XI Astronoomia lahtise võistluse treeningülesanded (2015)

Mõlemad vanuseastmed

Koostasid: T. Eenmäe, R. Kipper, T. Sepp

Astronoomia lahtisest võistlusest

2014/2015 õppeaastal koostas Astronoomia lahtise võistluse meeskond ka väikese eelvõistluse. Lahendused palume saata hiljemalt 8. märtsiks aadressile **tiit@to.ee** (samale aadressile on oodatud ka kõik küsimused ja kommentaarid). Parimatele lahendajatele on Tartu Observatoorium välja pannud auhinnad. Lahenduste saatmisel palume kindlasti juurde märkida: **nime (ees- ja perekonnanimi), kontaktandmed (e-post ja aadress), kooli ja klassi**.

Lahendamiseks vajalikke abimaterjale võib leida Tartu Ülikooli Teaduskooli kodulehelt[1]. Nii mõnegi ülesande puhul on lubatud teha mõningaid lihtsustavaid eelduseid - need tuleb siis aga kindlasti ka kirjalikult ära märkida. Ülesannete lahendused ilmuvad Teaduskooli kodulehele[2] hiljemalt 10. märtsiks ja kõigile lahendajatele saadetakse need koos tulemustega ka e-postile.

1 Näeme sama hästi

Kui suur peaks olema raadioteleskoobi (vaatleb lainepikkusel $\lambda = 10cm$) raadius, et selle lahutusvõime oleks sama hea kui Tartu Observatooriumi 1.5 m diameetriga optilisel teleskoobil (vaatleb lainepikkusel $\lambda = 575nm$)?

Lahendus

Ülesanne keskendub puhtalt kahe nurklahutuse võrdlemisele. Selleks piisab, kui kasutada Rayleigh kriteeriumi:

$$\theta = 1.22\frac{\lambda}{D},$$

kus θ on lahutusvõime radiaanides, λ on valguse lainepikkus meetrites ning D on teleskoobi läätse või peapeegli diameeter meetrites. Antud juhul on

[1] http://www.teaduskool.ut.ee/et/oppetoo/astronoomia

[2] http://www.teaduskool.ut.ee/et/ainevoistlused/astronoomia-lahtine

meil vaja, et optiline teleskoop (tähistame alaindeksiga o) ja raadioteleskoop (alaindeksiga r) omaksid sama lahutusvõimet elik $\theta_o = \theta_r$. Seega teisendub valem kujule:

$$1.22\frac{\lambda_o}{D_o} = 1.22\frac{\lambda_r}{D_r},$$

mida saab hõlpsasti lihtsustada kujule:

$$D_r = \frac{D_o \times \lambda_r}{\lambda_o} \longrightarrow D_r = \frac{1.5 \times 0.1}{575 \times 10^{-9}} = 260\text{km},$$

Kuna küsitud oli raadiust, siis on vastuseks sellest väärtusest pool ehk **130 km**.

Kuigi võib tunduda, et raadioastronoomias on head lahutusvõimet keeruline saavutada, siis tänu mõõtmistehnikale, mida tuntakse interferomeetria nime all, ei pea raadioteleskoop paiknema ühes tükis ning lahutusvõime määrab eri teleskoopide äärmine asukoht.

Rohkem raadioastronomia kohta võib lugeda: `http://www.teaduskool.ut.ee/sites/default/files/teaduskool/oppetoo/oppematerjal_astronoomia_yldine_astronoomia.pdf` lk 21 pt 4.4.

2 Kui hele on Maa?

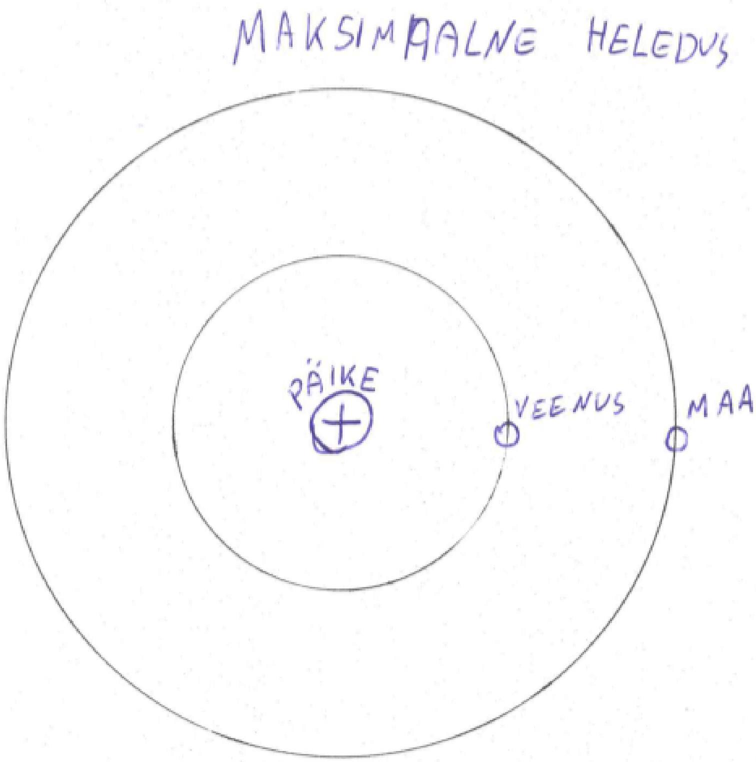
Maalt vaadates jääb Veenuse heledus vahemikku -4,89 kuni -3,82 tähesuurust. Maksimaalsele heledusele vastab moment, kui Veenuse nurkkaugus Päikesest (Maalt vaadates) on 39,7 kaarekraadi. Kui heledalt paistab Maa Veenuselt vaadates? Millal paistab Maa kõige heledamalt? Tehke kindlasti ka lahenduskäiku selgitav joonis.

Lahendus

Kuna Veenuselt vaadates on Maa välisplaneet, siis on Maa faas alati suur. Maa paistab kõige heledamalt siis, kui Veenuselt vaadates on Maa vastasseisus. Kui veel täpsemalt tahta ütelda, siis suure vastasseisuga. Kõige nõrgemalt paistab Maa siis, kui ta on Veenuselt vaadates teisel pool Päikest. Ka sel juhul on Maa faas 100%.

Kuna Veenuse kaugus Päikesest on 0,72 a.ü., siis on Maa kaugus Veenusest vastasseisu ajal d_1 = 1 a.ü. - 0,72 a.ü. = 0,28 a.ü. ning suurima eemaldumise korral on kaugus d_2 = 1,0 a.ü. + 0,72 a.ü. = 1,72 a.ü. Maa heleduste erinevus neis kahes asendis tähesuurustes on:

$$\Delta m = -2.5 \log \frac{E_2}{E_1} = 5 \log \frac{d_2}{d_1},$$



Joonis 1: Maksimaalne Maa heledus

kuna $E \propto d^{-2}$. Pannes saadud avaldisse kaugused, saame, et kui Maa ja Veenus on Päikesest eri pooltel, paistab Maa $\Delta m = 3.94$ tähesuuruse võrra nõrgemana.

Arvutame Maa heleduse vastasseisus. Kasutame võrdluseks Veenust, kuna meil on teada täisfaasis Veenuse heledus ja kaugus: 1,72 a.ü. kauguselt on Veenuse tähesuurus -3,82. Täisfaasis Veenuse heledus 1 a.ü. kauguselt oleks

$$m_2 = m_1 + 5\log(d_2/d_1) \rightarrow -3,82 + 5\log(1,72/1,0) = -3,82 - 1,18 = -5$$

tähesuurust. Planeeditabelist leiame, et Veenuse läbimõõt on 0,95 Maa läbimõõtu, Veenuse albeedo on 75/30=2,5 korda Maa omast kõrgem. Seega, pannes Maa 1 a.ü. kaugusele oleks ta 0.056 tähesuurust heledam suurema läbimõõdu arvelt kuid 0,995 tähesuurust nõrgem väiksema albeedo arvelt. Maa heledus 1 a.ü. kauguselt oleks seega $-5 - 0,056 + 0,995 = -4,061$ tähesuurust. Kuna Veenuselt vaadates on vastasseisus Maa 0,28 a.ü. kaugusel, siis Maa heledus on sellisel juhul

$$m_{vastas} = -4,061 + 5\log(0,28/1) = -4,061 - 2,764 = -6,82$$

tähesuurust. Nüüd saame leida ka Maa heleduse Veenusest kaugeimas asendis, see on $-6,82 + 3,94 = -2,88$ tähesuurust.

Märkus: Kuna ei ülesande tekstis ega ka planeeditabelis pole märgitud albeedot, siis võib albeedo parandit jätta ka arvestamata. Siis Maa heledus oleks Maa heledus 1 a.ü. kauguselt oleks seega $-5 - 0,056 = -5.056$ ning vastasseisu korral:

$$m_{vastas} = -5.056 + 5\log(0,28/1) = -5.056 - 2,764 = -7,82,$$

ning kaugemais asendis oleks Maa heledus

$$-7,82 + 3,94 = -3,88$$

3 Kus te asute?

Vaatluslikult leiti tähe alumine ja ülemine kulminatsioon (tähe suurim ja vähim kaugus horisondist), vastavalt $+5°$ ning $+65°$. Teada on, et atmosfääri keskmine murdumisnäitaja on 1.000293. Leidke vaatleja laiuskraad. Kui suur viga tuleb atmosfääris valguse murdumisest?

Lahendus

(Põhja)pooluse ja horisondi vaheline nurk on määratud üheselt laiuskraadiga: $90° - \phi$. Sama nurka saab määrata ka ülemise/alumise kulminatsiooni abil. Alumise kulminatsiooni (α_{min}) korral on selleks tähe käände (δ) ning kulminatsiooni summa, ülemise kulminatsiooni korral vahe. Pannes need seosed omavahel võrduma ning lahendades võrrandisüsteemi ϕ suhtes saame:

$$\phi = 90° - 0.5(\alpha_{\text{max}} + \alpha_{\text{min}}) = 55°.$$

Lisamaks murdumisnäitaja parandit, tuleb vaadata, palju muudab murdumisnäitaja maksimaalset ja minimaalset nurka. Selleks kasutame Snelli seadust:

$$\frac{\sin \alpha_{\text{vaadeldud}}}{\sin \alpha_{\text{tegelik}}} = n.$$

Seega kulminatsioonide tegelikud nurgad on 4.998532 ja 64.96403 ning sellele vastav laiuskraad 55.01872. Seega erinevus on $0.02°$, mis vastab Maa pinnal umbes 2 km.

4 Kuu faasid

Kui palju muutub Kuu faas ühe öö jooksul? Kas faasi vähenemine/kasvamine on konstantne?

Lahendus

Kuu ja ka planeetide faaside arvutamisest on pikemalt kirjutatud `http://www.teaduskool.ut.ee/sites/default/files/teaduskool/oppetoo/oppematerjal_astronoomia_temaatika_ylesannetest.pdf` lk 5 ja 6. Meeldetuletuseks olgu mainitud, et Kuu faasi saab leida valemiga:

$$\Theta = \frac{1 - \cos\alpha}{2},$$

kus Θ on Kuu faas ja α on Kuu ja Päikese vaheline nurk. Kuna ülesandes on küsitud faasi muutust ühe öö jooksul siis piisab kui loeme planeeditabelist et Kuu sünoodiline periood on 27.3 päeva ning võtame, et faasi muutus on ühtlase pikkusega. Kuna tekstis pole täpsustatud öö pikkust, siis tuleb see ise defineerida. Antud näites on öö pikkuseks võetud 8 tundi. Kuna võib eeldada, et nurk Kuu ja Päikese vahel muutub konstantse kiirusega, siis saame, et täisringist läbib Kuu öö jooksul:

$$360^\circ \times \frac{8}{27.3 \times 24} = 4.4^\circ$$

Edasi peame lahendama lihtsalt trigonomeetrilise võrrandi:

$$\Theta_1 - \Theta_2 \Rightarrow \frac{1 - \cos\alpha_1}{2} - \frac{1 - \cos(\alpha_1 + 4.4^\circ)}{2},$$

see lihtsustuda

$$\frac{\cos\alpha_1 + \cos(\alpha_1 + 4.4)}{2},$$

Soovi korral võime võrrandit edasi arendada, kasutades valemit:

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

aga see pole ka oluline, sest teisenduse tulemusena ei muutu avaldis ilusamaks ning see ei muuda arvutusi lihtsamaks. Seetõttu saame edasi lahendada ülesannet vaid numbriliselt. Kuna koosinusfunktsioon on sümmeetriline funktsioon, siis piisab kui vaatleme kahte juhtu ($\alpha = 0$ ja $\alpha = 90$), mis vastavad piirkondadele kui koosinusfunktsioon kahaneb kõige aeglasemalt ja kiiremalt. Esimesel juhul saame faasi muutuseks

$$\frac{\cos 0 + \cos(4.4)}{2} = 1.5 \times 10^{-3}$$

ja teisel juhul

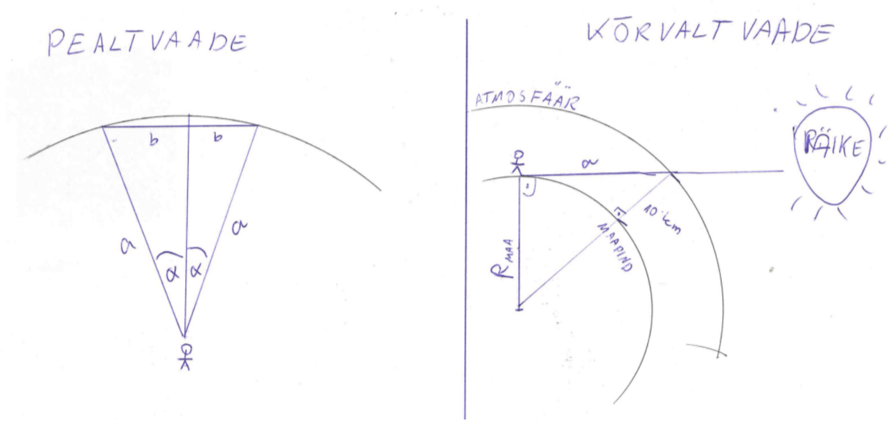
$$\frac{\cos 0 + \cos(4.4)}{2} = 0.08.$$

Nagu näeme ei ole faasi muutus konstantse kiirusega. Veel täpsemaks saaks minna kui võtaksime arvesse ka öö pikkuse võimalikud variatsioonid (sõltuvus laiuskraadist ja kuupäevast) ning arvestaksime ka Maa tiirlemisest tekkivaid parandeid.

5 Päiksekoerad

Joonis 2: Päikesekoerad

Külmade talveilmadega on hommikuti Päikese vaatamisel näha sageli palju huvitavat. Üks huvitavamaid nähtuseid on Päikesekoerad (vaata joonis 2), kus 22° Päikesest eemal tekib taevasse mõlemale küljele justkui uus Päike. Seda põhjustab valguse murdumine 5-10 km kõrgusel atmosfääris olevatelt jääkristallidelt. Kui kaugel teineteisest need kristallid atmosfääris paiknevad? Tehke joonis, kus on kujutatud Päike, Päiksekoerad ja vaatleja, kes neid näeb, ning valguse teekond.



Joonis 3: Päikesekoerte tekkimine

Lahendus

Ülesande näol on tegemist mitmekordse kolmnurkade lahendamisega. Lahenduses on arvestatud, et Päikesekoerad on Maa pinnast 10 km kõrgusel. Esimene kolmnurk tekib meil kui me vaatame kolmnurka, mis tekib Maa ristlõiketasandis. Seal piisab lihtsalt Pytagorase valemi rakendamisest ja saame valguse teepikkuseks:

$$\sqrt{(R_{Maa} + 10)^2 - {R_{Maa}}^2} = a = 357\text{km}$$

Teisel kolmnurgal piisab tangesi arvutamisest ja vastuse saamiseks peame selle veel kahega korrutama.

$$b = 2 \times a \times \tan\alpha = 2 \times 357 \times \tan 22^\circ = 288\text{km}$$

mis on ka jääkristallide vaheliseks kauguseks.

6 Kuu on Päike

Paremate nutitelefonide valgusvõimsus on umbes 600 lmm^{-2} (luumenit ruutmeetri kohta), Päikese koguheledus on seevastu 3.75×10^{28}lm. Mitu töötavat nutitelefoni tuleks panna Kuu pinnale, et Kuu paistaks sama heledana kui Päike? Mis oleks sellisel juhul Kuu absoluutne tähesuurus?

Lahendus

Ülesande lahendamine lähtub et mobiiltelefonidega valgustatud Kuu heledus oleks võrdne Päikese omaga. See tähendab, et:

$$m_{Paike} - m_{Kuu} = 0,$$

see tähendab, et ka valgusvoog mis neist lähtub peab olema võrdne. Kuna valgusvoo tugevus kahaneb kauguse ruuduga. Mistõttu kehtib seos

$$\frac{\Phi_{Paike}}{{D_{Paike}}^2} = \frac{\Phi_{Kuu}}{{D_{Kuu}}^2},$$

kus Φ on valgusvoog ja D kaugus. Kusjuures Kuu heledus võib lihtsustades võtta kui $\Phi_{Kuu} = n \times \Phi_{mobiil}$, veel täpsema tulemuse saaksime, kui võtaksime arvesse ka Kuu katmata osa pindala, praegu jätame selle aga tegemata. Avaldame mobiiltelefonide arvu:

$$n = \frac{\Phi_{Paike} \times {D_{Kuu}}^2}{{D_{Paike}}^2 \times \Phi_{mobiil}},$$

siia saame nüüd sisse panna numbrid, kusjuures võime lihtsustada kauguseid, kui vaatame planeeditabelist, et Kuu kaugus on 0.00257 Päikese kaugust.

$$n = \frac{3.75 \times 10^{28} \times 0.00257^2}{1^2 \times 600} = 3.9 \times 10^{20},$$

Huvi pärast võime vaadata kui suure osa Kuu pinnast me nii ära katma peame. Võtame mobiili mõõtmeteks 10 x 15 cm. Siis on ühe mobiili pindala $0.015 m^2$ nende kogupindala oleks $3.9 \times 10^{20} \times 0.015 = 5.85 \times 10^{18} mathrmm^2$, see vastab ringi pindalale, mille raadius on 6.8×10^8m, mis on suurusjärke suurem kui Kuu raadius, mistõttu pole praeguste mobiiltelefonidega võimalik Kuud Päikesest heledamaks muuta.

7 Maaliline Kuu

Fotograaf Filippo Rivetti tegi maailmakuulsa ehitise taustal pildi Kuust. Milline on Kuu faas pildistamise ajal? Umbkaudu millisesse ilmakaarde oli suunatud fotoaparaat? Kus see pilt on tehtud?

Lahendus

Kuu faas on 100 % öeldes "jalad ülespidi", seega peab pilt olema tehtud lõunapoolkeralt. Täiskuu kulmineerub põhjapoolkeral lõuna- ning lõunapoolkeral põhjakaares. Seega jämedalt võttes oli kaamera objektiiv suunatud loode ja kirde vahelisse sektorisse. Pilt on tehtud Sydneys, esiplaanil on nende kuulus ooperimaja.

8 Päikeseloojang Tartus

Kui kaua võtab aega Päikese loojumine Tartus kevadisel pööripäeval? Loojumise ajaks nimetatakse ajamomentide vahet, kui Päikese alumine serv puudutab horisonti ning Päikese ülemine serv kaob horisondi taha. Selle aja täpsemaks hindamiseks tuleb arvestada ka valguskiirte murdumist atmosfääris ehk refraktsiooni. Refraktsiooni tõttu paistavad taevakehad kõrgemal horisondi kohal, kui nad oleksid atmosfääri puudumisel. Näiteks loojuva Päikese muudab lapikuks just refraktsioon. Atmosfääri põhjustatud refraktsiooni saab arvutada, kasutades valemit

$$R = \cot\left(h_a + \frac{7,31}{h_a + 4,4}\right),$$

kus R on refraktsioon kaareminutites ja h_a on taevakeha näiv kõrgus kaarekraadides horisondi kohal. Päikese nurkläbimõõt on 32 kaareminutit. Lisage lahenduskäigule selgitavad joonised.

Lahendus

Kevadisel pööripäeval on Päikese kääne $\delta = 0°$, Päike asub taevaekvaatoril. Tartu laiuskraad on ca $\varphi = 58,5°$ põhjalaiust. Nurk horisondi ja taevaekvaatori vahel on võrdne $90° - \varphi = 31,5°$. Päikese loojumine ilma refraktsioonita kestaks $1/\sin 31,5° = 1,91$ korda kauem, kui taevasfääril kulub Päikese läbimõõdu võrra pöördumiseks. Kuna taevasfäär pöördub 4 minutiga ühe kaarekraadi, siis 32 kaareminuti peale kulub 2,13 ajaminutit. Kokku kuluks Päikesel loojumiseks $2,13 \cdot 1,91 = 4,08$ minutit ehk 4 minutit ja 5 sekundit.

Refraktsioon horisondil on aga tervelt $R = \cot(0+7,31/(0+4,4)) = 34,5$ kaareminutit.

Siiski, refraktsioon ei mõjuta loojangu kestvust. Loojumisaja pikkus on Päikese kahe punkti (alumine serv ja ülemine serv) horisondi alla kadumise momentide vaheline aeg, kuid need sündmused leiavad aset samal kõrgusel horisondist ning refraktsiooni tõttu tekib mõlemasse ajamomenti ühesugune viivitus! Refraktsiooni tõttu muutub vaid loojangu moment ise.

Planeeditabel

PLANEEDITABEL

	Kaugus Päikesest	Orbiidi ekstsent -rilisus	Mass	Läbimõõt ekvaatoril	Pöörlemis - periood	Tiirlemis - periood	Tihedus
Päike	0		330000	109,2	25,4		0,26
Merkuur	0,39	0,206	0,06	0,38	59	0,241	0,98
Veenus	0,72	0,0068	0,81	0,95	243	0,62	0,95
Maa	1	0,0167	1	1	1	1	1
SI ühikutes	1,496 $\cdot 10^{11}$ m		$6 \cdot 10^{24}$ kg	1,2756 $\cdot 10^{7}$ m	23 t 56m 4s	365 p 6t 9min	5515 kg/m^3
Kuu	0,00257	0,055	0,0123	0,25	27,3	0,075	0,61
Marss	1,52	0,093	0,107	0,53	1,03	1,88	0,71
Jupiter	5,2	0,049	318	11,2	0,42	11,9	0,24
Saturn	9,6	0,056	95	9,4	0,44	29,5	0,125
Uraan	19,2	0,044	14,5	4	0,72	84,3	0,23
Neptuun	30,1	0,0112	17,1	3,9	0,67	165	0,297

Mõned konstandid

Stefan-Boltzmanni konstant $\sigma_{SB} = 5.67\,10^{-8}\mathrm{WT}^{-4}\mathrm{m}^{-2}$
Päikese kiirgusvõime $L_{\odot} = 3.839\,10^{26}\mathrm{W}$
Astronoomiline ühik aü= $1.496\,10^{11}$m
Valguse kiirus c= 299792kms^{-1}