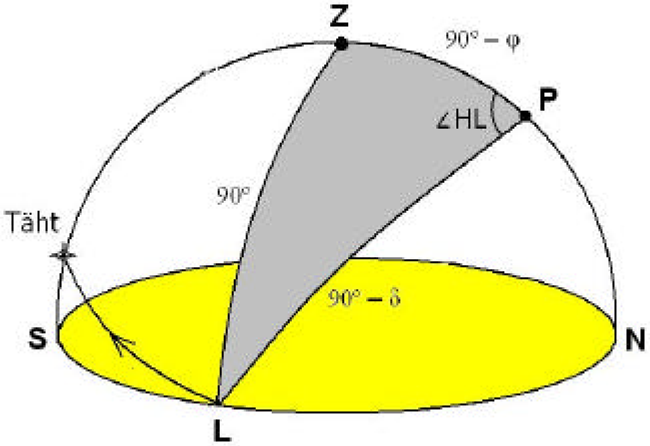
Tartus, 8. märtsil 2009

Lahendused

Vanem rühm

1. Orjatäht tõuseb. Eesti rahvaastronoomias kutsutakse taeva heledaimat tähte Siiriust Orjatäheks. Pärimuse järgi lasti teoorjuse aegu talumehed mõisa rehepeksult koju siis, kui orjatäht oli tõusnud.
Arvutage, mis kell lõppes rehepeks mardipäeval, 10. novembril. Siiriuse koordinaadid on
a = 6h45m, d = - 16º43' .

Lahendus: Tähe otsetõus annab meile tema kulminatsioonimomendi täheajas. Et sügisesel pööripäeval on täheaeg ja keskmine päikeseaeg samad, tuleb päikeseajast lahutada nurk, mille Maa on läbinud sügisesest pööripäevast möödunud aja jooksul. Sügisest pööripäeva (21. september) lahutab mardipäevast (10. november) 51 päeva, mille jooksul nn "keskmine Päike" liigub piki ekvaatorit (24h / 365,244p) · 51p = 3,35 h



Nüüd saame arvutada Siiriuse kulminatsiooniaja. Lahutame otsetõusust 6,75 tundi 3,35, saame kell 3,40 ehk 3h24m. Selge, et tõuseb Siirius mõnevõrra varem. Aga kui palju varem, selle määrab nurk HL, mille leiame sfäärilisest kolmnurgast ZPL, kasutades koosinuslauset:

$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C \;;$$

mis praegusel juhul annab

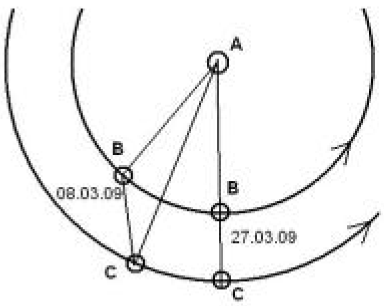
$$\cos 90° = \cos(90° - \varphi)\cos(90° - \delta) + \sin(90° - \varphi)\sin(90° - \delta)\cos(\mathrm{HL})\,.$$

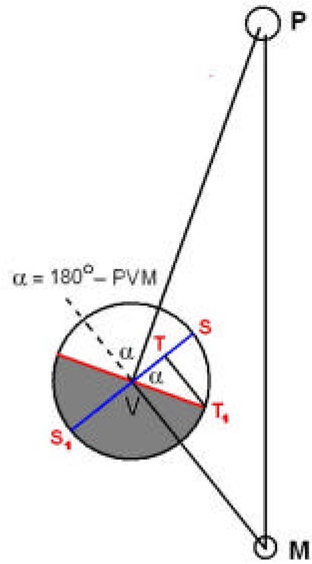
$$0 = \sin\varphi \sin\delta + \cos\varphi\cos\delta\cos(HL) \quad \longrightarrow \quad \cos(HL) = -\frac{\sin\varphi\sin\delta}{\cos\varphi\cos\delta} = -\tan\varphi\tan\delta$$

Ilus valem, kõlbab igaks elujuhtumiks. Paneme siia f = 58º,5; d = -16º,7 saame nurga HL väärtuseks 60º,7 ehk 4h03m. Seega tõuseb Siirius 10. novembril kell (3h24m – 4h03)m = 23.21 . (Päris hea tulemus – StarCalc annab 23.34!)

2. Ehatäht Veenus. Õhtul välja minnes leiate läänetaevas üliheleda "tähe". See on meie naaberplaneet Veenus, mis jõudsalt läheneb alumisele ühendusele. Päikesega kohakuti jõuab Veenus 27. märtsil.
Arvutage, kui kaugel on Veenus Maast täna õhtul. Leidke ka Veenuse faas ja joonistage, millisena ta paistab teleskoobis. Maa ja Veenuse orbiidid võib lugeda ringjoone kujuliseks.

Lahendus:





Veenus liigub ühe päevaga 360/(365,24 x 0,7) = 1,4 kraadi, Maa 360/365,24 = 0,99 kraadi. Iga päevaga kahaneb nurk BAC seega 1,4 -0,99 = 0,41 kraadi võrra. 19 päeva enne ühendust (nurk BAC = 0 kraadi) on seega BAC = 19 x 0,41 = 7,8 kraadi. Koosinuslausest leiame nüüd kauguse BC: $BC^2 = BA^2 + CA^2 – 2$ BA CA cos (BAC) = 0,49 + 1 – 2 x 0,7 cos (7,8º) = 0,103, millest CB = 0,32 aü. ehk 48,1 miljonit kilomeetrit.

Faasiga tuleb vaeva näha. Kuu faasi valem ei kõlba, kuivõrd suund Veenuselt Päikesele erineb oluliselt suunast Maalt Päikesele. Parempoolsel joonisel määrab faasi nurk a, mis tuleb leida. Tema täiendnurga MVP saame siinuslausest:

$$\frac{\sin(VPM)}{VM} = \frac{\sin(PVM)}{PM} \quad \longrightarrow \quad \frac{\sin(7,8^\circ)}{0,32} = \frac{\sin(180^\circ - \alpha)}{1},$$

$$\sin\alpha = \sin(180^\circ - \alpha) = \sin(7,9^\circ)/0,32 = 0,43 \quad \longrightarrow \quad \alpha = 25,4^\circ.$$

Faasi saame tavalisest valemist:

$$\Phi = (1 - \cos\alpha)/2 = 0,05$$

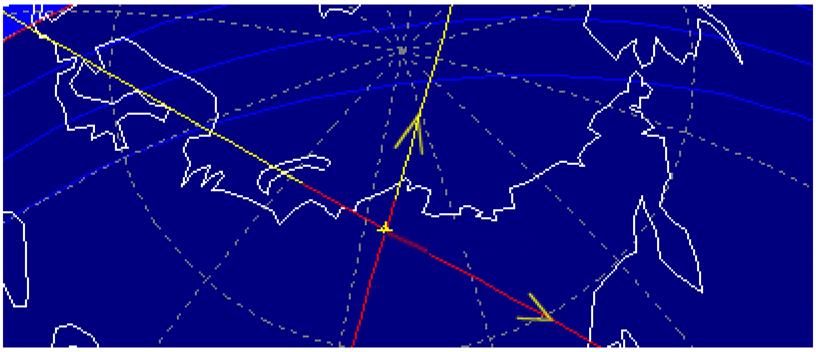
ehk 5 protsenti. Nii nurk kui faas tulevad mõnevõrra väiksemad kui tegelikud, kuna Veenus on sel ajal tervelt 8 kraadi ekliptikast kõrgemal.

3. Triton. Neptuuni kaaslane Triton paistab meile 13,5 suurusjärgu tähekesena ja tema vaatlemine nõuab päris head teleskoopi. Kui heledana paistaks Triton, kui ta tiirleks Marsi ümber, Marsi keskmise vastasseisu ajal?

Lahendus: Neptuuni (ärgem laskugem detailidesse) kaugus Päikesest on 30,1 aü., Maast "keskmises vastasseisus" seega 29,1 aü. Marsi kaugus Päikesest 1,52 ja Maast 0,52 aü. Seega saaks Marsi ümber tiirutav Triton Päikeselt $(30,1/1,52)^2$ = 392 korda rohkem valgust kui oma praegusel asukohal. Seda 392 korda heledamat Tritoni vaatame 29,1/0,52 korda lähemalt ja nii kasvab tema näiv heledus veel $(29,1/0,52)^2$ = 3130 korda. Kokku peaksime saama objekti, mis on (praegusest) Tritonist 392 x 3130 ˜ 1,23 miljonit korda heledam. Tähesuurustes tähendab see $m = m_0 - 2{,}52 \cdot \log(1{,}23 \cdot 10^6) = 13{,}5 - 15{,}3 = -1{,}8$ tähesuurust ehk ainult pisut tuhmim kui Marss.

Kas tulemus on usutav? Põhjenda, miks!
(D_{marss} = 6800 km; D_{triton} = 2700 km; A_{marss} = 0,15; A_{triton} = 0,76)

4. Kokkupõrge kosmoses. 10. veebruar 2009 läheb kosmonautika ajalukku: 776 km kõrgusel Taimõri poolsaare kohal põrkasid kokku vene tehiskaaslane Kosmos-2251 ja USA sidesatelliit Iridium-33. Mõlemad hävisid täielikult, maailmaruumi paisati 500 suuremat ja arvutu hulk väiksemaid tükke. See oli kosmonautika 52 aastase ajaloo jooksul esimene tõeline "kosmiline kokkupõrge". Satelliitide asukoht ja liikumisteed on kujutatud alloleval kaardil.



Arvutage tehiskaaslaste suhteline kiirus põrkemomendil ning põrkel vabanenud energia, oletades, et nad mõlemad liikusid ringorbiidil. Kosmos-2251 mass oli 900 kg, Iridiumil 690 kg.

Lahendus: Teades orbiidi kõrgust, leiame kaaslaste orbitaalkiirused. Ringorbiidi korral:

$$\frac{mv^2}{R_\oplus + h} = \frac{GmM_\oplus}{(R_\oplus + h)^2} \quad \longrightarrow \quad v^2 = \frac{GM_\oplus}{R_\oplus + h} = \frac{6.67 \cdot 10^{-11} \cdot 6^{24}}{(6,371 + 0,776) \cdot 10^6} = 5,6 \cdot 10^7.$$

millest v = 7483 m/s .

Et leida suhtelist kiirust, peame arvestama põrkenurka. Kaardi järgi põrkuvad tehiskaaslased umbes 110° nurga all. Jagame teise tehiskaaslase kiiruse kaheks komponendiks, milledest üks on esimese kaaslase kiirusega samasihiline, teine ristsuunaline. Samasihilise jaoks:
$v_{samasihil} = v \cos 110° = 7483 \cdot (-342) = -2560$ km/s. Seega on kohtumise suhteline kiirus umbes 10 km/s.

Põrke energia leidmisel lähtume oletusest, et tegu on täielikult mitteelastse põrkega. Põrkel tekkiva liitkeha impulss peab olema võrdne põrkuvate kehade impulsside (vektor)summaga. Seda on mõnus teha ristkoordinaatides: olgu x-telg piki Kosmos-2251 liikumissuunda. Siis:
$p_{x,K} = 900 \cdot 7483 = 6{,}73 \cdot 10^6$; $p_{x,K} = 0$
$p_{x,I} = 690 \cdot (-2560) = -1{,}77 \cdot 10^6$; $p_{y,I} = 690 \cdot 7483 \cdot \sin(110°) = 4{,}86 \cdot 10^6$.
Pärast põrget on liitkeha impulss:
$p_x = 4{,}96 \cdot 10^6$; $p_y = 4{,}86 \cdot 10^6$.
ja kiirused:
$v_x = p_x / (m_K + m_I) = 4{,}96 \cdot 10^6 / (900 + 690) = 3120$ m/s
$v_y = p_y / (m_K + m_I) = 4{,}86 \cdot 10^6 / (900 + 690) = 3057$ m/s.
Kogukiiruse saame v = 4368 m/s.
Põrkel vabaneb seega energia:

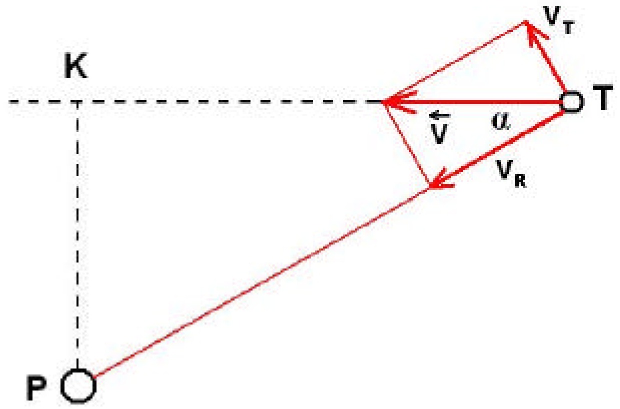
$$E = \frac{m_I(v_I^2 - v^2)}{2} + \frac{m_K(v_K^2 - v^2)}{2} = 5,87 \cdot 10^{10} \mathrm{J}.$$

mis vastab umbes 14 tonni trotüüli plahvatusele.

5. Lähenev täht. On teada, et Maale lähim täht on Proxima Centauri, mis asub Päikesest 4,243 valgusaasta kaugusel. Aga sel tähel on konkurent: Barnardi täht, mis praegu on kauguselt teisel kohal, asudes meist 5,98 va. kaugusel, läheneb meile kiirusega 106,8 km/s. Päris otsa ta Päikesele ei jookse, kuna tema omaliikumine 10,37 kaaresekundit aastas viib ta meist kõrvale.

Arvutage, millal on Barnardi täht Päikesele kõige lähemal. Kui kaugelt ta meist möödub?

Lahendus:



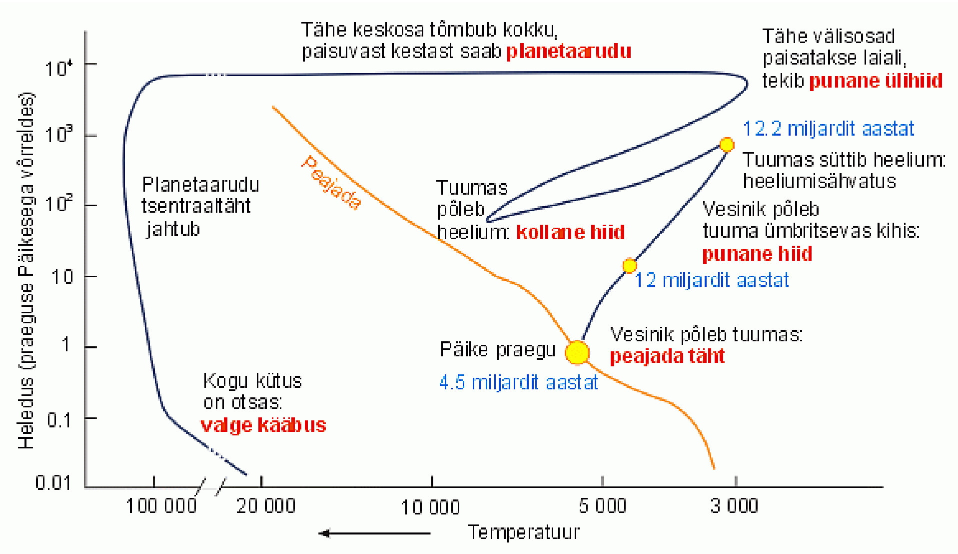
Tähe ruumkiiruse saame, kui liidame (vektoritena!) tema radiaal- ja tangentsiaalkiirused. Radiaalkiirust me teame, tangentsiaalkiirus tuleb arvutada omaliikumisest. Selleks tuleb teisendada omaliikumise ühik "kaaresekundit aastas – SI süsteemi nurkkiiruse ühikuteks (radiaani sekundis):
1"/a = (206265 "/rad · 365,244 p./a. · 24 h/p. · 60 min/h · 60 s/min)$^{-1}$ = 1,54 · 10^{-13} rad/s
Nüüd saame omaliikumisest tangentsiaalkiiruse, kui korrutame teda tähe kaugusega kilomeetrites:
v_T = 10,37 "/a · 1,54 · 10^{-13} · 5,98 va. · 9,46 · 10^{12} km/va = 90,3 km/s.
Teades v_T ja v_R, saame leida nii ruumkiiruse v kui nurga a :

$$v = \sqrt{v_T^2 + v_R^2} = 139,8 \mathrm{km/s}; \qquad \alpha = \arctan \frac{v_T}{v_R} = 40°,1.$$

Kolmnurgast PKT saame nüüd leida tähe minimaalse kauguse Päikesest ning aja, mis kulub tähel sellele kaugusele jõudmiseks:

$$r_{min} = r \sin \alpha = 3,85 \mathrm{va}; \qquad t = \frac{AB}{v} = \frac{r \cos \alpha}{v} = 3,1 \cdot 10^{11} \mathrm{s} = 9800 \mathrm{a}$$

6. Suur ja väike Päike. Sellel graafikul – HR diagrammil – on kujutatud Päikese evolutsioon praegusest seisundist (peajadal) kuni valgeks kääbuseks muutumiseni. Graafiku telgedeks on temperatuur ja absoluutne bolomeetriline heledus.



Hinnake, milline on Päikese suurim ja väikseim läbimõõt graafikul toodud evolutsiooni vältel

Lahendus: Võtmeks on kogukiirgusvõime sõltuvus temperatuurist (Stefani-Boltzmanni seadus). Kui täht on hele ja madala temperatuuriga, peab tema kiirgav pind olema suur; kui temperatuur on kõrge ja heledus väike, siis on ka pindala väiksem. Tähistades Päikese praegused parameetrid L_0 (heledus), T_0 (temperatuur), S_0 (pindala), saame seose

$$\frac{L}{L_0} = \frac{\sigma T^4 \cdot S}{\sigma T_0^4 \cdot S_0} \quad \longrightarrow \quad \frac{L}{L_0} = \left(\frac{T}{T_0}\right)^4 \cdot \frac{S}{S_0},$$

millest

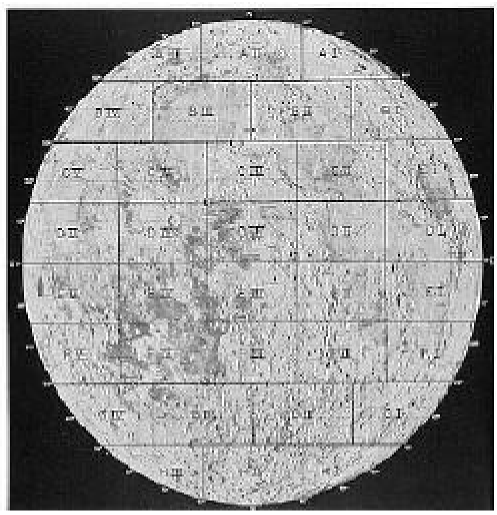
$$\frac{R}{R_0} = \sqrt{\frac{S}{S_0}} = \sqrt{\frac{L}{L_0}} \cdot \left(\frac{T_0}{T}\right)^2.$$

Jooniselt saame "suure Päikese" jaoks $L = 8000\ L_0$, $T = 3000$ K ja $T_0 = 5800$ K, millest $R = 334\ R_0$. "Väike Päike" tuleb, kui $L = 0{,}1\ L_0$ ja $T = 90000$ K, millest $R = 0{,}0013\ R_0$.

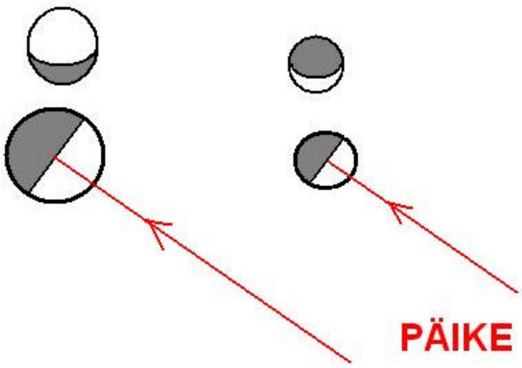
Noorem rühm

1. Maa Kuult vaadatuna. Alltoodu on ilmselt üks Apollo-11 kuulsamaid pilte. Kuulaeva orbitaalmoodulilt on pildistatud Maad Kuu horisondi kohal. Mõned väidavad, et pilt on võltsing… Meie arvame, et ei ole. Sellisel juhul:

Märkige Kuu kaardile koht, kust pilt tehti. Milline oli Kuu faas pildistamise hetkel, Maalt vaadatuna? Põhjendage!



Vastus: a) Kuivõrd Maa on horisondi lähedal, peab koht, kust teda pildistati, asuma Kuu Maalt nähtava poolkera serval. Et Maa terminaator on paralleelne Kuu horisondiga, peab pilt olema tehtud ekliptika tasandis, seega enam-vähem Kuu ekvaatoril. b) Kuu faas Maalt vaadatuna on täiendiks Maa faasile Kuult vaadatuna (vt. joonist).



2. Kosmoselaev. Enne Marsile laskumist otsustasid kosmonaudid viia laev 500 km kõrgusele ringorbiidile. Kui laev oli planeedist 400 000 km kaugusel, oli tema kiirus 2 km/s ja ta liikus otse Marsi suunas. Milliseid manöövreid pidi sooritama laeva komandör, et eesmärk saavutada? Kui palju kulus selleks energiat? Laeva mass on 8600 kg.

Lahendus: Kõigepealt tuleb laev Marsist mööda juhtida. See tähendab möödumist 500 km kaugusel pinnast ehk 3900 km kaugusel Marsi tsentrist. Seda on kõige parem rehkendada impulssmomendi jäävuse seaduse (mis vastab Kepleri II seadusele!) abil.
Algmomendil t_0 on laeva kaugus R_2 = 400000 km ja algkiirus v_0 = 2 km/s. Kiiruse, millega laev jõuab 500 km kaugusele Marsi pinnast leiame energia jäävuse seadusest

$$E1 = E_{k,orb} = E_{k0} + ?E_{pot} \ (400\,000 \text{ km } ? \ 5900 \text{ km})$$

Gravitatsioonivälja potentsiaalne energia avaldub valemiga

$$E_{pot} = \gamma \frac{Mm}{R}.$$

Planeedile lähenemise käigus väheneb tema kaugus Marsi keskpunktist väärtuselt 400000 km kuni orbitaalse R_{marss} + h = 3900 km-ni. Sellega kaasneb potentsiaalse energia muutus

$$\Delta E_{pot} = \gamma Mm \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right).$$

Pannes siia Marsi massi M, kosmoselaeva massi m ja ülaltoodud kaugused, leiame, et potentsiaalne energia väheneb $1{,}012 \cdot 10^{11}$ J võrra. Nii tuleb Marsi pinnast 500 km kõrgusele kukkunud kosmoselaeva energiaks

$$E_1 = \frac{mv_1^2}{2} + \Delta E_{pot} = E_{kin,orb} = \frac{mv_{1,orb}^2}{2} = 1,184 \cdot 10^{11} \text{ J.}$$

Siit leiame, et Marsist 500 km kaugusele "kukkuva" laeva kiirus on pinnast 500 km kaugusele jõudmise hetkel $v_{1,orb}$ = 5250 m/s.
Impulssmomendi jäävuse seadusest leiame sellele vastava raadiusvektori suhtes risti oleva kiiruse komponendi v_2 kaugusel 400000 km :

$$L_1 = L_2 \rightarrow I_1\omega_1 = I_2\omega_2 \rightarrow mR_1^2 \frac{v_{1,orb}}{R_1} = mR_2^2 \frac{v_2}{R_2} \rightarrow v_{1,orb}R_1 = v_2 R_2 \rightarrow v_2 = v_{1,orb}\frac{R_1}{R_2} = 51\,\mathrm{m/s}.$$

See on suhteliselt väike manööver, energiat kulub vaid $mv_2^2/2 = 1{,}12 \cdot 10^7$ J ˜ 3,1 kWh.

Suurem pidurdamine tuleb orbiidile minekul, kuna see peab kustutama 400 000 km kõrguselt kukkumise energia. Orbitaalne kiirus 500 km kõrgusel ringorbiidil on

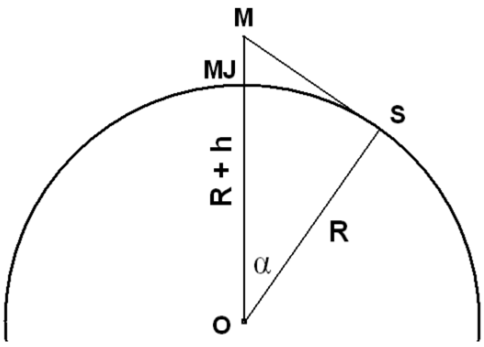
$$v_1 = \sqrt{\frac{\gamma M}{R + h}} = 3300\mathrm{m/s}.$$

Seega peab komandör vähendama laeva kiirust 5250 – 3300 = 1950 m/s võrra. Selleks manöövriks kulub energiat $1{,}63 \cdot 10^{10}$ J, mis on hulga suurem kui orbiidi muutmiseks vajaminev energia. Seepärast eelisataksegi orbiidile viimiseks kasutada mootorite asemel pidurdamist atmosfääris (kui planeedil, millele lähenetakse, on atmosfäär olemas).

3. Kõrgelt näeb kaugele. Päikesesüsteemi kõrgeim mägi asub Marsil, tema nimeks on Olümpos (lad. Olympus Mons) ja tema kõrgus on 27 km. No sealt peaks küll kaugele nägema… Aga kui kaugele? Ehk – kui kaugel mäe tipust on Marsil silmapiir?

Olümpos pole Marsil ainuke suur mägi. Temast vaid 900 km kaugusel asub 18 km kõrgune Ascareus Mons. Ega see äkki Olümpose tippu ära ei paista?

Lahendus:



Kui mägi väike, võiks kasutada Pythagorase lauset: $MS^2 = (R + h)^2 - R^2$. Aga mägi on suur ja kaugusi mõõdetakse piki planeedi pinda. Niisiis tuleb leida kaar MJ – S. Seega: leiame nurga a (radiaanides!) ja korrutame Marsi raadiusega:
a = arc cos (R/(R + h) = arc cos (3390/(3390 + 27) = arc cos 0,992 = 0,126. Kaare MJ – S pikkus tuleb nüüd 0,126 · 3390 = 426 km. (Mis on tervelt **kaks kilomeetrit** väiksem kui Pythagorase teoreemist arvutatu.)

Kui panna valemisse Ascareus Mons kõrgus (mis on väiksem), saame väiksema numbri. Mäed on "silmsides", kui nende silmapiirid kattuvad. Aga nende kahe kauguse liitmine ei anna kuidagi vajalikku 900 kilomeetrit. Nii et Olümpose otsast Ascareus ei paista…

Huvitav on see, et kui need mäed asuksid (suuremal) Maal, oleks ühe tipust teine näha.

4. (vt vanema rühma ül. 5)

5. Tähesuurused enne ja nüüd. Hipparchos Nikaiast defineeris aastal 135 B.C. tähesuurused nii, et kõige heledama tähe tähesuurus võeti võrdseks ühega, sellest poole tuhmimal kahega, sellest omakorda poole tuhmima tähe tähesuuruseks saadi 3 jne. Oletades, et heledaim täht oli ka tol ajal Siirius (praegustel andmetel –1^{m},46), arvutage selle naabertähe Prooküoni (0^{m},36) heledus Hipparchose süsteemi järgi

Lahendus: Erinevus ühe tähesuuruse võrra tähendab praeguses süsteemis 2,512 kordset, Hipparcosel aga kahekordset heleduste erinevust. Valemites näeb see välja:

$$\frac{I_1}{I_2} = 2^{\Delta m_{Hip}} = 2,512^{\Delta m_{praegu}} \quad \longrightarrow \quad \log\left(\frac{I_1}{I_2}\right) = \Delta m_{Hip} \log 2 = \Delta m_{praegu} \log 2,512,$$

millest

$$\Delta m_{Hip} = \frac{\log 2,512}{\log 2} \Delta m_{praegu} = 1,33 \Delta m_{praegu}.$$

Et tähesuuruste erinevus on praeguses süsteemis ? m = 1,82, saame Hipparcose süsteemi jaoks ? m_{Hip} = 2,42. Omistades nüüd Siiriusele tähesuuruse m = 1, tuleks Prooküoni oma m = 3,42.

Eks ole ju meie praegune süsteem mõistlikum?

6. (on sama, mis vanemal rühmal)