KÄNGURU 2017
JUUNIOR

LAHENDUSED
5p ülesanded

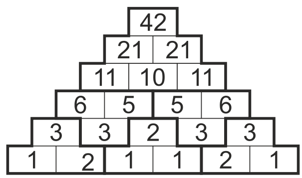
21. (A) Arvud on vaheldumisi paaris ja paaritud. Et summa on paaritu, siis on 4 paarisarvu ja 3 paaritut arvu. Järelikult on *b*, *d* ja *f* paaritud ega saa olla 286. Arv *a* saab olla 286, sest 286 + 287 + 288 + 289 + 290 + 289 + 288 = 2017, sümmeetriliselt ka arv *g* saab olla 286. Arv *c* ei saa olla 286, sest sel juhul oleks summa maksimaalne väärtus 288 + 287 + 286 + 287 + 288 + 289 + 290 = 2015, sümmeetriliselt ka *e* ei saa olla 286.

22. (E) Tõenäosus, et esimesel veeretamisel tuleb negatiivne arv ja teisel positiivne, on $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$. Tõenäosus, et esimesel veeretamisel tuleb positiivne arv ja teisel negatiivne, on $\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$. Tõenäosus, et korrutis tuleb negatiivne, on $\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{1}{3}$.

23. (C) Kuuekohalist arvu *ababab* saame kirjutada korrutisena (10*a* + *b*) ·10101. Et 10101 = 7 · 1443, siis jagub uus arv *ababab* alati 7-ga. Samas näiteks arv 131313 ei jagu 2-ga, 5-ga, 9-ga ega 11-ga.

24. (E) Parool, mille erinevad numbrid kordsusi arvestamata on *a*, *b*, …, peab olema selline, et *a* + *b* + … = 7. Kui numbreid on üks, siis ainuke võimalus on *a* = 7. Kui numbreid on kaks, siis võimalused on *a* = 1, *b* = 6; *a* = 2, *b* = 5; *a* = 3, *b* = 4 ja samad variandid vastupidises järjekorras (kokku 6 võimalust). Kui numbreid on kolm, siis võimalused on *a* = 1, *b* = 2, *c* = 4 ning samad variandid teises järjekorras (kokku 6 võimalust). Üldse on võimalusi 1 + 6 + 6 = 13.

25. (B) Selles arvude tabelis saab kolmest lahtrist koosnevas kolmnurgas küljepikkusega 2 (näiteks 2 ülemist rida) olla maksimaalselt 2 paaritut arvu, kuuest lahtrist koosnevas kolmnurgas küljepikkusega 3 (näiteks 3 ülemist rida) olla maksimaalselt 4 paaritut arvu. Tükeldame ruudustiku 5 kolmnurgaks küljepikkusega 2 (kahes alumises reas 2 kolmnurka, kahes keskmises 2 kolmnurka ja kahe ülemise rea kolmnurk), üle jääb kolmnurk küljepikkusega 3. Seega paaritute arvude arv on ülimalt 5 · 2 + 4 = 14. Kui kirjutada alumistesse lahtritesse arvud 1, 2, 1, 1, 2 ja 1, siis tekibki parajasti 14 paaritut arvu.



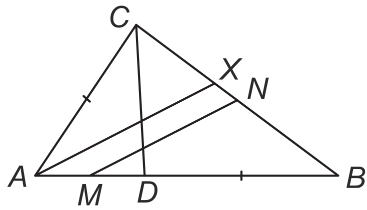
26. (E) Hulknurga sisenurkade summa on arvu 180 kordne ning kumeras hulknurgas on kõik sisenurgad väiksemad kui 180°. Esimene arvule 2017 järgnev 180-ga jaguv arv on $2160 = 12 \cdot 180$. Unustatud nurk oli suurusega $2160° – 2017° = 143°$.

27. (B) Kaaluvihtide masside summa on 621 grammi. Joonisel näidatud olukord leiab aset parajasti siis, kui kergema kaalukausi vihtide kogumass ei ületa 310 grammi. Kaaluvihile massiga 106 grammi saab 5 ülejäänud kaaluvihi hulgast kahte paarilist valida 10 viisil. Kergemal kaalukausil saab kaaluviht massiga 106 grammi asuda ainult kas koos kaaluvihtidega, mille mass on 101 ja 102 grammi, või koos kaaluvihtidega, mille mass on 101 ja 103 grammi. Otsitav tõenäosus on seega $\left(1-\frac{2}{10}\right)100\% = 80\%$.

28. (D) Olgu $|PA| = x$ ja $|MB| = |MA| = y$. Et ringjoone puutuja on risti puutepunktist tõmmatud raadiusega, siis kolmnurk *PBM* on täisnurkne. Seega kehtib $(x+6)^2 + y^2 = (x+y)^2$, millest $12x + 36 = 2xy$ ehk $x(2y-6) = 36$. Et x ja y on täisarvud, siis $2y-6$ on paarisarv ning arvu 36 tegur ehk 2, 4, 6, 12, 18 või 36. Järelikult ka arvul y ehk lõigu *MB* pikkusel saab olla 6 väärtust.

29. (C) Lisaks põlema lülitatud lampidele saavad hakata lambid süttima vaid siis, kui algselt on põlema lülitatud vähemalt kaks lampi. Kui lülitada sisse lambid ruudustiku mistahes kahes naaberruudus, siis ei saa süttida ükski teine lamp, sest kahel naaberruudul pole ühtegi ühist naaberruutu. Kui kahe põleva lambiga ruudu vahel on ainult üks ruut, siis süttib selles ruudus küll lamp, kuid see jääb ka ainsaks. Kui kahe põleva lambiga ruudu vahel on rohkem kui 1 ruut, ei ole neil ühiseid naaberruute. Vaatame 2×2 ruudustikku. Kui põlema lülitada diagonaalruutudes olevad 2 lampi, siis ülejäänud kaks ruutu on nende ühised naaberruudud ja nendes paiknevad 2 lampi süttivad põlema. Vaatame nüüd 3×3 ruudustikku. Ühes 2×2 alamruudustikus saame kaks diagonaallampi põlema lülitades kõik 4 lampi põlema nagu eespool kirjeldatud. Ülejäänud viie lambi süütamiseks piisab, kui põlema lülitada kolmas diagonaalil asuv lamp. Kui aga põlema lülitada ükskõik milline neljast diagonaalil mitte asuv lamp, ei piisa sellest kõikide ülejäänud lampide süttimiseks. Analoogiliselt arutledes jõuame järelduseni, et $n \times n$ ruudustikus saavutame olukorra, kus lõpuks kõik lambid põlevad, kui eelnevalt põlema lülitada kõik diagonaalil paiknevad n lampi. Ruudustikus 9×10 saamegi valida ühe 9×9 ruudustiku, lülitada põlema eelnevalt selle diagonaalil paiknevad 9 lampi ja nii süttivad kõik lambid 9×9 ruudustikus nagu eespool kirjeldatud. Et ka ülejäänud lambid sütiksid, piisab kui algul lülitame põlema ühe valitud 9×9 ruudustikku mitte kuuluva lambi. Seega, alguses tuleks põlema lülitada vähemalt 10 lampi ja sellest ka piisab.

30. (A) Tõmbame lõiguga *MN* paralleelse sirge läbi punkti *A* ning lõigaku see lõiku *BC* punktis *X*. Olgu $|AC| = |DB| = x$, $|AM| = |MD| = y$ ja $|BN| = |NC| = z$. Kolmnurgad *AXB* ja *MNB* on sarnased. Seega $|XB| = \frac{|AB| \cdot |NB|}{|BM|} = \frac{(x+2y)z}{x+y}$



ja $|XC| = 2z - |XB| = 2z - \frac{(x+2y)z}{x+y} = \frac{xz}{x+y}$, mistõttu $\frac{|XB|}{|XC|} = \frac{x+2y}{x} = \frac{|AB|}{|AC|}$. Seega on *AX* nurga $\angle BAC$ poolitaja, millest $\angle BAC = 2\alpha$.