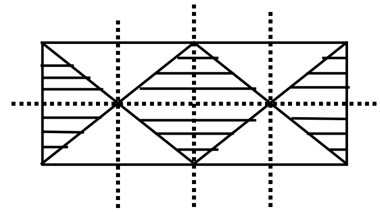
Känguru'96 (kadett)
Lahendused



1. Ülesannete arutelu võttis aega $10 \cdot 30 = 300$ minutit.

2. Viirutatud ja valge osa pindalad on võrdsed. Jaotades ristküliku kaheksaks, näeme, et igast tekkinud nelinurgast pool on viirutatud pool mitte. Viirutatud osa pindala on ka 6 cm².

3. Korrutis on suurim, kui tegurid on võimalikult suured ja lähedased.
Seega vastuseks on $19 \cdot 96$.

4. Suurim arv, mida on võimalik moodustada on 4321 ning vähim on 1234.
Nende arvude vahe on $4321 - 1234 = 3087$.

5. Suurim ringjoone ja ristküliku ühiste punktide arv saab olla 8. See on parajasti siis, kui ringjoonel on iga ristküliku küljega 2 lõikepunkti. Ringjoone raadius peab sel juhul olema suurem kui ristküliku pool pikkust ja väiksem kui ristküliku pool diagonaali.

6. Nimetajaks on arv 1000 =VÜK(10, 100, 1000).
Lugejaks tuleb $100 \cdot 1 + 10 \cdot 1 + 1 = 111$.

7. Samasuguseid värvitud ruute saame suurde ruutu joonistada veel lisaks 8. (Suure ruudu nurkadesse diagonaalile on võimalik joonistada veel kaks samasugust värvitud ruutu, mille tulemusena on diagonaal kaetud värvitud ruutudega. Analoogselt saame suure ruudu teisele diagonaalile joonistada kaks samasugust ruutu. Suurest ruudust on jäänud veel värvimata neli väikest ruutu, mis kõik on pindalalt võrdsed antud värvitud ruuduga.) Kokku mahub suurde ruutu antud tingimustel seega 9 väikest värvitud ruutu. Ühe värvitud ruudu pindala on $\frac{1}{9}$ suure ruudu pindalast.

8. Jagades kohanumbri 375 ühes reas olevate istekohtade arvuga 24, saame teada mitmendas reas koht 375 asub.
375 : 24 =15 jääk 15
Kuna vastus on suurem kui 15, siis viieteistkümnendasse ritta see koht ei mahu ja koht 375 asub 16. reas.
(Jäägi 15 järgi saame täiendavalt öelda, et koht 375 on 16. reas viieteistkümnes koht, kui kohti hakata lugema rea otsast, kus on rea vähima kohanumbriga koht.)

9. Tuleb leida mitme minuti pärast on poisid jälle kõrvuti. Leitud minutite arv peab jaguma arvudega 4 ja 6 ning olema vähim võimalik, VÜK(4, 6) = 12.
Seega teeb Pierre Jean'ile esimese "ringi sisse" 12 minuti pärast.

10. Olgu kahekohaline arv $10a + b$. Pärast sama arvu lõppu kirjutamist saame arvu:

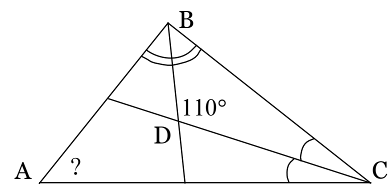
$1000a + 100b + 10a + b = 1010a + 101b = 101(10a + b)$. Leides jagatise, olemegi leidnud küsimusele vastuse: $\frac{101(10a+b)}{10a+b} = 101$.

11. Jaotades joonisel kuusnurga kuueks võrdkülgseks kolmnurgaks näeme, et igas tekkinud kolmnurgas pool pindalast kuulub esialgsesse kolmnurka pool mitte. Seega kuusnurga pindala on võrdne kahe esialgse kolmnurga pindalaga ning jagades kuusnurga pindala kolmnurga pindalaga saame tulemuseks 2.

12. Känguru peab taskust võtma kindlasti 4 sokki, sest kolm esimest sokki võivad olla kõik erinevat värvi.

13. Ainult (1) väide on õige, sest kahe negatiivse arvu summa on alati negatiivne.
Väidete (2) ja (3) korral ei saa aga öelda, et summa on alati positiivne. Kui negatiivne arv on absoluutväärtuse poolest suurem kui positiivne arv (positiivsed arvud), siis tulemus on negatiivne.

14. Kasutades teadmist, et kolmnurga sisenurkade summa on $180°$ saame kolmnurgast DBC, et $\frac{1}{2}\angle B + \frac{1}{2}\angle C = 70°$. Seega $\angle B + \angle C = 140°$.
Kasutades veelkord, et kolmnurga sisenurkade summa on $180°$ saame $\angle A = 180° - (\angle B + \angle C) = 180° - 140° = 40°$.



15. Kui kell jääb 24 tunni jooksul 8 minutit taha, siis igas tunnis jääb ta taha $8 : 24 = \frac{1}{3}$ minutit. Õhtul kella 22.00-st hommikul kella seitsmeni on aega 9 tundi. Seega peab kella ette keerama $9 \cdot \frac{1}{3} = 3$ minutit.

16. Värvitud nurkade summa on võrdne kolme kolmnurga sisenurkade summaga, millest on lahutatud värvimata nurkade summa. Kolm värvimata nurka moodustavad sirgnurga. (Seda on kerge näha kui vaadelda ühte antud kolmnurka ja kahe ülejäänud kolmnurga värvimata nurkade tippnurki.)
Vastuseks saame $3 \cdot 180° - 180° = 360°$.

17. Kuna piimaga täidetud konteiner kaalub 34 kg, siis pool piima ja pool konteinerit kaalub 17 kg. Tekstist saame, et pool piima ja terve konteiner kaalub 17,5 kg. Seega pool konteinerit kaalub 0,5 kg ja terve konteiner 1 kg.

18. Leiame kõigepealt mitme lasu eest tüdruk ei maksnud s.o. $17 - 5 = 12$ lasu eest. Kuna iga täistabamuse eest sai 2 tasuta lasku, siis märki tabas $12 : 2 = 6$ lasku.

19. Kell 9.00 ja 15.00 moodustavad osutid täisnurga. Kaks korda moodustavad osutid täisnurga järgmiste kellaaegade vahel: 6.00 - 7.00; 7.00 - 8.00; 10.00 - 11.00; 11.00 - 12.00; 12.00 - 13.00; 13.00 - 14.00; 16.00 - 17.00; 17.00 - 18.00.
Ühe korra moodustavad osutid täisnurga kellaaegade 8.00 - 9.00; 9.00 - 10.00 ja 14.00 - 15.00; 15.00 - 16.00 vahel (alg ja lõpp kellaaeg välja arvatud).
Seega moodustavad osutid täisnurga küsitud ajavahemikul 22 korda.

20. Võrdkülgse kolmnurga, mille küljepikkus on 2m, ühe külje ehitamiseks läheb vaja 20+19 väikest kolmnurka. Iga järgmise kihi ehitamiseks läheb vaja 2 väikest kolmnurka vähem kui eelmise kihi jaoks. Vastuseks on vaja leida summa 39+37+ ... +3+1.
Paneme tähele, et 39+1 = 40; 37+3 = 40;.. selliseid paare tekib 10, seega vajaminevate väikeste kolmnurkade arv on 39+37+ ... +3+1 = 10 · 40 = 400.

21. Algul on tippe 8, iga lõikamisega saame kuubi ühest tipust 3 tippu, seega lõpuks on tippe 8 · 3 = 24.
Algul on servi 12, lõikamistega tekib iga esialgse tipu juurde 3 uut serva, seega lõpuks on servade arv 12 + 8 · 3 = 36.

22. Võimatu on saavutada olukorda, kus neli sirget tasandil omavad 2 lõikepunkti.
Ülejäänud juhtudel on lihtne leida näiteid, kus sirgetel on vastav arv lõikepunkte:
a) 0 lõikepunkti, sirged on paralleelsed
b) 3 lõikepunkti, kolm sirget on paralleelsed ja üks lõikab neid
c) 5 lõikepunkti, näiteks kui kaks sirget on paralleelsed ja kaks sirget lõikuvad nii, et nende lõikepunkt asub kahe paralleelse sirge vahel
d) 6 lõikepunkti, näiteks kui kaks ja kaks sirget lõikuvad paarikaupa, nii et igas lõikepunktis lõikub täpselt 2 sirget.

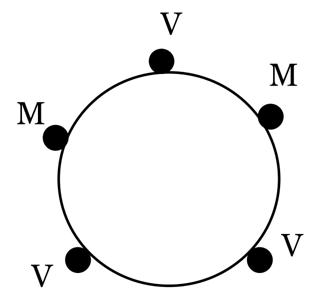
23. Arvestades, et kolmnurga kahe külje pikkuste summa peab olema suurem kui kolmanda külje pikkus, saame võimalusteks: 7+5+6; 7+3+5; 1+7+7; 2+6+7; 4+4+7; 4+5+6; 6+3+6.
Kokku on võimalusi 7.

24. Kogu jäätise ruumala on $\frac{1}{3}S_p \cdot h$, kus h on jäätise kõrgus ja S_p koonuselise jäätise põhja pindala. Jäätise alumise poole ruumala on $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} S_p \cdot \frac{1}{2}h = \frac{1}{8}(\frac{1}{3}S_p \cdot h)$. Seega Claire saab $\frac{1}{8}$ kogu jäätisest ja Marie $\frac{7}{8}$ jäätisest. Marie saab 7 korda rohkem jäätist kui Claire.

25. Täna on metrooliinil sõitvate rongide väljumisintervall 360 : 24 = 15 ühikut. Kui väljumisintervalli lühendada 20% võrra, siis intervalliks jääb $\frac{4}{5}$ esialgsest intervallist, seega on homme ronge $\frac{4}{5} \cdot 15 = 30$ ehk $30 - 24 = 6$ rongi rohkem kui täna.

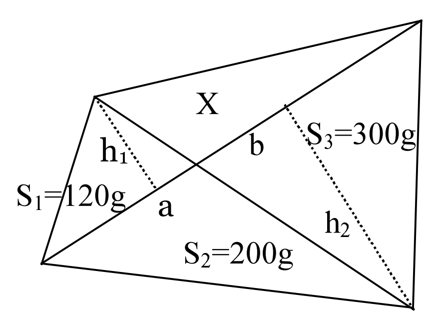
26. Võrdhaarsest kolmnurgast DAC saame, et $\angle DCA = \angle DAC$, võrdhaarsest kolmnurgast ACB saame, et $\angle ACB = \angle CBA$. Kuna nelinurk ABCD on võrdhaarne trapets, siis $\angle DAB = \angle CBA$ ja $\angle ADC = \angle DCB$. Saame ka et $\angle DCA = \angle CAB$, kui põiknurgad, mis on tekkinud kahe paralleelse sirge lõikamisel kolmandaga. Nelinurga ABCD nürinurk on võrdne 1,5 teravnurga suurusega. Teravnurga suurus: $360° : 5 = 72°$. Nürinurga ehk küsitud nurga suurus on $1{,}5 \cdot 72° = 108°$.

27. Viimase raamatu koodi leidmiseks leiame kõigepealt koodi viimase tähe, selle saame kui leiame jäägi, mis tekib raamatute arvu jagamisel tähestikus olevate tähtede arvuga. (Jagamisel saadud täisosade arv näitab mitu korda on tervet tähestikku kasutatud ja jääk näitab mitmenda tähestiku tähe peal on "nummerdamine" lõpetatud)
2203 : 26 = 84 jääk 19.
Seega otsitava koodi viimane täht on S.
Jagades saadud täisosade arvu veelkord tähestikus olevate tähtede arvuga, saame leida koodi esimese tähe. (Täisosade arv näitab mitme tähestiku esimese tähe korral on kõiki võimalusi teise ja kolmanda tähe valimiseks juba kasutatud.)
84 : 26 = 3 jääk 6.
Seega koodi esimeseks täheks on neljas täht tähestikust s.o. D.
Nüüd saame viiest pakutud võimalusest juba valida õige, see on DGS.



28. Oletame, et lauasistuja, kes ütleb esimesena, on valetaja st. tegelikult on mõlemad tema naabrid mittevaletajad. Kuna nad mõlemad räägivad tõtt, siis nende naabrid kummalgi pool peavad olema valetajad. Saame teada, et ülejäänud kaks lauasistujat on valetajad, sest öeldes, mõlemad minu naabrid on valetajad, nad valetavad, kuna üks naabritest ei ole valetaja.

29. Diagonaalide lõikepunkt jaotab diagonaali kaheks osaks a ja b, mis suhtuvad nagu tekkinud kolmnurkade pindalad $a : b = S_2 : S_3 = S_1 : X$
(Olgu kolmnurkade kõrgused h_1 ja h_2, siis
$S_1 = \frac{a \cdot h_1}{2}$; $X = \frac{b \cdot h_1}{2}$; $S_2 = \frac{a \cdot h_2}{2}$; $S_3 = \frac{b \cdot h_2}{2}$



$$\frac{S_1}{X} = \frac{\frac{a \cdot h_1}{2}}{\frac{b \cdot h_1}{2}} = \frac{a}{b} \quad \text{ja} \quad \frac{S_2}{S_3} = \frac{\frac{a \cdot h_2}{2}}{\frac{b \cdot h_2}{2}} = \frac{a}{b})$$

Ära söödud tüki kaalu X saame leida võrdusest

$\frac{120}{X} = \frac{200}{300}$, millest X = 180.

30. Kui võtta, et esimesel aastal sooritas üliõpilane 2 eksamit, siis viimasel aastal sooritas ta 6 eksamit. Sel juhul ei ole võimalik leida eksamite arvu teisel, kolmandal ja neljandal aastal, nii et kodusumma oleks 31 ja igal järgneval aastal oleks sooritatud rohkem eksameid kui eelmisel. Kui võtta, et ta esimesel aastal tegi 3 eksamit, siis viimasel aastal pidi ta tegema 9 eksamit. Vaja on leida kolm erinevat arvu, mis oleksid vahemikus 3 kuni 9 ja millede summa oleks 19. Sellisteks arvudeks sobivad 5 , 6 ja 8. Neljandal aastal sooritas ta 8 eksamit.