

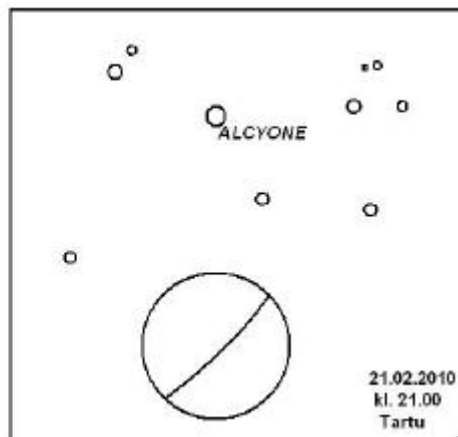
ASTRONOOMIA LAHTINE VÕISTLUS

Tartus, 7. märtsil 2010

Ülesannete lahendused

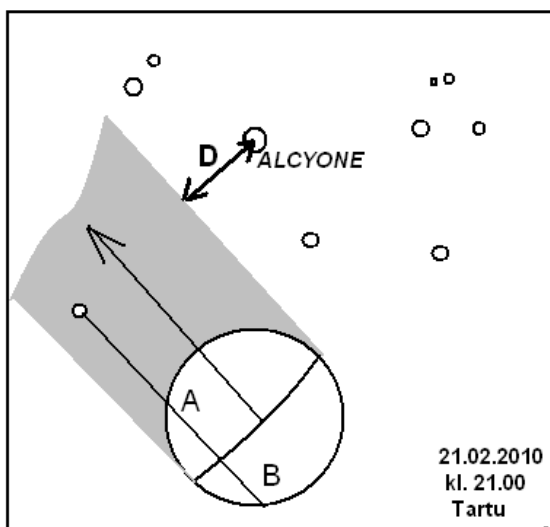
N ja V, 1. Kuu katab Sõela. Tähtede kattumine Kuuga on üks tähevaatlejate lemmiksündmusi. Aga mis siis, kui Kuu katab täheparve?

Täpselt kaks nädalat tagasi, 21. veebruaril, kohtus noor Kuu Plejaadide täheparvega, mida Eestis tuntakse Sõelatähtede nime all. Joonisel olev taevakaart vastab ajahetkele täpselt kl. 21; vaatluskoht on Tartu.



- Joonistage parempoolsele skeemile noolega Kuu liikumissuund ja arvutage, millal kaob Kuu serva taha tema teele jääv täht.
- Kas Kuu katab ka Sõela heledaima tähe Alcyone? Kui ei, siis kuhu peaksime reisima, et kattumine aset leiaks?

Lahendus:



Nii Kuu kui Päike liiguvad piki ekliptikat läänest itta (joonisel paremalt vasakule). Joonisel olev noorkuu liigub Päikesest eemale, seega vasakule. Et varjujoon (terminaator) on ekliptikaga risti, saame liikumissuuna (märgitud noolega) ning selle juurde kuuluva „koridori“, millesse jäävad tähed varjutatakse.

a) Varjutuse alguse ja kestuse määramiseks rehkendame kõigepealt Kuu liikumise kiiruse: $360^\circ / (27,5 \text{ päeva} \times 24 \text{ tundi})$ annab 0,55 kraadi ehk ligikaudu üks Kuu läbimõõt tunnis. Jooniselt mõõdetuna jääb Kuu servast täheni 0,8 Kuu läbimõõtu. Seega kaob täht umbes kell 21.50.

b) Varju tee servast Alcyoneni jääb umbes pool Kuu läbimõõtu. Maalt vaadatuna kaob täht hetkel, kui Kuu vari jõuab vaatlejani. Et tähed asuvad väga kaugel, on Kuu vari maapinnal Kuuga ühesuurune, st. tema läbimõõt on 3500 km. See, et Alcyone jääb varju teest põhja poole, tähendab, et vari möödub vaatlejast lõuna poolt ja varjutuse nägemiseks tuleks minna pool Kuu läbimõõtu ehk 1750 km lõuna poole.

N-2. Raskusjõud Saturnil. Saturn on Päikesesüsteemi planeetide seas teisel kohal nii suuruselt ja massilt. Ometi on raskuskiirendus selle hiidplaneedi ekvaatoril peaaegu niisama suur kui Maal – $10,44 \text{ m/s}^2$. See tähendab, et Maal 70 kG kaaluv inimene kaaluks Saturni ekvaatoril 75 kG. Põhjuseks on planeedi kiire pöörlemine ja sellest tingitud suur lapikus: tema pöörlemisperiood on vaid 10 tundi 34 minutit ja planeedi ekvaator on keskpunktist 5900 km kaugemal kui ekvaator.

Arvutage, kui palju kaalub seitsmekümne kilone mees Saturni poolusel.

Lahendus: Mehe kaal planeedi pinnal P on temale mõjuv gravitatsioonijõud, millest on lahutatud planeedi pöörlemisest tulenev tsentrifugaaljõud. Et poolusel pöörlemine puudub, on seal kaal võrdne gravitatsioonijõuga, st. $P_p = F_{G,p}$. Kuivõrd lapiku planeedi korral on poolus tõmbetsentrile lähemal kui ekvaator, saame gravitatsiooniseadusest:

$$F_G = G \frac{Mm}{R^2} \Rightarrow \frac{F_{G,p}}{F_{G,e}} = \left(\frac{R_e}{R_p} \right)^2.$$

Et meile on antud mehe kaal ekvaatoril P_e , tuleb gravitatsioonijõu saamiseks liita sellele tsentrifugaaljõud

$$F_{ts} = \frac{mv_e^2}{R_e},$$

kus $m = 70 \text{ kg}$ on mehe mass, $R_e = 9,4 R_{\text{Maa}} = 59000 \text{ km}$ Saturni ekvatoriaalraadius ja $v_e = 2\pi R_e / T$ ($T = 10,5$ tundi on Saturni pöörlemisperiood), saame $F_{ts} = 114 \text{ N} \sim 11 \text{ kG}$, millest

$$P_p = \left(\frac{R_e}{R_p} \right)^2 (P_e + F_{ts}).$$

Pannes siia algandmed, saame mehe kaaluks Saturni poolusel $P_p = 106 \text{ kG}$.

N-3. Sünoodiline periood. On teada, et Päikesesüsteemi planeedid tiirlevad kõik peaaegu samas tasandis olevatel ringorbiitidel. Oletagem, et just praegu möödub üks selline planeet Maast 30 miljoni kilomeetri kauguselt. Millal võiks toimuda järgmine möödumine?

Ajavahemikku kahe kohtingu vahel nimetatavad astronoomid sünoodiliseks perioodiks. Hoiatame: ülesandel on rohkem kui üks vastus.

Lahendus: Kaugus planeetide vahel nende möödumishetkel tähendab ringorbiitide korral orbiitide vahelist kaugust. Et ülesandes polnud öeldud, kas tegu on sise- või välisplaneediga, sobivad orbiidid raadiusega 150 ± 30 miljonit km ehk 1,2 ja 0,8 aü.

Perioodid leiame Kepleri 3. seadusest: $T_v = 1,2^{1,5} = 1,315 \text{ a}$ ja $T_s = 0,8^{1,5} = 0,715 \text{ a}$.

Sünoodiliste perioodide arvutamise valem on

$$\frac{1}{T_s} = \frac{1}{T_{pl}} \mp \frac{1}{T_{Maa}},$$

kus märk miinus pannakse juhul, kui planeedid tiirlevad samas suunas, märk pluss aga siis, kui tiirlemine on vastassuunaline. Pannes siia ülal leitud perioodid, saame neli vastust:

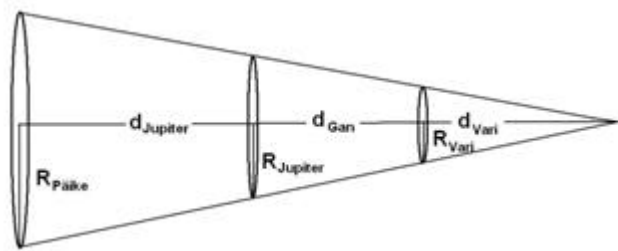
$$T_{p,s} = 2,51 \text{ a}; \quad T_{p,v} = -4,18 \text{ a}; \quad T_{v,s} = 0,43 \text{ a}; \quad T_{v,v} = 0,57 \text{ a}.$$

Märk pluss näitab, et planeet möödub Maast Maa liikumisele vastassuunas, miinus aga seda, et möödumine on Maa liikumisega samasuunaline (Maa möödub planeedist).

N-4. Ganymedese varjutus. Päev pärast astronoomiahuviliste tänavust kokkutulekut (11. – 15. august, Pärnumaal) pakub Jupiter teleskoobiomanikele oodatud vaatemängu – planeedi varju kaob Päikesesüsteemi suurim ja heledaim kuu Ganymedes. Varjutus algab ööl vastu 17. augustit kell 23.41.

Kui kaua varjutus kestab? Kas me näeme Ganymedest enne, kui ta kell 3.21 planeedi serva taha kaob? Ganymedese kaugus Jupiterist on $1,07 \cdot 10^6 \text{ km}$.

Lahendus: Leiame kõigepealt Jupiteri varju läbimõõdu Ganymedese orbiidi kaugusel. Geomeetriast:



$$d_{\text{vari}} = \frac{R_{\text{Jupiter}} d_{\text{Jupiter}}}{R_{\text{Päike}} - R_{\text{Jupiter}}} - d_{\text{Gan}} = 7,015 \text{ milj. km}$$

Siit on lihtne leida varju läbimõõdu

$$R_{\text{vari}} = \left(1 - \frac{d_{\text{Gan}}}{d_{\text{vari}}}\right) R_{\text{Jupiter}} = 60500 \text{ km}.$$

Varjutus tekib siis, kui orbiidil liikuv kaaslane läheb läbi Jupiteri varju. Maksimaalse kestuse saame juhul, kui kaaslane liigub piki varju keskjoo:

$$T_{\text{max}} = 2 R_{\text{vari}} / v_{\text{Gan}}$$

Valemist puudub Ganymedese kiirus; selle saame leida, jagades orbiidi pikkuse tiirlemisperioodiga. Kui on antud ainult kaaslase kaugus Jupiterist, tuleb ringorbiidil liikumise kiirus arvutada ringkiiruse valemist

$$v_{\text{orb}} = \sqrt{\frac{GM_{\text{Jupiter}}}{d_{\text{Gan}}}} = 10,9 \text{ km/s}.$$

Pannes selle eelmisse valemisse, saame varjutuse maksimaalseks kestuseks 3,08 tundi ehk 3 tundi ja 5 minutit. Kuna varjutuse alguse ning Ganymedese Jupiteri taha kadumise vaheline aeg on $3.21 + (24 - 23.48 = 0.12) = 3$ tundi 33 minutit, peab Ganymedes pärast varjutuse lõppu vähemalt 28 minutiks nähtavale ilmuma.

N-5. Kui Prooküon plahvatab. Kosmoloogide uusim vahend galaktikate kauguse määramiseks on Ia tüüpi supernoova plahvatus. Teooria järgi põhjustab selle plahvatuse valge kääbuse kollaps, mis leiab aset siis, kui aine juurdevool naabertähelt viib kääbuse massi suuremaks tasakaalupiirist, mis võrdub 1,4 Päikese massiga. Et plahvatavad tähed on kõik ühesugused, on ühesugune ka nende maksimaalne heledus – see vastab $-19,3$ tähesuursele.

Lähim süsteem, kuhu lisaks tavalisele tähele kuulub ka valge kääbus, on Väikese Peni heledaim täht Prooküon. See asub 3,5 parseki kaugusel ja tema näiv heledus on 0,34 tähesuurst. Kui Prooküoni valgest kääbusest kaaslane peaks plahvatama, milline oleks siis tema maksimaalne heledus Maalt vaadatuna? Võrrelge seda Päikese ja täiskuu heledusega.

Lahendus: Näiva tähesuurse saame Pogsoni valemist:

$$m = M - 5 + 5 \log D = -19,3 - 5 + 5 \log 3,5 = -21,8.$$

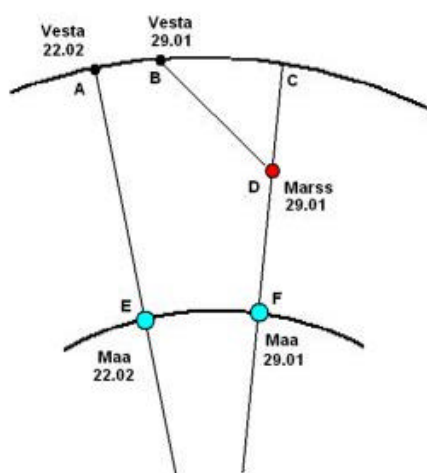
See on ligi 100 korda tuhmim Päikesest, aga 4200 korda heledam kui täiskuu.

V-2. Vesta ja Marss. On vaid üks asteroid, mida on lootust näha palja silmaga – see on Vesta, suuruselt teine, kuid heleduselt esimene, seda tänu heledamale pinnale. 22. veebruaril, kui Vesta oli vastasseisu, möödeti tema heleduseks 6,1 tähesuurst; selline täheke peaks pimedal ööl isegi näha olema.

Huvitaval kombel oli vaid kolm nädalat varem (29. jaanuaril) Marsi vastasseis. Tõsi küll, see oli kehvapoolne, kuna Maa kaugus Marsist oli tervelt 100 miljonit kilomeetrit.

Hinnake Marsi ja Vesta vahelist kaugust 29. jaanuaril. Vesta keskmise kaugus Päikesest on 2,15 aü, tema orbiit lugege ringjooneliseks. Kui hele oluks Vesta siis Marsilt vaadelduna?

Lahendus:



AE = FC = 1,15 aü – Maa ja Vesta orbiitide vaheline kaugus

FD = 100 milj. km = 0,67 aü – Marsi kaugus Maast vastasseisu ajal

CD = 1,15 – 0,67 = 0,48 aü – Marsi kaugus Vesta orbiidist

FE = 21 päevaga läbib Maa orbiidil kaare $21 \times 6,28 / 365 = 0,36$ aü

Vesta tiirlemisperiood on $2,15^{3/2} = 3,15$ aastat

AB – 21 päevaga läbib Vesta oma orbiidil

$(21 \times 6,28 \times 2,15) / (365 \times 3,15) = 0,25$ aü

AC – kaarele EF vastav Vesta orbiidi kaar,

pikkus EF $\times 2,15 = 0,36 \times 2,15 = 0,77$ aü

BC = AC – AB = 0,52 aü

BD: $BD^2 = BC^2 + DC^2 \rightarrow BD = 0,71$ aü

Kuna Mars on Vestale $1,15 / 0,71 = 1,6$ korda lähemal kui Maa, peaks tema heledus Marsilt vaadatuna $1,6^2 = 2,62$ korda heledam ja paistma 5 suurusjärgu tähena.

V-3. Kaksiktähtede kuninganna. Luige tähtkuju kaksiktähte Albireo (ß Cygni) peavad taevavaatlejad kõige ilusamaks. Kuldkollase peatähe kõrval, sellest 35 kaaresekundi kaugusel on näha erksinine kaaslane.

1976. aastal leiti, et peatähe (Albireo A) lummava värvi tingib asjaolu, et see koosneb omakorda kahest väga erineva temperatuuriga tähest. Heledam neist, K3-klassi hiidtäht on oranžikat värvi, tema ülikuum (temperatuuriga 30000 kraadi), aga 10 korda tuhmim kaaslane lisab sellele kuldseläike. Kolmas, Albireo B, on üsna tavaline peajada täht absoluutse heledusega $M_V = -0,36$. Süsteem asub meist 400 va kaugusel; tema näiv koguheledus on 2,9 tähesuurst



Leidke kõigi komponentide heledused Päikese ühikutes. Hinnake ka läbimõõte

Lahendus: Kombineeritud ülesande lahendamiseks leiame kõigepealt süsteemi absoluutse tähesuurse:

$$M = m + 5 - 5 \log D = 2,9 + 5 - 5 \log(400 \cdot 0.307) = -2,55.$$

Seejärel arvutame Albireo A heleduse osa tähe koguheleduses:

$$\frac{E_A}{E_{\text{kogu}}} = 1 - \frac{E_B}{E_{\text{kogu}}} = 1 - 2,512^{(M_B - M_{\text{kogu}})} = 0,87,$$

mis jaguneb kahe komponendi vahel 10 : 1. Niisiis moodustab heledam komponent 0,79 ja tuhmim 0,079 Albireo koguheledusest. Tähesuurustes teeb see $-2,29$ ja $0,21$ tähesuurst; Albireo B osaks jääb $-0,36$ tähesuurst.

Päikese heledustes on arvutus lihtsam. Absoluutsele heledusele $-2,25$ vastab umbes 900 Päikese heledust. Siit komponendid: Albireo A 710 ja 71, Albireo B 119 Päikese heledust.

Läbimõõdud. Erineva temperatuuriga tähtede läbimõõte saab leida bolomeetriliste heleduste võrdlemisest, kasutades Stefani-Boltzmanni seadust. Bolomeetriline parand, mis Päikese korral on null, sõltub spektriklassist ja teeb tähe alati heledamaks. K-klassi (Albireo A1) parand on seega $-0,2$. Et teiste tähtede spektriklassi pole otseselt antud, tuleb see määrata kaudselt. Albireo A2 temperatuur on 30000 K, mis vastab O-klassile

(bolomeetiline parand – 4,2. Albireo B kohta on öeldud „tavaline peajada täht“, tema spektriklassi ja temperatuuri saame HR diagrammi peajadalt, kus absoluutsele heledusele $-0,36$ vastab B-klass – siit temperatuur 13000 K ning parand -3 tähesuurust. Absoluutsed bolomeetrilised tähesuurused on seega vastavalt $-2,5$, $-4,0$ ja $-3,4$ tähesuurust; heledused aga 832, 3300 ja 1900 Päikese heledust.

Kui anda temperatuur ning heledus Päikese ühikutes, saame Stefani-Boltzmanni seadusest lihtsa valemi:

$$L = 4\pi R^2 \cdot \sigma T^4 \rightarrow R = \frac{\sqrt{L}}{T^2} R_{\odot}.$$

Pannes siia ülalolevad andmed, saame tulemuseks vastavalt 48, 2,1 ja 8,7 Päikese raadiust

V-4. Tuhkvalgus. Lisaks päikesevalgusele peegeldavad planeedid ka teiste taevakehade valgust. Tuntuim on vast Kuu nn. tuhkvalgus – kitsa kuusirbi kõrvale jääv tuhmim, Maa poolt valgustatud ala.

Aga – kas oskate arvutada, kui hele on tuhkvalgus? Arvutage pildil oleva Maa poolt valgustatud Kuu osa koguheledus tähesuurustes ja võrrelge seda Päikese poolt valgustatud sirbi heledusega.



Lahendus : Pinna heledus sõltub valgustatusest; heledat sirbiossa valgustab Päike, tumedamat osa täis faasis Maa. Seega vastab pindade valgustatuse suhe Maa ja Päikese näiva heleduse suhtele, Kuult vaadatuna. „Täismaa“ heledust on kõige parem leida võrdlusest täisfaasis Kuuga:

$$\frac{E_{\text{Maa}}}{E_{\text{Kuu}}} = \frac{S_{\text{Maa}}}{S_{\text{Kuu}}} \cdot \frac{a_{\text{Maa}}}{a_{\text{Kuu}}} = \frac{d_{\text{Maa}}^2 \cdot a_{\text{Maa}}}{d_{\text{Kuu}}^2 \cdot a_{\text{Kuu}}} = (0,25^{-2} \cdot 0,285^{-1}) = 56.$$

(d tähistab taevakeha läbimõõtu, a on selle pinna peegeldusvõime – albedo), millele vastab $2,5 \cdot \log 56 = 4,4$ tähesuurust. Niisiis on „täismaa“ näiv tähesuurus Kuult vaadatuna $-12,5 - 4,4 = -16,9$ tähesuurust ehk ligikaudu 10 suurusjärku suurem kui Päikesel. Järelikult on tuhkvalgus 10000 korda nõrgem „pärisvalgusest“ ja Maa poolt valgustatud Kuu näiv heledus umbkaudu $-2,5$ tähesuurust.

Pildil oleva kolmepäevase Kuu sirbi pindala on vaid 1/10 kuuketta kogupindalast, tema heledus aga 1000 korda suurem kui on ülejäänud osalt tulev tuhkvalgus. Aga ära näeme!

V-5. Tähtedevaheline lend. Menufilmis „Avatar“ lennutatakse tavafüüsikal põhinev tähelaev meie naabertähe Alfa Centauri hiidplaneedi Polyphemose Maa-sarnasele kaaslasele nimega Pandora. Lend kestab kuus aastat tähelaeva omaajas.

Arvutage tähelaeva keskmine kiirus ning hinnake, kui mitu aastat „noorenesid“ seal käinud astronaudid Maale jäänutega võrreldes. Alfa Centauri aastaparallaks on 0,747 kaaresekundit.

Lahendus: Aastaparallaksist leiame Alfa Centauri kauguse $D = 1/p'' = 1,34$ pc ehk 4,36 valgusaastat. Kuna laeval kulus vahemaa läbimiseks 6 aastat, pidi tema kiirus olema valguse kiirusest $6 / 4,36 = 1,37$ korda väiksem, st. $v = 0,73 c$.

Erirelatiivsusteooria aja dilatatsiooni valemist

$$\Delta t_{\text{laev}} = \frac{\Delta t_{\text{Maa}}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

saame, et Maalt vaadatuna $\Delta t_{\text{laev}} = \Delta t_{\text{Maa}} / 0,69 = 8,7$ aastat. Et Pandoralt tuleb ka tagasi tulla, on seal käinud astronaudid oma Maale jäänud kaaslaste jaoks viis ja pool aastat nooremad.

Kui on... Meenutagem nn. „kaksikute paradoksi“.