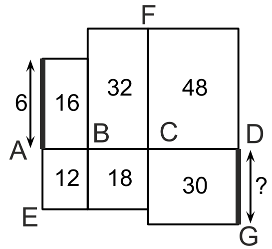
JUUNIOR 2021

1. (D) Ühes kuus kolmandat korda sama nädalapäevani jõudmiseks kulub 15 päeva. Seega ka kängurupäev ei saa olla varem kui 15. märtsil. Valikvastustes on sellest kuupäevast varasem vaid 13. märts, mis ei saa olla kängurupäevaks.

2. (C) Teisipäevast temperatuuri langust võrreldes esmaspäevaga näitavad vaid graafikud vastusevariantides C ja E. Kolmapäevast ja neljapäevast temperatuuri tõusu aga näitab neist kahest vaid graafik vastusevariandis C. Sel graafikul näidatud temperatuuri langus reedel vastab samuti ilmateatele.

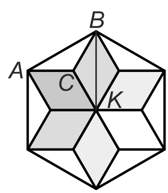
3. (E) Kõikide kasside teekond koosneb kolmnurga ühe küljega (alusega) võrdsest lõigust, kahest selle alusega paralleelsest lõigust ja kolmest mööda külgservi kulgevast lõigust. Paneme tähele, et igal kassil on mööda külgservi kulgeva kolme teelõigu pikkuste summa võrdne külgserva enda pikkusega. Kuna kõik kolmnurgad on võrdsed, võib teede pikkuste P, Q ja R erinevus tekkida vaid alusega paralleelse kahe lõigu pikkuste erinevusest. Võrreldes pikkusi P, Q ja R paarikaupa, näeme, et igal paaril on ühed alusega paralleelsetest lõikudest sama pikkusega, teised aga erineva pikkusega. Seejuures on pikem lõik, mis asub alusele lähemal. Kõike seda arvesse võttes saame, et P < Q, R < Q ja P < R ehk P < R < Q.

4. (D) Ristküliku pindala ja ühe külje pikkuse abil saame leida teise külje pikkuse. Seega (vt. joonist) $|AB| = 16 : 6 = \frac{8}{3}$; $|AE| = 12 : \frac{8}{3} = \frac{9}{2}$; $|BC| = 18 : \frac{9}{2} = 4$; $|CF| = 32 : 4 = 8$ ja $|CD| = 48 : 8 = 6$. Lõigu DG otsitava pikkuse leiame tehtega 30 : 6 = 5 (cm).



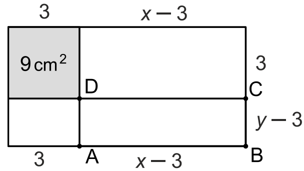
5. (D) Kui külalismeeskond sai teisel poolajal x punkti, siis kodumeeskond sai $2x$ punkti ja mäng lõppes seisuga $(7 + 2x) : (14 + x)$. Kuna kodumeeskond sai 1 punkti rohkem, siis $7 + 2x - 1 = 14 + x$, millest leiame, et $x = 8$ ning mängu lõpptulemuseks oli 23 : 22.

6. (D) Kuue võrdse rombi teravnurgad moodustavad tärni keskel nurga suurusega 360°. Seega on sellise rombi teravnurga suurus 360° : 6 = 60° ning nürinurga suurus 180° – 60° = 120°. Tõmbame ühele rombidest diagonaali BK ja võrdleme kolmnurki ACB ja BCK. Leiame, et $|AC| = |BC| = |KC|$ (rombide küljed) ning nurga ACB suurus on 360° – 120° – 120° = 120°. Seega on need kolmnurgad ACB ja BCK võrdsed, mis tähendab, et valge kolmnurk ACB on võrdne poolega ühest rombist. Tekkinud kuusnurga pindala on siis võrdne 9 rombi pindalaga ehk $9 \cdot 4 = 36$ (cm^2).



7. (C) Olgu iga kolmiku vanus on x aastat. Sel juhul kuueliikmelise bändi liikmete keskmine vanus avaldub kujul (3x + 19 + 20 + 21) : 6. Saame võrrandi (3x + 60) : 6 = 21, millest kolmikute vanus x = 22 aastat.

8. (C) Kui esialgse ristküliku küljepikkused on x cm ja y cm, siis $2(x + y) = 32$ ja $x + y = 16$. Kui ruudu pindala on 9 cm^2, siis selle ruudu külje pikkus on 3 cm. Seega on ristküliku *ABCD* küljepikkused $x – 3$ ja $y – 3$ sentimeetrit (vt. joonist). Leiame nüüd ristküliku *ABCD* ümbermõõdu $2(x – 3 + y – 3) = 2(x + y – 6) =$ $= 2(16 – 6) = 20$ sentimeetrit.

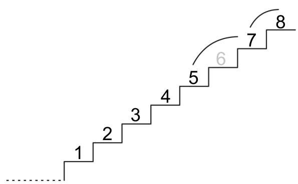


9. (E) Olgu otsitav arv x. Ülesande tingimuste põhjal saame võrrandi $x - \frac{1}{10} = x \cdot \frac{1}{10}$, millest $\frac{9x}{10} = \frac{1}{10}$. Seega $x = \frac{1}{10} : \frac{9}{10} = \frac{1}{9}$.

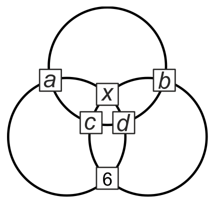
10. (A) Paneme tähele, et valikvastustes antud viie arvu võimalike korrutiste ainsad algtegurid on 2 ja 3. Seega ei saa nende arvude endi algtegurite seas olla teisi peale arvude 2 ja 3. Et liidetavate keskmine on 44 : 5 = 8,8, peab liidetavate seas olema vähemalt üks arvudest 9. Kuna $5 \cdot 9 = 45 > 44$ ja $5 \cdot 8 = 40 < 44$ aga $4 \cdot 9 + 8 = 44$, siis vaadeldavad viis ühekohalist arvu saavad olla vaid 9, 9, 9, 9 ja 8. Nende korrutis on $9^4 \cdot 8 = 3^8 \cdot 2^3$, mis on ka valikvastuses A.

11. (B) Kui iga järgmine küünal oleks süüdatud hetkel, kui viimati süüdatud küünal kustus, oleks 10-ne küünla põlemiseks kokku kulunud $2 \cdot 10 = 20$ minutit. Alates teisest küünlast süüdati iga küünal $2 \cdot \frac{1}{10} = \frac{1}{5}$ minutit varem, kui eelmine küünal jõudis kustuda. Seega kulus kümne küünla põlemiseks kokku $\frac{9}{5} = 1\frac{4}{5}$ minutit vähem. Esimese küünla süütamisest kuni viimase kustumiseni kulus $20 - 1\frac{4}{5} = 18\frac{1}{5}$ minutit ehk 18 minutit ja 12 sekundit.

12. (C) Kirp tohib hüpata ülespoole kas järgmisele või ülejärgmisele astmele ja ei tohi hüpata 6-ndale astmele. Jõudmaks 8-ndale astmele, peab kirp jõudma kindlasti 5-ndale astmele. Sealt edasi jõudmiseks on vaid üks võimalus: hüpe 5-ndalt astmelt 7-ndale ja sealt hüpe 8-ndale. Nummerdanud esimesed 5 astet (vt. joonist), leiame 8 erinevat võimalust 5-ndale astmele jõudmiseks: $1 \mapsto 2 \mapsto 3 \mapsto 4 \mapsto 5$; $1 \mapsto 2 \mapsto 3 \mapsto 5$; $1 \mapsto 2 \mapsto 4 \mapsto 5$; $1 \mapsto 3 \mapsto 4 \mapsto 5$; $1 \mapsto 3 \mapsto 5$; $2 \mapsto 3 \mapsto 4 \mapsto 5$; $2 \mapsto 3 \mapsto 5$ ja $2 \mapsto 4 \mapsto 5$.

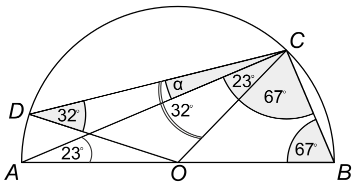


13. (A) Olgu tühjades ruutudes arvud *a*, *b*, *c* ja *d* ning küsimärgiga ruudus otsitav arv *x* (vt. joonist). Iga arv asub täpselt kahel ringjoonel. Seega kolmel ringjoonel asuvate arvude summa kokku on 2(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) = 42 ning ühel ringjoonel paikneva nelja arvu summa on 42 : 3 = 14. Kahel ringjoonel, kus paikneb arv 6, on ülejäänud kolme arvu summa 14 – 6 = 8. Arvude 1 kuni 5 seas on ainult 2 arvukolmikut, mille summa on 8, nimelt 1 + 2 + 5 = 1 + 3 + 4 = 8. Kuna 1 on mõlemas kolmikus, peab see asuma nende kahe ringjoone lõikekohal, ehk küsimärgiga ruudus. Seega *x* = 1. Ülejäänud arvude nõuetekohaseks paigutamiseks on mitu võimalust. Näiteks *a* = 2, *b* = 3, *c* = 4 ja *d* = 5.

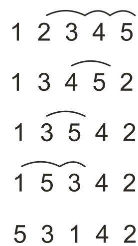


14. (E) Võrdusest $a + b + c = 0$ järeldub, et $a + b = –c$, $b + c = –a$ ja $c + a = –b$. Seega on $(a + b)(b + c)(c + a) = (–c)(–a)(–b) = –abc = –78$, mis erineb valikvastustes A – D antud arvudest.

15. (A) Täisnurkses kolmnurgas *ABC* (vt. joonist) on $\angle CAB = 90^\circ – 67^\circ = 23^\circ$. Kolmnurk *AOC* on võrdhaarne ja seega $\angle ACO = \angle CAO = 23^\circ$. Kolmnurk *DOC* on võrdhaarne ning järelikult $\angle DCO = \angle CDO = 32^\circ$. Nüüd saame, et $\alpha = \angle DCO – \angle ACO = 32^\circ – 23^\circ = 9^\circ$.



16. (D) Kui meid huvitab (finišeerimise järjekorra saavutamiseks) vähim vajalike möödasõitude arv, siis juhul kui auto *X* asub nii stardis kui finišis tagapool autost *Y*, siis ei tohiks auto *X* teha asjatut möödasõitu autost *Y*. Samas kui auto on finišeeris enne varem startinud masinast, pidi ta sellest vähemalt ühe korra mööduma. Nii saame, et auto 2 pidi mööduma autodest 3, 4 ja 5 ning auto 1 pidi mööduma autodest 5 ja 3. Auto 4 pidi mööduma autost 5 ja auto 3 pidi ka mööduma autost 5. Joonisel on näidatud üks võimalus nõutud järjekorra saavutamiseks vähima möödasõitude arvuga 7.



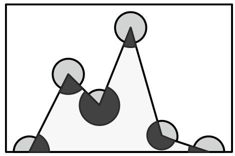
17. (E) Viies võistkonnas oli kokku 9 + 15 + 17 + 19 + 21 = 81 võistlejat. Pärast ühe võistkonna starti oli ootavas neljas võistkonnas kokku kas 81 – 9 = 72, 81 – 15 = 66, 81 – 17 = 64, 81 – 19 = 62 või 81 – 21 = 60 võistlejat. Et ootajate seas oli tüdrukuid 3 korda rohkem kui poisse, moodustas poiste arv $\frac{1}{4}$ ootajate koguarvust, st ootajate koguarv pidi jaguma arvuga 4. Sellised arvud olid 72, 64 ja 60, milles poiste arv pidi olema vastavalt 72 : 4 = 18, 64 : 4 = 16 ja 60 : 4 = 15. Ainult viimane poiste arv on võrdne ka ühe võistkonna liikmete arvuga. (Iga võistkond koosnes kas ainult tüdrukutest või ainult poistest!) Arvu 60 saime, kui esimesena läks starti 21 liikmeline võistkond.

	18	
	47	
14		?

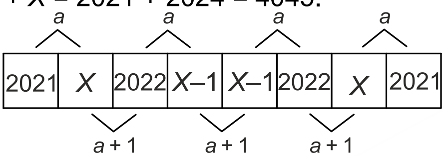
18. (B) Antud ruudustikus saab moodustada neli 2 × 2 ruutu. Ruudustiku keskmine ruut (arvuga 47) on ainsana osaline igas moodustatavas 2 × 2 ruudus. Seega suureneb selles keskmises ruudus olev arv ühe võrra iga käiguga, sõltumata 2 × 2 valikust.

Järelikult on seni tehtud 47 käiku. Ruudustiku alumises vasakus nurgas olev ruut (arvuga 14) on osaline ainult ühes 2 × 2 ruudus. Seega on vasakpoolset alumist 2 × 2 ruutu kasutatud 14 korral. Ülemise rea keskmine ruut (arvuga 18) kuulub kahte 2 × 2 ruutu, mida saab moodustada kahe ülemise rea ruutudest. Seega on neid kahte ülemiste ridade 2 × 2 ruute kasutatud kokku 18 korral. Järelikult on parempoolset alumist 2 × 2 ruutu kasutatud 47 – 14 – 18 = 15 korral. See on ka ainus 2 × 2 ruut, milles on küsimärki sisaldav ruut, mis on osanik ainult selles all paremal asuvas 2 × 2 ruudus. Seega on selles küsimärgiga ruudus arv 15.

19. (C) Joonisel tumeda värviga märgitud kuusnurga sisenurkade summa on $(6 - 2) \cdot 180° = 720°$. Kaartega märgitud (halli värvi) nurkade ja kuusnurga nurkade (tumedamat värvi) suuruste summa on kokku $4 \cdot 360° + 2 \cdot 180° = 1800°$. Seega on kaartega märgitud kuue nurga suuruste summa $1800° - 720° = 1080°$.

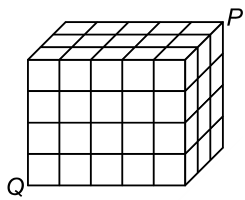


20. (E) Lahendus 1. Kui vasakult teises lahtris on arv X, siis riba sümmeetria tõttu on ka paremalt teises lahtris arv X. Et $a = 2021 + X$, siis $a + 1 = 2022 + X$ ning riba kolmandates lahtrites on arv 2022 ja neljandates lahtrites arv $X - 1$. Seega $a + 1 = 2X - 2$. Lahendades võrrandi $2022 + X = 2X - 2$, saame, et $X = 2024$ ja $a = 2021 + X = 2021 + 2024 = 4045$.



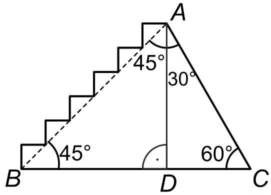
Lahendus 2. Arvude summa lahtrites on ühelt poolt $4a$ ja teiselt poolt $2 \cdot 2021 + 3(a + 1)$. Lahendades võrrandi $4a = 3a + 4045$, saamegi, et $a = 4045$.

21. (C) Kuna varras ei läbi oma teel ühtegi ühikkuubi tippu, saab varras liikuda ühest ühikkuubist teise vaid siis, kui see läbistab ühikkuubikute vahelise (mõttelise) vaheseina. Jõudmiseks punktist Q kuubi ülemisele tahule, tuleb vardal läbistada oma tee erinevatel etappidel 3 vaheseina, parempoolsele tahule jõudmiseks 4 vaheseina ja tagumisele tahule jõudmiseks 2 vaheseina. Kuna iga vaheseina läbimine tähistab uut ühikkuubikut, siis vardal tuleb kokku läbida $3 + 4 + 2 = 9$ ühikkuubikut, millele lisandub muidugi ka esimene ühikkuubik, mille tipus asub punkt Q. Seega läbib varras oma teel punktist Q punkti P kokku 10 ühikkuubikut.



22. (A) Kuna arv 2021 annab jagamisel arvudega 6, 7, 8 ja 9 jäägi 5, siis arv $2021 - 5 = 2016$ jagub arvudega 6, 7, 8 ja 9. Vähim nende nelja arvu kordne on $\text{VÜK}(6, 7, 8, 9) = 9 \cdot 8 \cdot 7 = 504$ ning kordsed kuni arvuni 2016 on 1008 ja 1512. Loomulikult jagub ka arv 0 kõigi vaadeldavate arvudega. Seega on arvuga 2021 sama omadus neljal väiksemal arvul $0 + 5 = 5$, $504 + 5 = 509$, $1008 + 5 = 1013$ ja $1512 + 5 = 1217$.

23. (A) Tõmbame kolmnurga *ABC* kõrguse *AD* (vt. joonist). Paneme tähele, et küljega *BC* risti olevate murdjoone lõikude pikkuste summa, on võrdne kõrguse *AD* pikkusega. Küljega *BC* paralleelsete lõikude pikkuste summa on aga võrdne lõigu *BD* pikkusega. Seega on murdjoone *AB* pikkus $d = |AD| + |BD|$. Kolmnurgas *ABC* on $\angle ABC = 180° – 75° – 60° = 45°$. Seega on täisnurkne kolmnurk *ADB* võrdhaarne



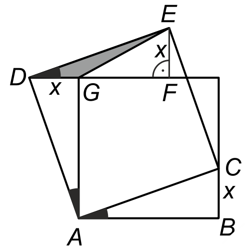
kolmnurk ja $|AD| = |BD|$ ning otsitav teepikkuste suhe on $|AC| : d = \frac{1}{2}|AC| : |AD|$.

Täisnurksest kolmnurgast *ADC* aga leiame, et $|AD| : |AC| = \sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Seega on otsitav teepikkuste suhe $|AC| : d = \frac{1}{2}|AC| : |AD| = \frac{1}{2}\left(1 : \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

24. (B) Mida vähem on arvus numbrikohti, seda väiksem on see arv. Kui on teada arvu numbrite summa (2021), siis seda väiksem on see arv, mida rohkem numbreid 9 on selles arvus. Et $2021 = 224 \cdot 9 + 5$, siis on arvus *N* numbreid 9 koguni 224 ja ainult üks number 5, mis tuleks kirjutada arvu *N* esimeseks numbriks, et saada vähim võimalik arv. Seega on $N = 5999\ldots999$. Leiame arvu $N + 100 = 6000\ldots099$, mille numbrite summa on $6 + 9 + 9 = 24$.

25. (E) Nimetame Veikoks selle poisi, kelle punktisumma 19 oli kõige väiksem, Keviniks selle poisi, kes sai keskmise punktisumma ja Siimuks poisi, kes sai suurima punktisumma. Tähistagu ühe poisi nimekirjas *x* ainult selles nimekirjas olnud nimede arvu, *y* kahes nimekirjas olnud nimede arvu ja *z* kõigis kolmes nimekirjas olnud nimede arvu. Veiko korral saame siis võrrandi $3 \cdot x + 1 \cdot y + 0 \cdot z = 19$ ehk $3 \cdot x + y = 19$, kus $x + y + z = 10$. Kui siin $x \le 4$, siis $3 \cdot x + y \le 19$, kui aga $x \ge 7$, siis $3 \cdot x + y \ge 19$. Seega Veiko jaoks saame summa 19 kogumiseks 2 võimalust 1) $x = 5$, $y = 4$ ja $z = 1$; 2) $x = 6$, $y = 1$ ja $z = 3$. Näitame, et teine võimalustest ei sobi teiste tingimustega. Kui nimekirjades oleks olnud 3 ühtivat nime, siis Siimu suurim võimalik punktisumma oleks olnud $3 \cdot 7 = 21$. Kevini keskmine tulemus saaks sel juhul olla vaid 20 (kõik punktisummad pidi olema erinevad). Kuid proovimiste teel saame kindlaks teha, et Kevini korral võrrandil $3 \cdot x + 1 \cdot y + 0 \cdot z = 20$ puuduvad lahendid. Seega oli ainult Veiko nimekirjas 5 nime, 4 nime Veiko nimekirjast esines kahes nimekirjas ja 1 nimi oli kõigis kolmes nimekirjas. Seega on Kevini ja Siimu nimekirjades 9 punkti andvat nime ja Siimu suurim võimalik punktisumma oleks $3 \cdot 9 = 27$. Sel juhul oleks Kevin ja Veiko jaganud nelja nime ning Kevin saanud $3 \cdot 5 + 1 \cdot 4 + 0 \cdot 1 = 19$ punkti, mis on võrdne Veiko punktisummaga ja pole seetõttu lubatud. Suuruselt järgmine võimalik Siimu punktisumma oleks $3 \cdot 8 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 = 25$. Sel juhul oleks Kevin saanud just keskmise summa $3 \cdot 6 + 1 \cdot 3 + 0 \cdot 1 = 21$. Seega, suurim võimalik punktisumma oli 25.

26. (D) Tõmbame kolmnurga DGE kõrguse EF ja vaatame täisnurkseid kolmnurki DFE, AGD ja ABC (vt. joonist). Nende kõigi hüpotenuusid on sama pikkusega (suure ruudu küljed) ja nende tumedaks värvitud teravnurgad on võrdse suurusega (vastavalt paralleelsete või ristuvate haaradega nurgad). Seega on tegemist kolme võrdse kolmnurgaga ja $|EF| = |DG| = |CB| = x$. Et kolmnurga DGE pindala on 2, siis $0{,}5 \cdot |DG| \cdot |EF| = 0{,}5 \cdot x^2 = 2$, millest $x^2 = 4$. Kolmnurgast ABC leiame Pythagorase teoreemi abil, et $|AC|^2 = x^2 + |AB|^2 = 4 + 16 = 20$.



27. (A) Ülesande tingimuste põhjal leiduvad naturaalarvud m ja n nii, et $a = m^2$ ja $b = n^2$ ning algarv p nii, et $a - b = m^2 - n^2 = (m - n)(m + n) = p$. See on võimalik vaid siis, kui $m - n = 1$ ja $m + n = p$, millest saame, et $p = 2n + 1$. Vastusevariantides antud arvu $b = n^2$ võimalikud väärtused on 225, 169, 144, 100 ja 49, millele vastavad arvu n väärtused on 15, 13, 12, 10 ja 7 ning arvu $p = 2n + 1$ väärtused 31, 27, 25, 21 ja 15. Näeme, et ainus algarv on 31, mille saame, kui $b = 225$.

28. (B) Lahutame numbrite korrutise 1000 algtegureiks ja saame $1000 = 2^3 \cdot 5^3$. Seega on iga otsitava 5-kohalise arvu numbriteks kolm numbrit 5 ning kas 1 ja 8 või 2 ja 4. Kahe erineva numbri koha valikuks 5-kohalises arvus on $5 \cdot 4 = 20$ võimalust, kusjuures kolm tühja kohta täidetakse numbritega 5. Kuna numbripaare on 2, siis on otsitavaid arve $20 + 20 = 40$.

29. (A) Mistahes viie järjestikuse palli seas on alati mingis järjekorras üks punase ja valge palli paar, üks sinine pall ja kaks rohelist palli. Kui järjestikku on pallid värvidega XYZUT, siis järgmine viisik peab olema värvidega YZUTX, st., et värvid hakkavad tsükliliselt viie palli järgi korduma. Roheliste pallide arvud 2 ja 202 annavad arvuga 5 jagamisel jäägi 2, roheline pall arvuga 20 aga jäägi 0. Seega, kõik pallid, mille arvud annavad jagamisel arvuga 5 jäägi kas 2 või 0, on rohelised ja ainult need. Igas pallide viisikus on kahe rohelise palli vahel täpselt 2 palli ja need saavad olla vaid punane ja valge, mille arvud annavad jagamisel arvuga 5 vastavalt jäägi 3 ja 4. Kuna viiest järjestikusest arvust annab igaüks erineva jäägi jagamisel arvuga 5, on siniste pallide arvude jäägid 1. Jäägi 1 annab ka arv 2021. Seega on pall arvuga 2021 värvilt sinine.

30. (C) Olgu 8 mündi täisarvulised kaalud järjestatud kahanemise suunas vasakult paremale nii $m_8 > m_7 > m_6 > m_5 > m_4 > m_3 > m_2 > m_1 \geq 1$. Kuna meid huvitab raskeima mündi m_8 vähim võimalik kaal, siis võime alustada vähimast võimalikust kaalust $m_1 = 1$, kusjuures $m_2 \geq 2$ ja $m_3 \geq 3$. Ülesande tingimuste kohaselt $m_4 + m_1 > m_2 + m_3$, seega $m_4 + 1 > m_2 + m_3$, millest järeldub, et $m_4 \geq m_2 + m_3 \geq 2 + 3 = 5$. Analoogiliselt jätkates saame, et ka $m_{k+2} \geq m_k + m_{k+1}$ iga $k \geq 3$. Seega $m_5 \geq m_3 + m_4 \geq 3 + 5 = 8$, $m_6 \geq m_4 + m_5 \geq 5 + 8 = 13$, $m_7 \geq m_5 + m_6 \geq 8 + 13 = 21$ ja $m_8 \geq m_6 + m_7 \geq 13 + 21 = 34$. Vähim raskeima mündi kaal realiseerubki juhul, kui mündid on valitud kaaludega 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21 ja 34. Paneme tähele, et müntide kaalud moodustavad Fibonacci arvude jada.