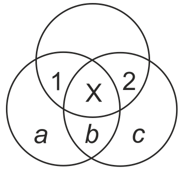
KÄNGURU 2015
JUUNIOR

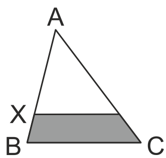
LAHENDUSED
5p ülesanded

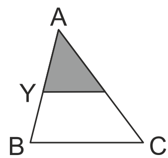


21. (A) Olgu a, b ja c arvud kolmes alumises piirkonnas vasakult paremale. All vasakul olev arv on $a = 1 + b$ ning all paremal olev arv on $c = 2 + b$. All keskel olev arv on $b = X + a + c$. Järelikult $b = X + 3 + 2b$ ehk $b = –3 – X$. Seega $X = 1 + 2 + b$ ehk $X = 1 + 2 – 3 – X$, millest $X = 0$.

22. (B) Kolme sõnaraamatu järjestamiseks on 6 võimalust: esimesele kohale raamatu valimiseks on 3 võimalust ja pärast seda teisele kohale raamatu valimiseks alati 2 võimalust. Kahe romaani järjestamiseks on 2 võimalust. Sõnaraamatute ploki ja romaanide ploki omavaheliseks järjestamiseks on 2 võimalust. Kokku on võimalusi seega $6 \cdot 2 \cdot 2 = 24$.

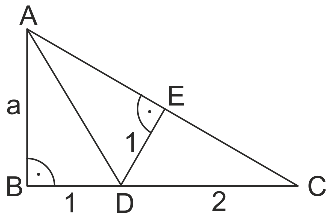
23. (C) Et arv peab olema kahekohaline, siis on meil kasutada seitse arvu 2 astet: 2^6, 2^5, 2^4, 2^3, 2^2, 2^1 ja 2^0. Et summas on 6 liidetavat, siis peab üks neist välja jääma. Kui välja jääb 2^6, siis saame arvu $2^5 + 2^4 + 2^3 + 2^2 + 2^1 + 2^0 = 63$. Kui välja jääb 2^5, siis saame arvu $2^6 + 2^4 + 2^3 + 2^2 + 2^1 + 2^0 = 95$. Kui välja jääb mõni väiksem aste, siis tuleb summa juba rohkem kui kahekohaline, sest $2^6 + 2^5 = 96$ ja ülejäänud liidetavatest lisandub veel kindlasti kas 2^4 või 2^3. Ülesande nõuetele vastavaid arve on järelikult kaks.





24. (E) Mõlemal joonisel tekkinud kolmnurgad on sarnased kolmnurgaga ABC. Sarnaste kujundite pindalade suhe on võrdne sarnasusteguri ruuduga. Et $AX : XB = 4 : 1$, siis valge kolmnurga külgede pikkused moodustavad kogu kolmnurga külgede pikkustest $\frac{4}{5}$. Valge kolmnurga pindala on seega $\left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{16}{25}$ kogu kolmnurga pindalast. Tumedamaks värvitud trapetsi pindala moodustab siis kogu kolmnurga pindalast $1 - \frac{16}{25} = \frac{9}{25}$. Et tumedaks värvitud kolmnurga pindala moodustab kogu kolmnurga pindalast $\frac{9}{25}$, peavad tema külgede pikkused moodustama kolmnurga ABC külgede pikkustest $\sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{3}{5}$. Seega AY = $\frac{3}{5}$AB, ja YB = $\frac{2}{5}$AB ning AY : YB = 3 : 2.

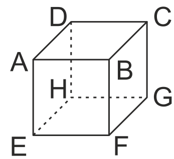
25. (C) Olgu meil kolmnurk ABC, kus AD poolitab nurga BAC. Nurgapoolitaja iga punkt asub nurga haaradest võrdsel kaugusel. Antud juhul punkti D kaugus küljest AB on 1. Vastasel juhul oleks täisnurkses kolmnurgas DCE kaatet DE pikem hüpotenuusist DC, mis on aga võimatu. Olgu külje AB pikkus a. Kolmnurga ABC pindala on siis $\frac{1}{2}BC \cdot AB = \frac{1}{2} \cdot 3a$ ja kolmnurga ADC pindala on $\frac{1}{2}DC \cdot AB = \frac{1}{2} \cdot 2a = a$. Kolmnurga ADC pindala saame leida nii, et vaatame külge AC ja sellele tõmmatud kõrgust. Kuna see kõrgus on 1, siis järelikult külje AC pikkus on 2a. Pythagorase teoreemi põhjal $a^2 + 3^2 = (2a)^2$, millest a = $\sqrt{3}$. Nüüd täisnurksest kolmnurgast ABD saame, et AD = $\sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = \sqrt{4}$.



26. (A) Et *a*, *b* ja *c* on erinevad numbrid, siis kehtivad antud võrratused parajasti siis, kui *a* < *b* < *c*. Seega piisab valida numbrite 1, 2, …, 9 hulgast kolm ning võtta need suuruse kasvamise järjekorras arvudeks *a*, *b*, *c*. Kolme numbri valikuks on kokku 9 · 8 · 7 võimalust. Iga numbrite kolmiku *a*, *b*, *c* kuuest võimalikust järjestusest on meile sobiv vaid üks *a* < *b* < *c* ja seega on sobivaid võimalusi (9 · 8 · 7) : 6 = 84.

27. (B) Arvude 1, 2, …, *n* summa on $\frac{n(n+1)}{2}$. Kui pärast ühe arvu eemaldamist järelejäänud (*n* – 1) arvu keskmine on 4,75, siis nende summa on 4,75(*n* – 1). Viimasest avaldisest näeme, et *n* – 1 peab olema arvu 4 kordne, sest summa on täisarv. Seega tulevad *n* väärtustena kõne alla ainult arvud 5, 9, 13, …. Kui *n* = 5, siis on arvude summa esialgu $\frac{5 \cdot 6}{2} = 15$ ning pärast ühe arvu eemaldamist on summa 4,75(5 – 1) = 19, mis on võimatu. Kui *n* = 9, siis esialgu on arvude summa $\frac{9 \cdot 10}{2} = 45$ ja pärast ühe arvu eemaldamist 4,75(9 – 1) = 38. Järelikult kustutati arv 45 – 38 = 7. Kui *n* = 13, siis on arvude summa esialgu $\frac{13 \cdot 14}{2} = 91$ ja pärast ühe arvu kustutamist 4,75(13 – 1) = 51, mis on samuti võimatu, sest eemaldada tuleks 13-st suurem arv. Ükski suurem n samuti ei sobi, sest avaldis $\frac{n(n+1)}{2}$ kasvab kiiremini kui avaldis 4,75(n – 1).

28. (D) Et teekond jõuaks tagasi alguspunkti, peab sipelgas kuubi igast tipust väljuma sama palju kordi, kui palju ta sinna siseneb. Kuubil on 8 tippu ja iga tipuga on seotud 3 serva. Seega peame mõned servad muutma kahekordselt läbitavaks. Vähim arv servi, mille kahekordseks muutmisega saame iga tipuga seotud servade arvu paarisarvuks, on 4: näiteks muudame kahekordseks kõik kuubi ülemist ja alumist tahku ühendavad servad. Nüüd kui ülemisel tahul on tipud A, B, C, D ja neile vastavad alumisel tahul tipud E, F, G, H, saab sipelgas läbida kõik servad ja jõuda tagasi alguspunkti teekonnaga ABCDAEFBFGCGHDHEA, mille pikkus on 16 sammu.



29. (D) Olgu $a_1, \ldots, a_8$ mingid erinevad arvud, millede korrutis on –1 (Näiteks 2, $\frac{1}{2}$, 3, $\frac{1}{3}$, 4, $\frac{1}{4}$, 5, $-\frac{1}{5}$). Vaatleme arve 1, –1, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8. Siin on nii arv 1 kui ka arv –1 ülejäänud arvude korrutis. Seega kaks arvu saab olla alla joonitud. Oletame, et mingi kümne arvu puhul saab alla joonida kolm arvu x, y ja z. Siis kehtivad võrdused x = yzK, y = zxK, z = xyK, kus K on ülejäänud seitsme arvu korrutis. Ilmselt ei tohi ükski kümnest arvust olla 0. Jagades esimese võrduse teisega, teise kolmandaga ja kolmanda esimesega, saame $\frac{x}{y} = \frac{y}{x}$, $\frac{y}{z} = \frac{z}{y}$, $\frac{z}{x} = \frac{x}{z}$, ehk vastavalt $x^2 = y^2$, $y^2 = z^2$, $z^2 = x^2$, millest $x^2 = y^2 = z^2$. Kuid kolme erineva arvu ruudud ei saa olla kõik võrdsed, vastuolu. Seega kolme (ega ka rohkemat) arvu alla joonida ei saa.

30. (B) Olgu sirgel märgitud n punkti. Vasakult lugedes x-s punkt asub nendel lõikudel, mille vasak otspunkt jääb sellest punktist vasakule (x – 1 punkti) ning parem otspunkt sellest punktist paremale (n – x punkti). Seega asub x-s punkt (x – 1)(n – x) lõigul. Teades, et üks punkt asub 80 lõigul ja teine 90 lõigul, on meil vaja kumbki arvudest 80 ja 90 lahutada kaheks teguriks nii, et tegurite summa oleks mõlemal juhul sama, n – 1. Arvu 80 teguriteks lahutused on $80 = 1 \cdot 80 = 2 \cdot 40 = 5 \cdot 16 = 8 \cdot 10$, arvu 90 teguriteks lahutused aga $90 = 1 \cdot 90 = 2 \cdot 45 = 3 \cdot 30 = 5 \cdot 18 = 6 \cdot 15 = 9 \cdot 10$. Sama tegurite summaga on ainult teguriteks lahutused $80 = 5 \cdot 16$ ja $90 = 6 \cdot 15$, kus tegurite summa on 21. Seega n – 1 = 21, millest n = 22.