;

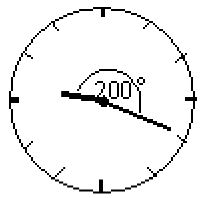
Lahendused

JUNIOR

1. (C) Vt. benjaminide ül. 13.

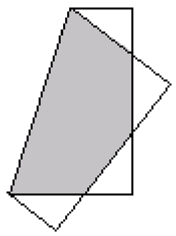
2. (D) Joonistel A, B, C ja E on mõlemad nööri otsad samal pool aasa ja järelikult tõmmates otstest ei teki sõlme. Joonisel D aga on nööri otsad teineteisel pool aasa ja tõmmates tekib sõlm.

3. (C) Ühe minutiga liigub kella minutiosuti 6° võrra edasi. Ühe minutiga liigub tunniosuti 0,5° võrra edasi. Seega kell 9.20 on nurk osutite vahel
$6° \cdot 20 + (90° - 0{,}5° \cdot 20) = 200°$ või siis $360° - 200° = 160°$.



4. (B) Vt. benjaminide ül. 20.

5. (C) Vt. kadettide ül. 22.

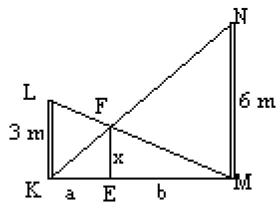


6. (C) Kui arv on esitatud algteguriteks lahutusena $a = p^m \cdot q^n$, siis sel arvul on $(m+1)(n+1)$ jagajat.
Arvu $a = 7^{84} \cdot 11^{65}$ jagajate arv on seega $(84+1)(65+1) = 5610$
Arvu $7a = 7^{85} \cdot 11^{65}$ jagajate arv on $(85+1)(65+1) = 5676$
Arvu $11a = 7^{84} \cdot 11^{66}$ jagajate arv on $(84+1)(66+1) = 5695$
Arvu $17a = 17 \cdot 7^{84} \cdot 11^{65}$ jagajate arv on $(1+1)(84+1)(65+1) = 11220$
Kõige rohkem jagajaid on arvul 17a.

7. (B) Tekkiv kujund on viisnurk.

8. (B) Neli järjest võetud palli võivad olla erinevat värvi. Nii võib tekkida olukord, kus peale 20. palli panemist on igas karbis 5 palli. Peale 21. palli panemist peab leiduma karp, milles on vähemalt 6 palli.

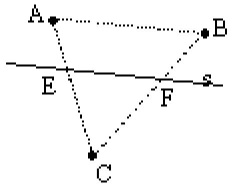
9. (C) Olgu otsitav kõrgus x ning teivaste vaheline kaugus a + b.
Et $\triangle KLM \sim \triangle FEM$, siis $\frac{3}{x} = \frac{a+b}{b}$ ehk $3b = x(a+b)$.
Et $\triangle NMK \sim \triangle FEK$, siis $\frac{6}{x} = \frac{a+b}{a}$ ehk $6a = x(a+b)$.
Järelikult $3b = 6a$ ja $b = 2a$ ning teivaste vaheline kaugus on 3a.
Et $\frac{3}{x} = \frac{3a}{b}$ ja $\frac{6}{x} = \frac{3a}{a} = 3$, siis $x = 2$.



10. (B) Igas sajas oleks üheliste ja kümneliste jaoks vaja 20 korda kirjutada numbrit 4. Lisaks neile on sajalistes vaja 100 korda kirjutada numbrit 4. Seega kokku $10 \cdot 20 + 100 = 300$ korda.

11. (C) Kõige lühem pöialpoiss sai x seent. Et iga järgmine pöialpoiss sai ühe rohkem kui eelmine, siis pöialpoisid said vastavalt x; $x+1$; $x+2$; $x+3$; $x+4$; $x+5$ ja $x+6$ seent. Et jaotatavaid seeni oli 707, siis $7x + 21 = 707$, millest $x = 98$. Kõige pikem pöialpoiss sai $98 + 6 = 104$ seent.

12. (D) Et sirge s asuks punktidest A ja B samal kaugusel peab see sirge olema paralleelne sirgega AB. Et sirge s oleks ka punktist C sama kaugel kui punktidest A ja B, peab ta läbima lõikude AC ja BC keskpunkte, ehk EF peab olema $\triangle ABC$ kesklõik, mis on paralleelne küljega AB. Kolmnurgal on kolm kesklõiku. Järelikult on selliseid sirgeid, mis asuvad kõigist kolmest punktist ühe kaugusel, kolm.

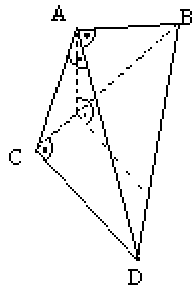


13. (C) $81 = 12^y = (3^x)^y$

Astme astendamisel astendajad korrutatakse, seega $3^{x \cdot y} = 81$. Järelikult $x \cdot y = 4$.

14. (C) Vt. benjaminide ül. 30.

15. (B) Õpilane eksis kui järeldas, et seosest $X(3 - X) > (3 - X)(3 + X)$ järeldub seos $X > (3 + X)$. Et $X > 3$ (seos (1)), siis $3 - X < 0$. Kui võrratust jagada negatiivse arvuga, tuleb võrratusemärk muuta vastupidiseks.



16. (C) Nelitahuka tahkudest peavad 3 olema täisnurksed kolmnurgad.

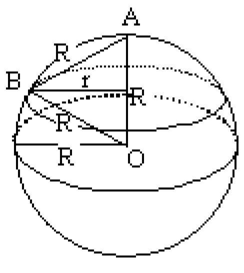
17. (C) $(2 * 3) = 5$, sest $2 \cdot 2 < 2 + 3$; $3 * 2 = 6$, sest $2 \cdot 3 > 3 + 2$;
$5 * 6 = 11$, sest $2 \cdot 5 < 5 + 6$. Järelikult $(2 * 3) * (3 * 2) = 11$.

18. (D) Sõnake peab olema kujul KTKTKTK, kus siis K tähistab kaashäälikut ja T täishäälikut. Mitmel järjekorra poolest erineval viisil saab täishäälikuid Ä, U, U kirjutada kolmele kohale ?
Võimalusi on 3 (Ä,U,U; U,Ä,U; U,U,Ä).
Mitmel järjekorra poolest erineval viisil saab kaashäälikuid K, N, G, R kirjutada neljale kohale ?
Võimalusi on $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$.
Kokku on võimalik moodustada $3 \cdot 24 = 72$ erinevat sõnakest.

19. (C) Erinevaid teid punktist A punkti B on 10. Teid, mis lähevad läbi punkti X on 4. Järelikult tõenäosus, et Anne läheb läbi punkti X on $\frac{4}{10} = \frac{2}{5}$.

20. (B) Hulknurga diagonaalide arv on $\frac{n(n-3)}{2}$, kus n on hulknurga külgede arv.

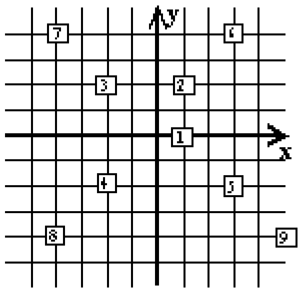
A: $\frac{n(n-3)}{2} = 28$, järelikult $n(n-3) = 56$. Väide on vale, sest ei leidu kahte täisarvu, millede vahe oleks 3 ja korrutis 56.
B: $n(n-3)$ on paarisarv. Et n ja $n - 3$ on erineva paarsusega, siis n võib olla nii paarisarv kui paaritu arv. Järelikult on see väide vale.
C: $\frac{n(n-3)}{2} > n$; $n(n-3) > 2n$; $n - 3 > 2$. Väide ei kehti alati, näiteks n = 3, 4 või 5.
D: $\frac{n(n-3)}{2} = 35$; $n(n-3) = 70$, millest $n = 10$. Järelikult väide on tõene.
E: Väide ei ole tõene, sest ka 16-nurgal on rohkem kui sada diagonaali. $\frac{16(16-3)}{2} = 104$.



21. (C) Kolmnurk OAB on võrdkülgne. Otsitava ringjoone raadius r on võrdkülgse kolmnurga kõrgus.

Pythagorase teoreemi põhjal $r = \sqrt{R^2 - \frac{R^2}{4}} = \sqrt{\frac{3R^2}{4}} = \frac{R}{2}\sqrt{3}$.

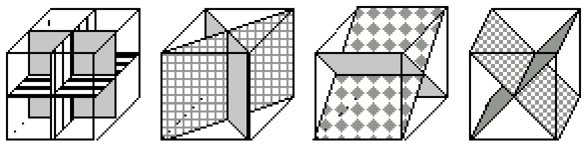
Mardi poolt joonistatud ringjoone pikkus oli $2\pi r = 2\frac{\pi R\sqrt{3}}{2} = \pi R\sqrt{3}$.



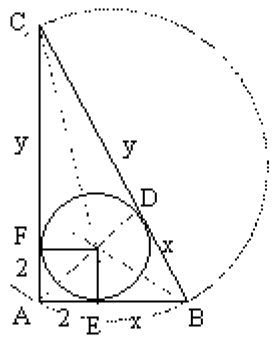
22. (B) Kui sammu järjekorranumber jagub arvuga 4, siis osake asub kolmandas veerandis ja tema koordinaatideks on sammu järjekorranumber jagatud neljaga ja korrutatud miinus kahega.
Peale 48. sammu on koordinaadid $(-24;-24)$
Peale 49. sammu on koordinaadid $(-24 + 49; -24)$
Peale 50. sammu on koordinaadid $(-24 + 49; -24 + 50)$, mis on $(25; 26)$

23. (C) Ristküliku pindala on $6 \cdot 4 = 24$ ühikut, mis on 100%. Värvimata osa pindala on $2^2 \cdot \pi + 1^2 \cdot \pi = 5\pi$. Värvitud osa pindala on $24 - 5\pi$, mis moodustab tervikust $100 - \frac{125\pi}{6}$ protsenti.

24. (D) Kuubil on 9 sümmeetriatasandit.



25. (D) Et arvu X kümneliste number on 2, siis arvu X üheliste number on kas 1 või 3. Et X + Y on paarisarv, siis arvu Y üheliste number peab olema paaritu, st. 5. Arvu X · Y üheliste number on 5, sest nii 1 · 5 kui ka 3 · 5 üheliste number on 5.



26. (A) Täisnurkse kolmnurga ümberringjoone keskpunkt poolitab hüpotenuusi, seega CB = 13. Tähistame siseringjoone puutepunktid kolmnurga külgedega vastavalt D, E ja F ning olgu CD = y ja DB = x.
Siis CB = x + y = 13 ja AE = AF = 2 cm. Kolmnurga siseringjoone keskpunkt asub kolmnurga nurgapoolitajate lõikepunktis, järelikult $\triangle EBO = \triangle DBO$ ja $\triangle DCO = FCO$ ning EB = BD ja FC = CD.
Kolmnurga ümbermõõt on
$y + x + 2 + x + 2 + y = 4 + 2(x + y) = 4 + 2 \cdot 13 = 30$ cm.

27. (D) Tingimuste kohaselt $n + 27 = a^2$ ja $n - 62 = b^2$, kus $a, b \in \mathbb{N}$
Lahutades esimesest võrdusest teise, saame $89 = a^2 - b^2$ ehk
$89 = (a + b)(a - b)$.
Arv 89 on algarv, järelikult on kaks võimalust: 1) $a + b = 1$ ja $a - b = 89$
2) $a + b = 89$ ja $a - b = 1$.
Kuna a ja b peavad olema naturaalarvud, siis esimene võimalus ei sobi. Teisest leiame, et $a = 45$ ja $b = 44$. Arv $n = 45^2 - 27 = 1998$.

28. (C) $\Phi^5 = \Phi^2 \cdot \Phi^2 \cdot \Phi = (\Phi + 1)^2 \cdot \Phi = (\Phi^2 + 2\Phi + 1) \cdot \Phi = \Phi^3 + 2\Phi^2 + \Phi = \Phi^2 \cdot \Phi + 2(\Phi + 1) + \Phi = (\Phi + 1)\Phi + 2\Phi + 2 + \Phi = \Phi^2 + \Phi + 3\Phi + 2 = \Phi + 1 + 4\Phi + 2 = 5\Phi + 3$.

29. (B) Vt. kadettide ülesanne nr. 30.

30. (C) Oletame, et kõigepealt võetakse ära kõik 20 pudelit. Vähemalt mitu mahlapudelit tuleks riiulile tagasi panna, et seal oleks vähemalt 4 ühest sordist ja 3 teisest sordist ? Halvimal juhul võivad kaheksa esimest tagasi pandavat pudelit olla kõik mustsõstramahlad. Et tagasi panna veel kindlasti 3 vaarika - või 3 maasikamahla, tuleks riiulile panna 5 pudelit. Kokku 13. Seega ära võtta saab maksimaalselt 7 pudelit.