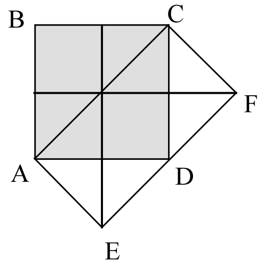
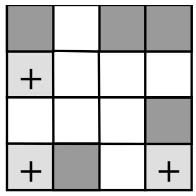
Känguru'97

JUUNIOR



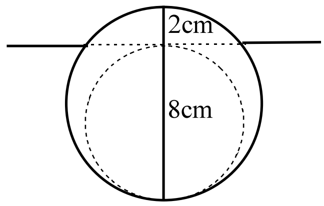
1. Ristküliku ACFE pikema külje pikkus on $\sqrt{2}$, lühema külje pikkus on $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Pindala on $\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 1$.
Seda, et ristküliku pindala on võrdne ruudu pindalaga on näha jooniselt.

2. Kui auto suundub väljakule mööda ühesuunalist teed, siis väljakult välja sõitmiseks on tal 4 võimalust. Kui auto suundub väljakule mööda kahesuunalist teed, siis väljakult välja sõitmiseks on tal 3 võimalust. Kokku on võimalusi väljaku läbimiseks $2 \cdot 4 + 4 \cdot 3 = 20$.

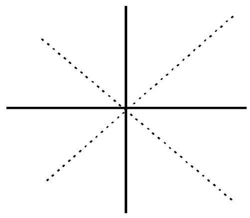


3.Joonisel on ristiga märgitud need kolm ruutu, mis tuleks mustaks värvida, et joonis oleks oma keskpunkti suhtes sümmeetriline.

4. $\sqrt{2^{100}} = \left(2^{100}\right)^{\frac{1}{2}} = 2^{50}$



5. Tennispalli diameeter on 10 cm. Veepinnaga risti olevast diameetrist jääb 8-sentimeetrine osa vee alla.
Järelikult saab vee alla jäävasse ossa joonestada kera, mille maksimaalne raadius on 4 cm..



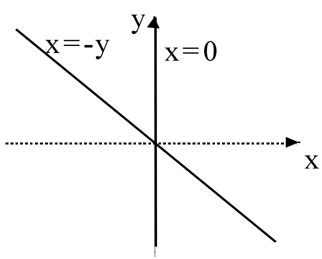
6. Iga kaks lõikuvat sirget on võimalik paigutada nii, et tekiks 4 täisnurka. Kahekümnest sirgest saab ristuvaid sirgete paare moodustada 10. Seega tekkivate täisnurkade maksimaalne arv on $10 \cdot 4 = 40$.

7. Kolmnurga välisnurk on võrdne temaga mitte kõrvuti asetsevate sisenurkade summaga. Antud juhul $2x + 5 \neq x + 1 + x - 1$. Järelikult sellist kolmnurka ei eksisteeri.

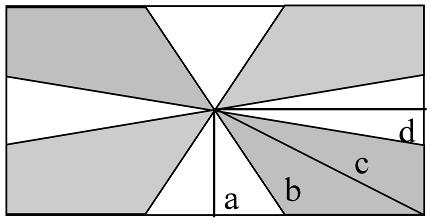
8. Murdjooned DBA, DCA ja DEA on võrdsete pikkustega ning murdjoonest DGBA lühemad. Järelikult neist kolmest ükski ei sobi vastuseks. Murdjoon DFA on lühem kui DGBA. Järelikult antud murdjoontest on lühim DFA.

9. Olgu 999222 = c, siis $a = c^2$ ja $b = (c-1)(c+1) = c^2 - 1$. Seega $b = a - 1$ ja $a = b + 1$.

10. $x^2 + xy = 0$
$x(x + y) = 0$
$x = 0$
$x = -y$



11. Vaatleme lipust ühte neljandikku. Jaotame selle neljaks osapindalaks a, b, c ja d . Saame, et b =2a ja c =2d, sest vastavate kolmnurkade kõrgused on võrdsed, aga valget värvi kolmnurkade alused on poole lühemad kui mustade omad. Seega valgeks värvitud pindala suhe mustaks värvitud pindalasse on 1 : 2.



12. $\frac{n+11}{n+7} = \frac{n+7+4}{n+7} = 1 + \frac{4}{n+7}$

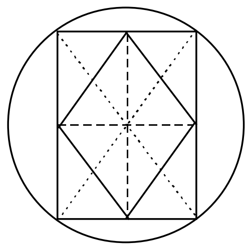
Avaldise väärtuseks on täisarv kui $\frac{4}{n+7}$ on täisarv. Võimalikud variandid on:

$n + 7 = 4$; $n + 7 = -4$; $n + 7 = 2$; $n + 7 = -2$; $n + 7 = 1$; $n + 7 = -1$.

Seega kuue täisarvulise n väärtuse korral on avaldise $\frac{n+11}{n+7}$ väärtuseks täisarv.

13. Väide "Igal Marsi elanikul on kaks pead" osutus valeks. Järelikult leidub vähemalt üks selline Marsi elanik, kellel ei ole kahte pead. Järelikult kehtib väide "on olemas Marsi elanik, kellel on kas 1 või rohkem kui 2 pead".

14. Rombi külje pikkus on pool ristküliku diagonaalist, mis on võrdne ringi diameetriga. Rombi külje pikkus on seega 3 cm ja ümbermõõt $4 \cdot 3 = 12$ cm.



15. $4^5 \cdot 5^{13} = (2^2)^5 \cdot 5^{10} \cdot 5^3 = 2^{10} \cdot 5^{10} \cdot 5^3 = 10^{10} \cdot 5^3$

10^{10} on üheteistkümnekohaline arv

5^3 on kolmekohaline arv

Nende arvude korrutis on kolmeteistkümnekohaline.

16. Võrratuste ahelast näeme, et $a^4 < a^2$, järelikult $a \neq 0$ ja $-1 < a < 1$.

Kuna $a^4 > 0$ ja $a > 0$, siis $0 < y < 1$.

Arvu x jaoks saame tingimuse $-1 < x < 1$. Saadud tingimusi arvestades sobib vastuseks variant, kus $x = 0$, $y = \frac{1}{2}$.

17. Joonisel toodud kahest sellisest kujundist saab kokku panna kuubi, mille mõõtmed on 2x2x2. Neist omakorda saame teha kuupe, mille servapikkused on paarisarvud. Järelikult ei saa neist kujunditest kokku panna kuupi, mille mõõtmed on 9x9x9.

18. Tähistades reas puuduvad kolm arvu vastavalt 2 ; a ; b ; c ; 500. Arvestades, et iga arv alates kolmandast on talle eelneva kahe arvu korrutis, saame $b = 2a$; $c = ab$ ja $bc = 500$. Milledest $2a \cdot 2a^2 = 500$ ja $a = 5$. Puuduvad arvud on 5, 10, 50 ja nende korrutis on $5 \cdot 10 \cdot 50 = 2500$.

19. Kümme korda vanem kui praegu olen ma siis, kui mul on vanust 10m. Aastaarvu leidmiseks tuleb sünniaastale liita 10m. See on $1997 - m + 10m = 1997 + 9m$.

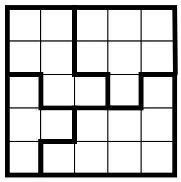
20. Võimalikud ruudud, millede pool pindalast oleks must ja pool valge, on mõõtmetega 2×2; 4×4; 6×6 ja 8×8. Sobivaid 2×2 ruute on 13, 4×4 ruute 9, 6×6 ruute 5 ja 8×8 ruute on 1. Kokku on joonisel 28 erinevat ruutu, mille pool pindalast on musta ja pool valget värvi.

21. Võimalike moodustuvate ruutude ülemisse vasakusse ruutu on kirjutatud ruudu külje pikkuseks olev väikeste ruutude arv. Kokku moodustub ruute 55 .

1.2.3 4.5	1.2.3 4	1.2.3	1.2	1
1.2.3 4	1.2.3 4	1.2.3	1.2	1
1.2.3	1.2.3	1.2.3	1.2	1
1.2	1.2	1.2	1.2	1
1	1	1	1	1

22. Sobiva vastuse leidmiseks vaatleme vastusevariante.
Kui $f(x) = -4x + 1$, siis $f(f(x)) = -4(-4x + 1) + 1 = 16x + 3$,
mis ei sobi vastuseks. Kontrollides pakutud võimalusi leiame, et juhul kui $f(x) = -2x + 3$, siis $f(f(x)) = -2(-2x + 3) + 3 = 4x - 3$.

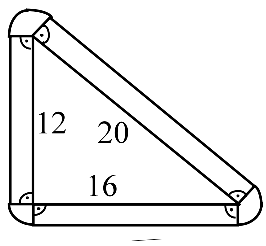
23. Kokkupandud ruudus peab väikeste ruutude arv olema mõne naturaalarvu ruut. Kujundid A, B, C, D ja E koosnevad vastavalt 4, 5, 6, 7 ja 8-st väiksest ruudust. Kokku on kujundites ruute 30. Võimalik on moodustada ruut, milles on 25 väikest ruutu. Sel juhul jääks kasutamata kujund B. Kujundite võimalik paigutus on joonisel.



24. Suurima pindalaga on võrdhaarne kolmnurk küljepikkustega 1, 3 ja 3.
Kui küljele pikkusega 1 tõmmata kõrgus h, siis selle pikkus on $h = \sqrt{9 - \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{35}}{2}$.

Kolmnurga pindala $S = \frac{1 \cdot \frac{\sqrt{35}}{2}}{2} = \frac{\sqrt{35}}{4}$.

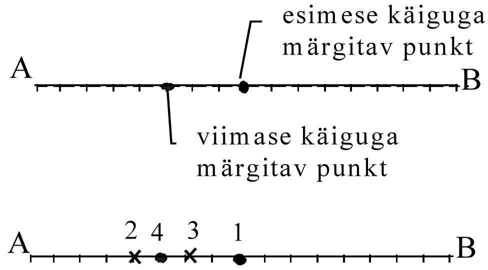
25. Väljaspool aeda oleva territooriumi pindala koosneb kolmest ristkülikust mõõtmetega 2×16; 2×12 ja 2×20 ning kolmest sektorist, mis kokku moodustavad täisringi raadiusega 2. Seega saab kaelkirjak väljastpoolt aeda süüa rohtu alalt, mille pindala on



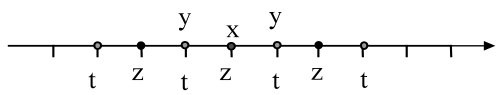
$2 \cdot (16 + 12 + 20) + 4\pi = 108,56\ m^2$.

26. Kuna m on paaritu arv, siis m+1 on paarisarv ja järelikult ka liidetavad $(m+1)^2$ ja $n(m+1)$ on mõlemad alati paarisarvud. Kahe paarisarvu summa on aga alati paarisarv.

27. Viimasena märgitud punkt peab lõigu AB jaotama suhtes 5 : 11. Järelikult lõik AB on 16 ühikut ja viimasena märgitud punkt asub ühest otspunktist 5 ühiku kaugusel. Tähistades lõigul ka esimese käiguga märgitava punkti, on lihtsam näha, kuhu tuleks teha vahepealsed käigud. Neljanda käiguga on võimalik märkida punkt, mis jaotab lõigu AB suhtes 5 : 11.



28. Fikseerime arvteljel arvu x ja märgime sellele teljele ka ülejäänud arvude võimalikud asukohad, arvestades, et y paikneb arvust x ühe ühiku kaugusel, arv z paikneb arvust y ühe ühiku kaugusel ja arv t paikneb arvust z ühe ühiku kaugusel. Arvteljelt on näha, et arvude x ja t väärtused ei saa olla võrdsed, ehk x – t ei saa olla 0.



29. $\left|\left||x|-1\right|-a\right| = 4$

$$\left||x|-1\right| = \begin{cases} 4+a, & kui \quad a \geq -4 \\ -4+a, & kui \quad a \geq 4 \end{cases} \Rightarrow |x| = \begin{cases} 1)\ 4+a+1, & kui \quad a \geq -4 \\ 2)\ -4-a+1, & kui \quad a \geq -4 \ ja\ a \leq 3 \\ 3)\ -4+a+1, & kui \quad a \geq 4 \\ 4)\ 4-a+1, & kui \quad a \geq 4 \ ja\ a \leq 5 \end{cases}$$

Saadud tingimustest teine ja neljas on vastuolulised.
Vaadeldes nüüd vastusevariantides olevaid a väärtusi, leiame, et kui a = -3, siis ei saa olla viit lahendit, sest täidetud on vaid esimene ja teine tingimus. Kui a=5, siis on täidetud tingimused 1), 3) ja 4). Tingimustest 1) ja 3) saame kummastki kaks lahendit ja tingimusest 4) ühe. Seega 5 lahendit on võrrandil juhul kui a = 5.

30. Värvitud pindala leidmiseks tuleb kolmnurga ABC pindalast lahutada sektorite pindalad.

Kolmnurga pindala arvutamiseks leiame kõrguse CR. $CR = \sqrt{AC^2 - AR^2} = 3\sqrt{3}$.

$S_{ABC} = \dfrac{6 \cdot 3 \cdot \sqrt{3}}{2} = 9\sqrt{3}$. Ringjooned eraldavad kolmnurgast kolm 60°-st sektorit.

Nende pindala kokku on : $3 \cdot \dfrac{3^2\pi}{6} = \dfrac{9\pi}{2}$. Värvitud osa pindala $9\sqrt{3} - \dfrac{9\pi}{2} = 9\left(\sqrt{3} - \dfrac{\pi}{2}\right)$.