# Lahtine võistlus 2019 sügis



**Võistluskomplekti valmimisse panustasid:**

Urve Kangro
Oleg Košik
Aleksei Lissitsin
Richard Luhtaru
Härmel Nestra
Erik Paemurru
Karl Paul Parmakson
Sandra Schumann

## Matemaatika lahtine võistlus

28. september 2019 **Noorem rühm**

*Lahendamisaega on 5 tundi.*
*Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti.*
*Elektroonilised ega kirjalikud abivahendid ei ole lubatud.*
*Palun vormista erinevate ülesannete lahendused eraldi lehtedele!*

**1.** Jüri kirjutab tahvlile mõned järjestikused täisarvud. On teada, et neid on rohkem kui üks ja vähim neist on suurem kui 2. Mari kirjutab tahvlile samapalju järjestikusi täisarve, kusjuures vähim neist on 1. Kas on võimalik, et Jüri kirjutatud arvude korrutise ja Mari kirjutatud arvude korrutise jagatis on mingi täisarvu ruut?

**2.** Juku värvib ruudustikus mõõtmetega $10 \times 15$ täpselt 30 ühikruutu mustaks. Miku katab seejärel täpselt 4 rida ja 4 veergu kinni. Kas Jukul on värvitavate ruutude valikuga võimalik tagada, et lõpuks jääb vähemalt 10 musta ühikruutu nähtavale?

**3.** Leia kõik algarvud $p$, mille korral ka $\dfrac{p-1}{2}$ ja $\dfrac{p+1}{4}$ on algarvud.

**4.** Leia avaldise

$$\frac{1}{\left(\frac{1}{2019}\right)^2+1}+\frac{1}{\left(\frac{2}{2018}\right)^2+1}+\frac{1}{\left(\frac{3}{2017}\right)^2+1}+\ldots+\frac{1}{\left(\frac{2018}{2}\right)^2+1}+\frac{1}{\left(\frac{2019}{1}\right)^2+1}$$

väärtus.

**5.** Ringjoon $c$ keskpunktiga $A$ läbib korrapärase viisnurga $ABCDE$ tippe $B$ ja $E$. Sirge $BC$ lõikub ringjoonega $c$ teistkordselt punktis $F$. Tõesta, et sirged $DE$ ja $EF$ on risti.

**6.** On antud $m \times m$ ruudustik, mille $2n$ erinevat ühikruutu on märgitud ringikesega ($2n \leqslant m^2$). Juku soovib ühendada need $2n$ ringikest $n$ joonega omavahel paaridesse nii, et kehtivad järgmised tingimused.

1) Iga joon algab mingist ringikesest ja lõpeb mingis teises ringikeses.
2) Iga kaks ühikruutu, mida üks ja sama joon läbib vahetult teineteise järel, omavad ühist külge.
3) Ükski kaks joont (sealhulgas nende otspunktid) ei läbi sama ühikruutu.
4) Ükski joon ei läbi sama ühikruutu mitu korda.

Tõesta, et joonte poolt läbitud ühikruutude arvude summa on kas alati paaris või alati paaritu, sõltumata sellest, kuidas Juku ringikesi ühendab.

# Matemaatika lahtine võistlus

28. september 2019 **Vanem rühm**

*Lahendamisaega on 5 tundi.*
*Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti.*
*Elektroonilised ega kirjalikud abivahendid ei ole lubatud.*
*Palun vormista erinevate ülesannete lahendused eraldi lehtedele!*

**1.** Ruudustikus mõõtmetega $3 \times 3$ kirjutatakse igasse ruutu erinev positiivne täisarv nii, et igas reas ja igas veerus on üks arv ülejäänud kahe arvu summa. Leia vähim võimalik ruudustikku kirjutatud arvude kogusumma.

**2.** Leia kõik reaalarvud $x$, mis rahuldavad tingimust

$$\frac{(x+1)^4}{(x-1)^3} + \frac{x-1}{16} \geqslant \frac{(x+1)^2}{2(x-1)}.$$

**3.** Leia võrrandi $x^3 + 3xy + y^3 = 2019$ kõik täisarvulised lahendid.

**4.** Olgu $n$ positiivne täisarv. Reaalarvud $a_1, a_2, \ldots, a_{2n}$ rahuldavad järgmisi tingimusi.

1) Iga $i = 1, 2, \ldots, 2n-1$ korral $0 < a_{i+1} - a_i \leqslant 1$.
2) Arvude $a_1, a_2, \ldots, a_{2n}$ ümardamisel lähima täisarvuni (kahest järjestikusest täisarvust võrdsel kaugusel olev arv ümardatakse üles) saadakse erinevad positiivsed täisarvud.

Arvud $a_1, a_2, \ldots, a_{2n}$ paigutatakse $n$ hariliku murru lugejateks ja nimetajateks. Tõesta, et saadud murdude summa on suurem kui $\frac{n}{4}$.

**5.** Ringjoon $c$ keskpunktiga $A$ läbib korrapärase viisnurga $ABCDE$ tippe $B$ ja $E$. Sirge $BC$ lõikub ringjoonega $c$ teistkordselt punktis $F$. Punkt $G$ ringjoonel $c$ valitakse nii, et $|FB| = |FG|$ ja $B \neq G$. Tõesta, et sirged $AB$, $EF$ ja $DG$ lõikuvad ühes punktis.

**6.** Vanaisal seisab pööningul lõplik arv tühje prügikaste. Iga prügikast on kujult risttahukas, mille mõõtmed on täisarvud. Ühe prügikasti saab ära visata teise prügikasti, kui nende prügikastide mõõtmed saab seada vastavusse selliselt, et esimese prügikasti mõõtmed on teise prügikasti vastavatest mõõtmetest väiksemad. Vanaisa tahab ruumi säästmiseks võimalikult palju prügikaste ära visata. Tal on selleks järgmine plaan: kuni leidub veel prügikaste, mida saab mõnda teise prügikasti visata, valida võimalikult suur arv prügikaste, mille saab järjest üksteise sisse ära visata (esimene teise, teine kolmandasse jne), seejärel korrata sama tegevust ülejäänud prügikastide seas jne. Kas võib kindel olla, et tulemusena on niipalju prügikaste ära visatud kui võimalik, kui on teada, et igal sammul on vabade prügikastide seas võimalikult suurearvulise üksteise sisse äravisatava prügikastide hulga valimiseks täpselt üks võimalus ning ükski prügikast ei mahuta endasse mitut prügikasti, kui need omakorda pole üksteise sisse asetatud?

# Открытое соревнование по математике

28 сентября 2019 г. **Младшая группа**

*Время, отводимое для решения: 5 часов.*
*Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи даёт 7 баллов.*
*Вспомогательные письменные материалы или электронные приборы не разрешены.*
*Пожалуйста, оформляйте решения разных заданий на отдельных листках!*

**1.** Юра записывает на доске некоторые подряд идущие целые числа. Известно, что их больше одного, и наименьшее из них больше чем 2. Маша записывает на доске столько же подряд идущих целых чисел, причём наименьшее из них равно 1. Возможно ли, чтобы частное от деления произведения всех записанных Юрой чисел на произведение всех записанных Машей чисел оказалось квадратом какого-то целого числа?

**2.** На клетчатом поле $10 \times 15$ Петя закрашивает ровно 30 клеток чёрным. Затем Миша накрывает непрозрачной бумагой ровно 4 строки и 4 столбца. Может ли Петя выбрать закрашиваемые клетки так, чтобы в конце концов по крайней мере 10 чёрных клеток гарантированно остались видимыми?

**3.** Найти все простые числа $p$, при которых также $\dfrac{p-1}{2}$ и $\dfrac{p+1}{4}$ являются простыми.

**4.** Найти значение выражения

$$\frac{1}{\left(\frac{1}{2019}\right)^2+1}+\frac{1}{\left(\frac{2}{2018}\right)^2+1}+\frac{1}{\left(\frac{3}{2017}\right)^2+1}+\ldots+\frac{1}{\left(\frac{2018}{2}\right)^2+1}+\frac{1}{\left(\frac{2019}{1}\right)^2+1}.$$

**5.** Окружность $c$ с центром в точке $A$ проходит через вершины $B$ и $E$ правильного пятиугольника $ABCDE$. Прямая $BC$ пересекает окружность $c$ второй раз в точке $F$. Доказать, что прямые $DE$ и $EF$ перпендикулярны.

**6.** Дано клетчатое поле $m \times m$, в котором $2n$ различных клеток помечены кружочками ($2n \leqslant m^2$). Коля хочет соединить эти $2n$ кружочков в пары с помощью $n$ линий так, чтобы выполнялись следующие условия.

1) Каждая линия начинается в каком-то кружочке и заканчивается в каком-то другом кружочке.
2) Каждые две клетки, через которые непосредственно друг за другом проходит одна и та же линия, имеют общую сторону.
3) Никакие две линии (в том числе и их концы) не проходят через одну и ту же клетку.
4) Ни одна линия не проходит через одну и ту же клетку несколько раз.

Доказать, что сумма количеств пройденных линиями клеток будет либо всегда чётной либо всегда нечётной, независимо от того, как Коля объединит кружочки.

*Время, отводимое для решения: 5 часов.*
*Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи даёт 7 баллов.*
*Вспомогательные письменные материалы или электронные приборы не разрешены.*
*Пожалуйста, оформляйте решения разных заданий на отдельных листках!*

**1.** В клетчатом поле размерами $3 \times 3$ записывают в каждую клетку различное положительное целое число так, что в каждой строке и в каждом столбце одно из чисел является суммой двух остальных. Найти наименьшую возможную сумму всех чисел, записанных в клетчатом поле.

**2.** Найти все удовлетворяющие условию $\frac{(x+1)^4}{(x-1)^3} + \frac{x-1}{16} \geqslant \frac{(x+1)^2}{2(x-1)}$ действительные числа $x$.

**3.** Найти все целочисленные решения уравнения $x^3 + 3xy + y^3 = 2019$.

**4.** Пусть $n$ — положительное целое число. Действительные числа $a_1, a_2, \ldots, a_{2n}$ удовлетворяют следующим условиям:

1) При каждом $i = 1, 2, \ldots, 2n-1$ выполняется $0 < a_{i+1} - a_i \leqslant 1$.
2) При округлении чисел $a_1, a_2, \ldots, a_{2n}$ до ближайшего целого числа (число, равноудалённое от двух ближайших целых чисел, округляют вверх) получают различные положительные целые числа.

Числа $a_1, a_2, \ldots, a_{2n}$ ставят числителями и знаменателями $n$ обыкновенных дробей. Доказать, что сумма полученных дробей больше, чем $\frac{n}{4}$.

**5.** Окружность $c$ с центром $A$ проходит через вершины $B$ и $E$ правильного пятиугольника $ABCDE$. Прямая $BC$ пересекает окружность $c$ второй раз в точке $F$. Точку $G$ на окружности $c$ выбирают так, что $|FB| = |FG|$, а $B \neq G$. Доказать, что прямые $AB$, $EF$ и $DG$ пересекаются в одной точке.

**6.** На чердаке у дедушки стоит конечное число пустых корзин. Каждая корзина по своей форме является прямоугольным параллелепипедом, размеры которого — целые числа. Одну корзину можно спрятать в другую, если их размеры можно поставить в соответствие таким образом, что размеры первой корзины меньше соответствующих размеров второй корзины. Дедушка хочет для экономии места спрятать как можно больше корзин. Для этого у него такой план: пока ещё найдётся корзина, которую можно спрятать в какую-то другую корзину, выбрать наибольшее возможное число корзин, которые можно подряд спрятать друг в друга (первую во вторую, вторую в третью и т.д.), затем повторить это действие для всех оставшихся корзин и т.д. Можно ли быть уверенным, что, действуя таким образом, удастся спрятать максимально возможное число корзин, если известно, что на каждом шаге есть ровно одна возможность выбрать из свободных корзин наибольшее количество таких, которые можно спрятать друг в друга, а ни одна корзина не вмещает в себя несколько корзин, если они в свою очередь не спрятаны друг в друга?

# Open Contest in Mathematics

September 28, 2019 **Juniors**

*Working time: 5 hours.*
*A correct and sufficiently explained solution to each problem is worth 7 points.*
*Written materials or electronic devices are not permitted.*
*Please write the solution of only one problem on each sheet of paper!*

**1.** George writes on blackboard some consecutive integers. It is known that the total number of these integers is greater than one and the least of them is greater than 2. Mary writes on blackboard consecutive integers, too, with the same total number of them as George, but the least of them equals 1. Is it possible that the product of the integers written by George divided by the product of the integers written by Mary is equal to the square of some integer?

**2.** Johnny paints exactly 30 unit squares of a $10 \times 15$ table black. After that, Mickey covers up exactly 4 rows and 4 columns. Can Johnny ensure by the choice of the squares to be coloured that at least 10 black unit squares are left uncovered?

**3.** Find all prime numbers $p$ such that $\dfrac{p-1}{2}$ and $\dfrac{p+1}{4}$ are prime numbers, too.

**4.** Find the value of the expression

$$\frac{1}{\left(\frac{1}{2019}\right)^2+1}+\frac{1}{\left(\frac{2}{2018}\right)^2+1}+\frac{1}{\left(\frac{3}{2017}\right)^2+1}+\ldots+\frac{1}{\left(\frac{2018}{2}\right)^2+1}+\frac{1}{\left(\frac{2019}{1}\right)^2+1}.$$

**5.** A circle $c$ with centre $A$ passes through the vertices $B$ and $E$ of a regular pentagon $ABCDE$. The line $BC$ intersects the circle $c$ the second time at point $F$. Prove that lines $DE$ and $EF$ are perpendicular.

**6.** Given is an $m \times m$ table with $2n$ distinct unit squares marked with a ring ($2n \leqslant m^2$). Johnny wishes to connect these $2n$ rings into pairs using $n$ (possibly curved) lines in such a way that the following conditions hold:

1) Each line begins from some ring and ends in some other ring;
2) Every two unit squares visited by the same line one after another have a common side;
3) No two lines (including their endpoints) visit a common unit square;
4) No line visits the same unit square more than once.

Prove that the sum of the numbers of unit squares visited by the lines is either always even or always odd, no matter of how Johnny draws the lines.

# Open Contest in Mathematics

September 28, 2019 **Seniors**

*Working time: 5 hours.*
*A correct and sufficiently explained solution to each problem is worth 7 points.*
*Written materials or electronic devices are not permitted.*
*Please write the solution of only one problem on each sheet of paper!*

**1.** One writes distinct positive integers into the cells of a $3 \times 3$ table in such a way that, in each row and in each column, one number equals the sum of the other two numbers. Find the least possible total sum of the numbers written into the table.

**2.** Find all real numbers $x$ such that $\dfrac{(x+1)^4}{(x-1)^3} + \dfrac{x-1}{16} \geqslant \dfrac{(x+1)^2}{2(x-1)}$.

**3.** Find all integral solutions of the equation $x^3 + 3xy + y^3 = 2019$.

**4.** Let $n$ be a positive integer. Real numbers $a_1, a_2, \ldots, a_{2n}$ satisfy the following conditions:

1) For every $i = 1, 2, \ldots, 2n-1$, one has $0 < a_{i+1} - a_i \leqslant 1$;
2) When rounding the numbers $a_1, a_2, \ldots, a_{2n}$ to the closest integer (numbers equidistant from two closest integers are rounded up), one obtains distinct positive integers.

Numbers $a_1, a_2, \ldots, a_{2n}$ are placed as the numerators and denominators of $n$ fractions. Prove that the sum of the obtained fractions is greater than $\dfrac{n}{4}$.

**5.** A circle $c$ with centre $A$ passes through the vertices $B$ and $E$ of a regular pentagon $ABCDE$. The line $BC$ intersects the circle $c$ the second time at point $F$. Point $G$ on the circle $c$ is chosen in such a way that $FB = FG$ and $B \neq G$. Prove that the lines $AB$, $EF$ and $DG$ meet in a common point.

**6.** Grandpa has a finite number of empty dustbins in his attic. Each dustbin is a rectangular parallelepiped with integral side lengths. A dustbin can be thrown away into another dustbin iff the side lengths of these dustbins can be set into one-to-one correspondence in such a way that the side lengths of the first dustbin are less than the corresponding side lengths of the other dustbin. For saving space, grandpa wants to throw away as many dustbins as possible. He has the following plan: while there exist yet some dustbins that can be thrown into each other, find the longest chain of such dustbins (i.e., the first throwable into the second, the second throwable into the third etc.) and throw all of them except the largest one sequentially into the next one, then do the same with remaining dustbins, etc. Is it necessarily true that as many dustbins as possible will be thrown away as the result of this process, if it is known that at each step there is a unique way of choosing the longest chain of dustbins throwable into each other among the free dustbins and no dustbin is large enough to contain two other dustbins unless they have been placed into one another?

# Matemaatika lahtine võistlus

28. september 2019 **Noorem rühm**

## Lahendused

**1.** *Vastus:* jah.

Näiteks 2 järjestikuse täisarvu korrutise $8 \cdot 9$ ja 2 esimese positiivse täisarvu korrutise $1 \cdot 2$ jagatis 36 on täisarvu 6 ruut.

*Märkus.* Sama täisarvu ruudu saab, jagades 7 järjestikuse täisarvu korrutise $3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9$ korrutisega $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7$.

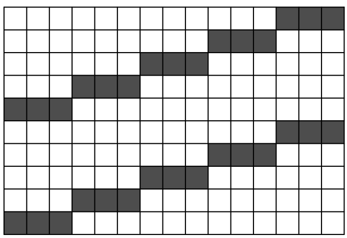
**2.** *Vastus:* jah.

Juku saab värvida 30 ühikruutu nii, et igas reas on värvitud 3 ja igas veerus 2 ühikruutu (joonis 1). Kuidas nüüd Miku ka ei valiks 4 rida ja 4 veergu, on neis kokku ülimalt $4 \cdot 3 + 4 \cdot 2$ ehk 20 värvitud ühikruutu. Järelikult vähemalt $30 - 20$ ehk 10 värvitud ühikruutu jääb katmata.

**3.** *Vastus:* 7 ja 11.

*Lahendus 1.* Olgu $q = \dfrac{p-1}{2}$ ja $r = \dfrac{p+1}{4}$; siis saame $p = 4r - 1$ ja $q = \dfrac{4r-2}{2} = 2r - 1$. Vaatame läbi kõik jäägid, mis $r$ saab anda jagamisel 3-ga.

- Kui arvu $r$ jääk 3-ga jagamisel on 1, siis arvu $4r - 1$ jääk 3-ga jagades on 0 ehk $4r - 1$ jagub 3-ga. Seega $p = 3$. Siis aga $r = 1$, mis pole algarv. Järelikult see juht pole võimalik.
- Kui arvu $r$ jääk 3-ga jagamisel on 2, siis arvu $2r - 1$ jääk 3-ga jagades on 0 ehk $2r - 1$ jagub 3-ga. Seega $q = 3$, kust $r = 2$ ja $p = 7$. Kõik kolm on tõesti algarvud.



Joonis 1

- Kui arvu $r$ jääk 3-ga jagamisel on 0, siis $r = 3$. Siis $q = 5$ ja $p = 11$, mis samuti on algarvud.

Kokkuvõttes saab $p$ olla kas 7 või 11.

*Lahendus 2.* Kolmest järjestikusest täisarvust $p - 1$, $p$ ja $p + 1$ üks jagub 3-ga. Jagamine 2-ga või 4-ga ei muuda jaguvust 3-ga, sest 2 ja 4 on 3-ga ühistegurita. Seega ka arvudest $p$, $\frac{p-1}{2}$, ja $\frac{p+1}{4}$ üks jagub 3-ga. Kui tegu on algarvudega, peab see üks olema võrdne 3-ga. Vaatame juhte vastavalt sellele, milline neist kolmest algarvust võrdub 3-ga.

- Kui $p = 3$, siis $\frac{p-1}{2} = 1$, kuid 1 ei ole algarv.
- Kui $\frac{p-1}{2} = 3$, siis $p = 7$ ja $\frac{p+1}{4} = 2$. Need kõik on tõesti algarvud.
- Kui $\frac{p+1}{4} = 3$, siis $p = 11$ ja $\frac{p-1}{2} = 5$. Need kõik on tõesti algarvud.

Kokkuvõttes saab $p$ olla kas 7 või 11.

**4.** *Vastus:* $\frac{2019}{2}$.

Koostame liidetavatest paarid: esimene on paaris viimasega, teine eelviimasega jne, kuni viimane liidetav on paaris esimesega. Iga paari murdude liitmisel saame

$$\frac{1}{\left(\frac{i}{j}\right)^2 + 1} + \frac{1}{\left(\frac{j}{i}\right)^2 + 1} = \frac{1}{\frac{i^2}{j^2} + 1} + \frac{1}{\frac{j^2}{i^2} + 1} = \frac{\frac{i^2}{j^2} + 1 + \frac{j^2}{i^2} + 1}{\left(\frac{i^2}{j^2} + 1\right)\left(\frac{j^2}{i^2} + 1\right)} = \frac{\frac{i^2}{j^2} + \frac{j^2}{i^2} + 2}{\frac{i^2}{j^2} + \frac{j^2}{i^2} + 2} = 1.$$

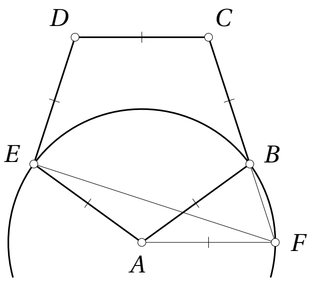
Et liidetavaid on 2019 ja paare on samapalju kui liidetavaid, on kõigi paaride arvude summa 2019. Kuna aga iga liidetav esineb kahes paaris, on otsitav summa $\frac{2019}{2}$.

**5.** *Lahendus 1.* Korrapärase viisnurga sisenurga suurus on $\frac{3 \cdot 180^\circ}{5}$ ehk $108^\circ$. Seega $\angle EAB = 108^\circ$ (joonis 2), mistõttu piirdenurga omadust kasutades saame

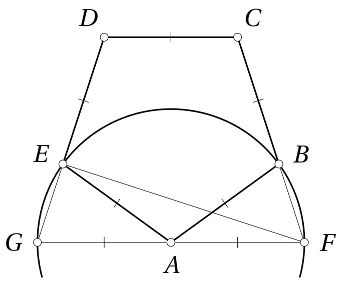
$$\angle EFC = \angle EFB = \frac{\angle EAB}{2} = 54^\circ.$$

Et ka $\angle CDE = 108^\circ$ ja $\angle FCD = \angle BCD = 108^\circ$, siis nelinurgast $CDEF$ saame $\angle DEF = 360^\circ - \angle FCD - \angle CDE - \angle EFC = 90^\circ$.

*Lahendus 2.* Korrapärase viisnurga sisenurga suurus on $\frac{3 \cdot 180^\circ}{5}$ ehk $108^\circ$. Seega $\angle ABC = 108^\circ$, kust $\angle ABF = 180^\circ - \angle ABC = 72^\circ$. Et $|AB| = |AF|$, siis kolmnurgast $ABF$ saame $\angle BAF = 180^\circ - 2 \cdot 72^\circ = 36^\circ$. Olgu $G$ sirge $DE$ teine




Joonis 2




Joonis 3

lõikepunkt ringjoonega $c$ (joonis 3); sümmeetriast $\angle EAG = \angle BAF = 36^\circ$. Et $\angle EAB = 108^\circ$, siis $\angle FAG = \angle BAF + \angle EAB + \angle EAG = 180^\circ$ ehk $FG$ on ringjoone $c$ diameeter. Thalese teoreemi põhjal $\angle FEG = 90^\circ$, mis tõestabki vajaliku väite.

*Lahendus 3.* Nagu lahenduses 2 veendume, et $\angle DEA = \angle EAB = 108^\circ$ ja $\angle BAF = 36^\circ$. Sellest tulenevalt $\angle EAF = \angle EAB + \angle BAF = 144^\circ$. Et $|AE| = |AF|$, siis kolmnurgast $AEF$ saame $\angle AEF = \dfrac{180^\circ - 144^\circ}{2} = 18^\circ$. Järelikult $\angle DEF = \angle DEA - \angle AEF = 90^\circ$ ehk sirged $DE$ ja $EF$ on risti.

**6.** *Lahendus 1.* Värvime ruudud malekorras mustaks ja valgeks. Iga joon läheb alati mustalt ruudult valgele ning valgelt ruudult mustale; seega kui joone otspunktid on sama värvi ruutudel, siis see joon läbib paaritu arvu ühikruute, vastasel korral aga paarisarvu ühikruute. Olgu märgitud ruutudest $k$ tükki mustad. Olgu Juku valitud joonte hulgas $a$ sellist, mille mõlemad otspunktid asuvad mustadel ruutudel, $b$ sellist, mille mõlemad otspunktid asuvad valgetel ruutudel, ja $c$ sellist, mille otspunktid asuvad eri värvi ruutudel. Siis $2a + c = k$ ja $a + b + c = n$, millest tulenevalt $a + b = n - k + 2a$. Seega arvud $a + b$ ja $n - k$ on võrdse paarsusega.

Olgu $s$ joonte poolt läbitavate ruutude arvude summa. Siis arv $s$ avaldub $a + b$ paaritu arvu ja $c$ paarisarvu summana, mistõttu $s$ ja $a + b$ on võrdse paarsusega. Kokkuvõttes näeme, et $s$ ja $n - k$ on võrdse paarsusega. Et suurus $n - k$ ei sõltu sellest, kuidas Juku jooned tõmbab, ongi $s$ kas alati paaris (kui $n - k$ on paaris) või alati paaritu (kui $n - k$ on paaritu).

*Märkus.* Öeldakse, et arvud $x$ ja $y$ on *võrdse paarsusega*, kui $x$ ja $y$ on kas mõlemad paaris või mõlemad paaritud. Teisi sõnu, arvu *paarsus* märgib selle arvu jääki jagamisel 2-ga.

*Lahendus 2.* Paneme tähele, et iga joont võib vaadelda üles, paremale, alla või vasakule ühikliikumiste jadana. Seega joone poolt läbitud ühikruutude arv koos alguspunktiga on $k + 1$, kus $k$ on ühikliikumiste arv. Kui lõpppunkt on alguspunktist $i$ ühikruudu võrra paremal ($i < 0$, kui lõpp-punkt on vasakul) ning $j$ ühikruudu võrra üleval ($j < 0$, kui lõpppunkt on allpool), siis $a-b=i$ ja $c-d=j$, kus $a$, $b$, $c$ ja $d$ on vastavalt paremale, vasakule, üles ja alla ühikliikumiste arv. Kuna $a-b$ ja $a+b$ on võrdse paarsusega ning $c-d$ ja $c+d$ on võrdse paarsusega, siis $k=a+b+c+d$ ja $i+j=(a-b)+(c-d)$ on võrdse paarsusega. Seega $k+1$ ja $i+j$ on erineva paarsusega, kuid kuna $i$ ja $j$ sõltuvad ainult algus- ja lõpppunktist, on ka joone poolt läbitud ühikruutude arvu paarsus fikseeritud algus- ja lõpp-punkti korral alati sama.

Nüüd vaatame kahte ühendatud ringikest $A$ ja $B$. Olgu nende ringikeste ühikruutude veerunumbrid vastavalt $x_A$ ja $x_B$ ning reanumbrid vastavalt $y_A$ ja $y_B$. Seega $i = x_B - x_A$ ja $j = y_B - y_A$ ning seega eelneva põhjal on joone poolt läbitud ühikruutude arvu paarsus sama mis arvul $i + j + 1 = x_B - x_A + y_B - y_A + 1$. Kuid selle arvu paarsus on sama, mis arvu $x_B + x_A + y_B + y_A + 1$ paarsus. Liites need arvud kõigi $n$ joone jaoks kokku, saame, et läbitud ühikruutude arvude summa paarsus on sama, mis arvu $s_x + s_y + n$ paarsus, kus $s_x$ ja $s_y$ on vastavalt kõigi ringikeste veerunumbrite summa ja reanumbrite summa. Need aga ei sõltu sellest, kuidas Juku ringikesi ühendab, mis tõestab ülesande väite.

## Lahendused

**1.** *Vastus:* 46.

Ilmselt on kõigi arvude kogusumma vähemalt $1+2+3+4+5+6+7+8+9$ ehk 45. Et igas reas on üks arv ülejäänud kahe summa, on iga rea kolme arvu summa paarisarv ja ka kõigi arvude kogusumma peab olema paarisarv. Seega tabeli arvude summa ei saa olla 45. Summa 46 on võimalik, nagu näitab joonis 4.

| | | |
|---|---|---|
| 10 | 6 | 4 |
| 8 | 1 | 7 |
| 2 | 5 | 3 |

Joonis 4

**2.** *Vastus:* $-3$, $-\frac{1}{3}$ ja kõik 1-st suuremad reaalarvud.

Viies kõik murrud vasakule poole ja ühisele nimetajale, saame samaväärse võrratuse
$$\frac{16(x+1)^4+(x-1)^4-8(x+1)^2(x-1)^2}{16(x-1)^3} \geqslant 0.$$
Lugejas kaksliikme ruudu valemi järgi tegurdades saame
$$\frac{\left(4(x+1)^2-(x-1)^2\right)^2}{16(x-1)^3} \geqslant 0.$$
Seega lugeja on alati mittenegatiivne. Järelikult on murd mittenegatiivne alati, kui nimetaja on positiivne ehk $16(x-1)^3>0$. Et $16>0$ ning arv ja tema kuup on samamärgilised, on nimetaja positiivne parajasti siis, kui $x-1>0$ ehk $x>1$. Lisaks on murd mittenegatiivne, kui lugeja võrdub nulliga. Viimane tingimus kehtib parajast siis, kui $4(x+1)^2=(x-1)^2$ ehk $2(x+1)=\pm(x-1)$. Siit saame võimalused $2(x+1)=x-1$ ja $2(x+1)=-(x-1)$, mis annavad vastavalt $x=-3$ ja $x=-\frac{1}{3}$. Et mõlemal juhul $x \neq 1$, siis rahuldavad nad ka algset võrratust.

**3.** *Vastus:* lahendeid pole.

*Lahendus 1.* Võrrandi parem pool 2019 jagub 3-ga, kuid mitte 9-ga. Oletame, et arv $x$ jagub 3-ga. Siis võrrandi vasaku poole üksliikmed $x^3$ ja $3xy$ jaguvad 9-ga. Kui nüüd arv $y$ jagub 3-ga, siis jagub 9-ga ka järelejäänud üksliige $y^3$, mis pole võimalik, sest siis jaguks kogu summa 9-ga. Kui aga arv $y$ ei jagu 3-ga, siis ei jagu 3-ga ka järelejäänud üksliige $y^3$, mis samuti pole võimalik, sest siis ei jaguks ka summa 3-ga. Vastuolu näitab, et arv $x$ ei jagu 3-ga. Sümmeetriast tulenevalt ka arv $y$ ei jagu 3-ga.

Et $3xy$ jagub igal juhul 3-ga, siis peab võrrandi rahuldamiseks ka arv $x^3 + y^3$ jaguma 3-ga. Seega ka arv $x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$ ehk $(x + y)^3$ peab jaguma 3-ga, millest tulenevalt peab $x + y$ jaguma 3-ga. Järelikult annavad $x$ ja $y$ 3-ga jagades jäägid 1 ja 2 mingis järjestuses. Siis $x^2 \equiv y^2 \equiv 1 \pmod 3$ ning $xy \equiv 2 \pmod 3$, mistõttu $x^2 - xy + y^2 \equiv 0 \pmod 3$. Seega $x^3 + y^3$ ehk $(x + y)(x^2 - xy + y^2)$ jagub 9-ga, kuid $3xy \equiv 6 \pmod 9$. Kokkuvõttes annab võrrandi vasak pool 9-ga jagades jäägi 6, parem pool aga jäägi 3. Vastuolu näitab, et võrrandil lahendid puuduvad.

*Märkus.* Üldlevinud kirjaviisiga $a \equiv b \pmod m$ märgitakse, et $a$ ja $b$ annavad $m$-ga jagades ühe ja sama jäägi.

*Lahendus 2.* Tähistame $a = x + y$. Siis võrrandi saab ümber kirjutada kujul $a^3 + 3xy(1 - a) = 2019$. Et 2019 ja $3xy(1 - a)$ jaguvad 3-ga, siis $a^3$ peab jaguma 3-ga, millest tulenevalt ka $a$ peab jaguma 3-ga. Lahutades võrrandi mõlemast poolest arvu 1, saame $a^3 - 1 + 3xy(1 - a) = 2018$, millest vasaku poole tegurdamisel saame

$$(a - 1)(a^2 + a + 1 - 3xy) = 2018. \tag{1}$$

Seega arv $a - 1$ on arvu 2018 tegur. Et $2018 = 2 \cdot 1009$ ja 1009 on algarv, siis $a - 1$ peab olema üks arvudest $2018, 1009, 2, 1, -1, -2, -1009$ ja $-2018$. Võttes arvesse ka seda, et $a$ peab jaguma 3-ga, saame neli võimalust.

- Kui $a = 2019$, siis $y = 2019 - x$ ning võrrandisse (1) asendades saame $2019^2 + 2019 + 1 - 3x(2019 - x) = 1$ ehk $x^2 - 2019x + 673 \cdot 2020 = 0$, millel pole reaalarvulisi lahendeid.
- Kui $a = 3$, siis $y = 3 - x$ ning võrrandist (1) saame $13 - 3x(3 - x) = 1009$ ehk $x^2 - 3x - 332 = 0$, millel pole täisarvulisi lahendeid.
- Kui $a = 0$, siis $y = -x$ ning esialgse võrrandi vasak pool on mittepositiivne.
- Kui $a = -1008$, siis $y = -1008 - x$ ning võrrandisse (1) asendades saame $1008^2 - 1008 + 1 + 3x(1008 + x) = -2$ ehk $x^2 + 1008x + 336 \cdot 1007 + 1 = 0$, millel pole reaalarvulisi lahendeid.

**4.** *Lahendus 1.* Oletame algul, et mõni lugeja on suurem kui mõni nimetaja. Siis vahetades need kaks arvu, muutuvad mõlemad murrud väiksemaks. Seega võib üldisust kitsendamata eeldada, et kõik lugejad on väiksemad kõigist nimetajatest.

Iga $i = 1, 2, \ldots, 2n$ korral defineerime $x_i = a_i - i + \frac{1}{2}$. Et $a_1 < a_2 < \ldots < a_{2n}$ ning arvud $a_i$ annavad ümardamisel tulemuseks erinevad positiivsed täisarvud, siis $a_i \geqslant i - \frac{1}{2}$ ehk $x_i \geqslant 0$. Tingimusest $a_{i+1} - a_i \leqslant 1$ tulenevalt aga $x_{i+1} - x_i = a_{i+1} - a_i - 1 \leqslant 0$ ehk $x_1 \geqslant x_2 \geqslant \ldots \geqslant x_{2n}$. Seega kui $i < j$, siis $\frac{a_i}{a_j} \geqslant \frac{a_i - x_j}{a_j - x_j} \geqslant \frac{a_i - x_i}{a_j - x_j} = \frac{2i-1}{2j-1}$ (esimene võrratus kehtib $a_i < a_j$ ja $x_j \geqslant 0$ ning teine $x_i \geqslant x_j$ tõttu). Seega piisab vajalik võrratus tõestada juhul, kus murdude lugejateks on arvud $1, 3, \ldots, 2n - 1$ ja nimetajateks arvud $2n + 1, 2n + 3, \ldots, 4n - 1$ mingis järjestuses.

Olgu kõigi murdude summa $s$. Rakendades murdudele aritmeetilise ja geomeetrilise keskmise vahelist võrratust, saame

$$\frac{s}{n} \geqslant \sqrt[n]{\frac{1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}{(2n+1) \cdot (2n+3) \cdot \ldots \cdot (4n-1)}}.$$

Ülesande lahendamiseks piisab seega tõestada, et iga $n$ jaoks kehtib võrratus $\frac{1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}{(2n+1) \cdot (2n+3) \cdot \ldots \cdot (4n-1)} > \frac{1}{4^n}$. Näitame seda induktsiooniga $n$ järgi. Väide kehtib juhul $n = 1$, sest $\frac{1}{3} > \frac{1}{4}$. Induktsiooni sammu jaoks piisab veenduda, et $\frac{(2n+1)^2}{(4n+1)(4n+3)} > \frac{1}{4}$ ehk $(4n+2)^2 > (4n+1)(4n+3)$, mis aga tuleneb aritmeetilise ja geomeetrilise keskmise vahelisest võrratusest arvudel $4n + 1$ ja $4n + 3$.

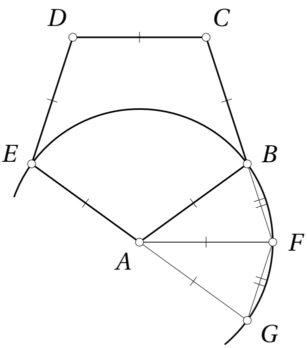
*Lahendus 2.* Nagu lahenduses 1 veendume algul, et on piisav vajalik võrratus tõestada juhul, kui murdude lugejateks on arvud $1, 3, \ldots, 2n-1$ ja nimetajateks arvud $2n+1, 2n+3, \ldots, 4n-1$ mingis järjestuses. Ümberpaigutusvõrratusest arvujärjenditel $1 < 3 < \ldots < 2n-1$ ja $\frac{1}{2n+1} > \frac{1}{2n+3} > \ldots > \frac{1}{4n-1}$ tuleneb, et murdude summa on vähim, kui nii lugejad kui nimetajad on kasvavas järjestuses. Seega piisab näidata võrratus

$$\frac{1}{2n+1} + \frac{3}{2n+3} + \ldots + \frac{2n-1}{4n-1} > \frac{n}{4}. \tag{2}$$

Koostame liidetavatest paarid: esimene on paaris viimasega, teine eelviimasega jne, kuni viimane liidetav on paaris esimesega. Iga paari murrud on kujul $\frac{n-k}{3n-k}$ ja $\frac{n+k}{3n+k}$, kus $-n < k < n$. Arvutades paari liikmete summa, saame

$$\frac{n-k}{3n-k} + \frac{n+k}{3n+k} = \frac{6n^2 - 2k^2}{9n^2 - k^2}. \tag{3}$$

Et $-n < k < n$, siis $k^2 < n^2$; ühtlasi näeme, et võrduse (3) parema poole lugeja ja nimetaja on positiivsed. Seega võrratus $9n^2 - k^2 < 12n^2 - 4k^2$, mis



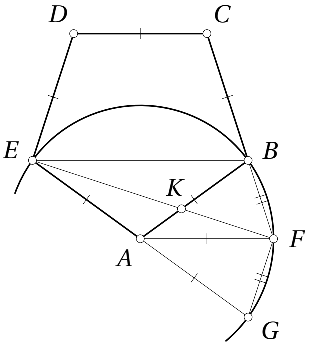

Joonis 5

ühelt poolt on samaväärne kehtiva võrratusega $k^2 < n^2$, on teisalt samaväärne ka võrratusega $\dfrac{6n^2 - 2k^2}{9n^2 - k^2} > \dfrac{1}{2}$. Järelikult iga paari liikmete summa on suurem kui $\dfrac{1}{2}$. Kuna paare on $n$, on kõigi paaride liikmete kogusumma suurem kui $\dfrac{n}{2}$; et neis paarides esineb iga murd võrratuse (2) vasakust poolest kaks korda, on nende murdude summa järelikult suurem kui $\dfrac{n}{4}$.

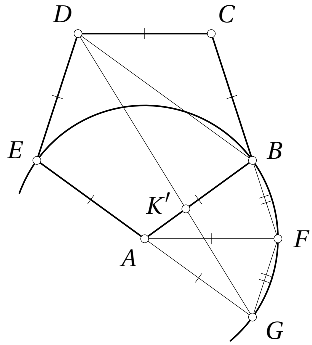
*Lahendus 3.* Nagu lahenduses 1 veendume algul, et on piisav vajalik võrratus tõestada juhul, kui murdude lugejateks on arvud $1, 3, \ldots, 2n-1$ ja nimetajateks arvud $2n+1, 2n+3, \ldots, 4n-1$ mingis järjestuses. Asendades kõik nimetajad suurema arvuga $4n$, lähevad murrud ja seega ka nende summa väiksemaks; lugejate summa $1+3+\ldots+(2n-1)$ aga võrdub arvuga $n^2$, milles on võimalik veenduda matemaatilise induktsiooni või aritmeetilise jada summa valemiga. Seega murdude summa on suurem kui $\dfrac{n^2}{4n}$ ehk $\dfrac{n}{4}$.

**5.** *Lahendus 1.* Korrapärase viisnurga sisenurga suurus on $\dfrac{3 \cdot 180^\circ}{5}$ ehk $108^\circ$. Seega $\angle ABC = 108^\circ$, mistõttu $\angle ABF = 180^\circ - \angle ABC = 72^\circ$ (joonis 5). Et $|AB| = |AF|$, siis ka $\angle AFB = 72^\circ$ ning $\angle BAF = 36^\circ$. Kuna $|FG| = |FB|$ ja $|AG| = |AB|$, on kolmnurgad $AFB$ ja $AFG$ võrdsed tunnuse KKK põhjal, mistõttu ka $\angle FAG = 36^\circ$. Et $\angle EAB = 108^\circ$, siis $\angle GAE = 2\cdot 36^\circ + 108^\circ = 180^\circ$ ehk punktid $E$, $A$ ja $G$ on ühel sirgel.

Olgu $K$ sirgete $AB$ ja $EF$ lõikepunkt (joonis 6). Et $\angle AFC = 180^\circ - \angle FCD$, siis $AF \parallel CD$, viisnurga sümmeetria põhjal aga $BE \parallel CD$. Kokkuvõttes $BE \parallel AF$, mistõttu saame sarnastest kolmnurkadest $BKE$ ja $AKF$, et $\dfrac{|BK|}{|AK|} = \dfrac{|BE|}{|AF|}$.




Joonis 6




Joonis 7

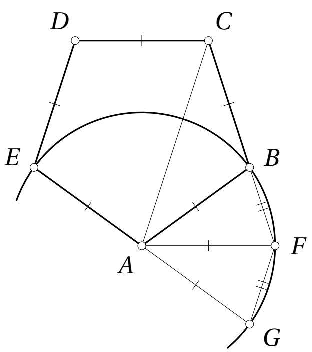
Olgu $K'$ sirgete $AB$ ja $DG$ lõikepunkt (joonis 7). Et $E,\ A$ ja $G$ on ühel sirgel, siis sirged $AG$ ja $AE$ ühtivad, viisnurga sümmeetria põhjal aga $BD \parallel AE$. Kokkuvõttes $BD \parallel AG$, mistõttu saame sarnastest kolmnurkadest $BK'D$ ja $AK'G$, et $\dfrac{|BK'|}{|AK'|} = \dfrac{|BD|}{|AG|}$.

Kuivõrd $|BD| = |BE|$ ja $|AF| = |AG|$, siis $\dfrac{|BK|}{|AK|} = \dfrac{|BK'|}{|AK'|}$, millest $K = K'$.

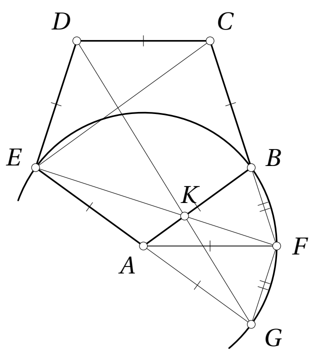
*Lahendus 2.* Korrapärase viisnurga sisenurga suurus on $\dfrac{3 \cdot 180^\circ}{5}$ ehk $108^\circ$. Seega $\angle ABC = 108^\circ$ (joonis 8), mistõttu $\angle ABF = 180^\circ - \angle ABC = 72^\circ$. Et $|AB| = |AF|$, siis ka $\angle AFB = 72^\circ$. Kuna $|FG| = |FB|$ ja $|AG| = |AB|$, on kolmnurgad $AFB$ ja $AFG$ võrdsed tunnuse KKK põhjal, mistõttu ka $\angle AFG = 72^\circ$. Sellest tulenevalt $\angle CFG = \angle BFG = 2 \cdot 72^\circ = 144^\circ$, samas kui $\angle FCA = \angle BCA = \dfrac{180^\circ - \angle ABC}{2} = 36^\circ = 180^\circ - 144^\circ$. Järelikult $GF \parallel CA$. Et viisnurga sümmeetria põhjal $CA \parallel DE$, siis kokkuvõttes $GF \parallel DE$.

Olgu $K$ sirgete $AB$ ja $EF$ lõikepunkt (joonis 9). Viisnurga sümmeetria põhjal $CE \parallel BA$, mistõttu kiirteteoreemist $\dfrac{|BF|}{|KF|} = \dfrac{|BC|}{|KE|}$. Ülesande tingimuste põhjal aga $|BF| = |GF|$ ja $|BC| = |DE|$, mis võimaldab siit järeldada $\dfrac{|GF|}{|KF|} = \dfrac{|DE|}{|KE|}$. Et $GF \parallel DE$ põhjal kehtib $\angle KFG = \angle KED$, on kolmnurgad $KFG$ ja $KED$ sarnased tunnuse KNK põhjal. Seega $\angle FKG = \angle EKD$. Järelikult on punktid $G$, $K$ ja $D$ ühel sirgel ehk sirge $DG$ läbib sirgete $AB$ ja $EF$ lõikepunkti $K$.

*Märkus 1.* Kolmnurkade $KFG$ ja $KED$ sarnasuseni saab jõuda ka trigono-




Joonis 8




Joonis 9

meetria abil. Märkame kõigepealt, et

$$\begin{aligned}\angle BKF &= \angle AKE = \\ &= 180^\circ - \angle EAK - \angle KEA = \\ &= 180^\circ - \angle EAB - \frac{180^\circ - \angle EAF}{2} = \\ &= 180^\circ - 108^\circ - \frac{180^\circ - (108^\circ + 36^\circ)}{2} = 54^\circ.\end{aligned}$$

Olgu viisnurga küljepikkus $a$ ning tähistame $|FB| = |FG| = b$, $|KF| = c$ ja $|KE| = d$. Siinusteoreemist kolmnurgas $BKF$ saame $\dfrac{c}{b} = \dfrac{\sin 72^\circ}{\sin 54^\circ}$, siinusteoreemist kolmnurgas $AKE$ aga $\dfrac{d}{a} = \dfrac{\sin 108^\circ}{\sin 54^\circ}$. Et $\sin 108^\circ = \sin 72^\circ$, siis $\dfrac{c}{b} = \dfrac{d}{a}$ nagu tarvis.

*Märkus 2.* Ülesande väide järeldub otseselt kõrgema matemaatika abil järgmisel viisil. Paneme tähele, et kolmnurkade $AFG$ ja $BED$ vastavad küljed on paralleelsed. Seega Desargues'i teoreemi põhjal lõikuvad nende kolmnurkade vastavaid tippe ühendavad sirged $AB$, $EF$ ja $DG$ ühes punktis.

**6.** *Vastus:* ei.

Olgu vanaisal 6 prügikasti mõõtmetega $20 \times 20 \times 20$, $19 \times 19 \times 19$, $16 \times 16 \times 16$, $21 \times 18 \times 15$, $18 \times 15 \times 12$ ja $17 \times 14 \times 11$. Esimese prügikasti sisse mahub teine, teise sisse omakorda kolmas ja viies, viienda sisse mahub kuues. Neljanda prügikasti sisse mahub samuti viies. Üksteise sisse ei mahu esimene ja neljas, teine ja neljas, kolmas ja neljas, kolmas ja viies ega kolmas ja kuues prügikast. Plaani järgides saaks vanaisa esimesel sammul ära visata 3 prügikasti: kuuenda prügikasti viiendasse, viienda teise ja teise esimesse. Et ülejäänud kaks prügikasti teineteise sisse ei mahu, siis rohkem prügikaste ära visata ei saa. Kuid visates kolmanda prügikasti teise ja teise esimesse ning kuuenda viiendasse ja viienda neljandasse, saaks 4 prügikasti ära visatud. Seega vanaisa plaan ei anna optimaalset tulemust.

## Hindamisskeemid

**1.** *(Urmas Luhaäär)*

Tüüpiliste lahenduste eest anti punkte järgnevalt:

- Täislahendus: 7 p
- Lahendus, milles oli antud korrektse näite konstruktsioon ilma näidet välja kirjutamata ja milles esines väiksemaid puudujääke: 6 p
- Lahendus, mis andis mõttekäigu näite leidmiseks, kuid mingi väiksema vea tõttu osutus näide vääraks: 1 p
- Õige vastus ilma selgitusteta või vale vastus: 0 p

Ülesanne osutus ootamatult raskeks. Paljud õpilased olid tekstist valesti aru saanud. Pakuti näiteks näiteid, kus arvud polnud järjest või esines Jüri kirjutatute hulgas arv 2. Paljud proovisid ka tõestada, et olukord ei ole võimalik.

**2.** *(Raul Kangro)*

Lahenduse skeemi kirjapanekul eeldame, et ruudustiku ridades on 15 ruutu ja veergudes on 10 ruutu.

Tüüpiliste lahenduste eest anti punkte järgnevalt:

- Täislahendus: 7 p
- Lahendus, milles oli antud korrektse näite konstruktsioon ning rõhutatud, et konstruktsiooni põhiomaduseks on see, et igas reas on 3 värvitud ruutu ja igas veerus on 2 värvitud ruutu, ilma korrektse tõestuseta, et sel juhul jääb alati pärast Miku valikut alles vähemalt 10 värvitud ruutu: 5 p
- Õige näide sobiva värvimise kohta ilma korrektse tõestuseta, et see variant alati töötab: 4 p
- Vale näide, kuid selgelt rõhutatud osaliselt õige idee (konstruktsiooni alus, et igas reas on täpselt 3 või igas veerus on täpselt 2): 1 p
- Vale vastus või õige vastus ebasobiva värvimise näitega või õige vastus ilma värvimise näiteta : 0 p

Ülesanne oli küllalt kerge. Samas oli küllalt palju selliseid lahendusi, mis andsid küll õige konstruktsiooni, kuid siis hakkasid lihtsa põhjenduse (maksimaalne kaetavate värvitud ruutude arv on $4\cdot2+4\cdot3 = 20$, seega ...) asemel esitama valeväiteid Miku optimaalse tegevuse (värvitud ruutude katmise maksimiseerimise seisukohalt) tulemuste kohta. Sageli ei ole tegevused, mis tunduvad parimad, tegelikult üldse optimaalsed. Seepärast ongi väga oluline osata tõestada, et arvatav parim tegevus tegelikult ka parim on või siis piirduda argumentidega, mis ei tugine nn „halvima juhu“ läbivaatamisele.

**3.** *(Toomas Tennisberg)*

Lahenduse allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Edukalt vaadatud läbi juhud 3-ga jaguvuse alusel: 5 p
- Eelnevast tuletatud õige lahendihulk: 1 p
- Näidatud, et $p = 3$ ei sobi: 1 p

Skeemi kahe viimase rea eest võis punkte saada ainult juhul, kui tehtud oli ka esimesele reale vastav osa.

Poolikud lahendused, mis ei rakendanud 3-ga jaguvust, said punkte lahenduse allpool märgitud osade eest.

- Saadud $q = 2r - 1$: 1 p
- Märgitud, et 11-st suuremad lahendid ei sobi, sest üks arvudest $p$, $q$, $r$ jagub 3-ga, ilma tõestuseta: 2 p

Üks lahendus üritas vaadata $p$ jääki jagamisel 120-ga. Lahendus iseenesest viib sihile, kuid selles oli palju näpuvigu. Seetõttu sai see lahendus 4 punkti.

Ülesanne osutus võrdlemisi keerukaks. Väga palju oli neid, kes lihtsalt leidsid lahendid 7 ja 11 ning ei teinud midagi muud. Üllatavalt palju oli neid, kes pakkusid lahendiks 3, kuigi sellisel juhul $\frac{p-1}{2} = 1$ ja 1 ei ole algarv. Mõni lahendaja pakkus ka $p$ väärtuseks 27, kuid see pole algarv, sest $27 = 9 \cdot 3$. Väga palju oli väiteid, mis üritasid midagi öelda algarvude kohta. Näiteks arvati, et kui $p > 11$, siis $\frac{p+1}{4}$ on paaris, mis ei kehti, kui $p = 19$, või $\frac{p-1}{2}$ on alati kordarv, mis ei kehti, kui $p = 23$. Lahendustest, mis vaatasid 3-ga jaguvust, oli palju neid, mis unustasid kontrollida, kas $p = 3$ võib olla lahend (nad välistasid selle põhimõttel, et algarv ei saa jaguda 3-ga, kuid 3 ise on siiski algarv). Üks lahendus välistas sellel põhjusel kõik lahendid (üks arvudest jagub 3-ga, seega see ei saa olla algarv). Lahendustest, mis said 7 punkti, oli vaid mõni, mis kasutas žürii ametlikku lahendust. Enamus kasutasid ära asjaolu, et üks arvudest $p - 1$, $p$ ja $p + 1$ jagub 3-ga ning jagamine kahe astmega seda jaguvust ei muuda (vt uus ametlik lahendus 2).

**4.** *(Jaan Toots)*

Lahenduse allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Idee koostada liidetavatest sümmeetrilised paarid: 3 p
- Näidatud üldjuhu jaoks, et paaride summa on 1: 3 p
- Leitud paaride arv ning arvutatud lõppvastus: 1 p

Ülesanne põhines ühel ideel ning oli vastavalt üsna hästi lahendatud.

Tüüpiliseks veaks oli pärast paaride moodustamise ideele tulemist välja arvutada ainult mõne esimese paari summa jättes väite tõestamata üldjuhu jaoks. Sealjuures on huvitav asjaolu, et veenvat põhjendust on mõeldav konstrueerida esialgset avaldist teisendades sarnase vahepealsete liikmete vahelejätuga, kui on analoogselt selgelt mustrit võimalik näha. Sümboolse seose kirjutamine on siiski lihtsam ning tunduvalt selgem.

Summas paaride kokkulugemine või kahekordse summa kahega jagamine on triviaalne samm, mis ei tohiks keerukusi valmistada.

**5.** *(Kaur Aare Saar)*

Kuna ülesannet sai lahendada mitmel erineval viisil, hinnati igat tööd skeemi järgi, mis maksimeerib selle töö punktide arvu.

*Skeem žürii lahendusega 1 sarnaste mõttekäikude jaoks.* Lahenduse allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Leitud korrapärase viisnurga nurga suurus: 1 p
- Leitud, et $\angle EFC = \frac{\angle EAB}{2}$: 3 p
- Leitud, $\angle DEF$ nelinurga $CDEF$ nurkade kaudu: 3 p

*Skeem žürii lahendusega 2 sarnaste mõttekäikude jaoks.* Lahenduse allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Leitud korrapärase viisnurga nurga suurus: 1 p
- Leitud kolmnurga $BAF$ nurgad: 2 p
- Konstrueeritud punkt $G$ ja leitud, et $\angle GAF = 180^\circ$: 2 p
- Leitud, et $DEF$ on diameetrile toetuv piirdenurk: 2 p

*Skeem žürii lahendusega 3 sarnaste mõttekäikude jaoks.* Lahenduse allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Leitud korrapärase viisnurga nurga suurus: 1 p
- Leitud kolmnurga $BAF$ nurgad: 2 p
- Leitud kolmnurga $EAF$ nurgad: 3 p
- Leitud nurga $DEF$ suurus: 1 p

Ülesanne oli võrdlemisi hästi lahendatud, esines hulgaliselt täislahendusi, peamiselt sarnased žürii lahendustega 3 ja 1. Nagu tõestusülesannetele tavapärane, esines kahjuks õpilasi, kes ülesandes nõutu tõestamise asemel võtsid tõestatava väite eelduseks ning jõudsid ringiga tagasi enda tehtud eelduseni. Teiseks tüüpveaks osutus jooniselt mingi seose tähelepanemine, kuid jäeti see väide tõestamata (näiteks, et $G$, $A$, $F$ asuvad ühel sirgel). Paljudele õpilastele, kellel jäi ülesanne lahendamata, oleks kindlasti kasuks olnud piirdenurga ja kesknurga omaduse tundmine ning oskus seda ülesandes rakendada.

**6.** *(Richard Luhtaru)*

Lahenduse allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Tõestatud, et kaht fikseeritud ringikest ühendava joone poolt läbitud ühikruutude arvu paarsus on alati sama: 3 p

  *Sealhulgas:*

  - Selgelt väidetud, et kaht fikseeritud ringikest ühendava joone poolt läbitud ühikruutude arvu paarsus on alati sama, kuid see on põhjendamata: *1 p*

- Tõestatud, et läbitud ühikruutude arvude summa paarsus ei sõltu sellest, kuidas Juku paarid valib: 4 p

Ülesanne osutus oodatult pigem raskeks ning täislahendusi oli ainult kaks, kuid seeeest oli palju osalisi ja peaaegu täislahendusi. Kuna ülesande lahendus koosnes kahest osast, siis oli mitmeid õpilasi, kes olid ammendavalt ära lahendanud ainult esimese osa (algpunkti ja lõpppunkti fikseerimisel on joone poolt läbitud ühikruutude paarsus alati sama), kui ka õpilasi, kes olid ammendavalt ära lahendanud ainult teise osa (kogupaarsus ei sõltu ühendatavate ringikeste valikust).

Paljud õpilased olid esimese osa tõestuses kasutanud intuitiivset argumenti, et kui liikuda joonega $x$ ruudu võrra lühimast teest eemale, siis peab ka $x$ ruudu võrra tagasi liikuma, seega joone poolt läbitud ühikruutude arv saab kasvada/kahaneda ainult paarisarvu võrra. Kuigi see aitab selgitada paarsuse säilivust lihtsamate teekondade puhul, ei aita see selgitada paarsuse säilivust keeruliste teekondade puhul (nt spiraal), mistõttu sellised lahendused said hindamisskeemi esimese rea järgi 1 punkti. Mitmed õpilased kasutasid sarnast argumenti, kuid uurisid sihtpunktist eemaldumist konkreetses sihis (vasakule-paremale, üles-alla) nagu lahenduses 2. Ükski selline lahendus ei olnud küll piisavalt põhjendatud ning kõik sellised tööd said hindamisskeemi esimese rea järgi 2 punkti.

Teist osa lahendati mitmetel erinevatel viisidel, kas uurides ringikeste arvu teatud värvi ruutudel nagu lahenduses 1, liites kokku ringikeste koordinaate nagu lahenduses 2 või tõestades, et kahe ringipaari ühenduste vahetamisel paarsus säilib. Levinud pisiviga oli väide, et ringikeste $A$ ja $B$ ühendamiseks kuluvate ühikruutude arvu ning ringikeste $B$ ja $C$ ühendamiseks kuluvate ühikruutude arvu summa paarsus on alati võrdne ringikeste $A$ ja $C$ ühendamiseks kuluvate ühikruutude arvu paarsusega. Tegelikult on need alati erineva paarsusega, sest $A$ ja $B$ ühendamisel ning $B$ ja $C$ ühendamisel loetakse ühikruutu $B$ kahekordselt. Sellised tööd kaotasid 1 punkti.

## Matemaatika lahtine võistlus

28. september 2019 **Vanem rühm**

## Hindamisskeemid

**1.** *(Jaan Kristjan Kaasik)*

Skeemi järgnevalt märgitud osade eest saadud punktid summeeriti.

- Näidatud, et vähim 9 erineva positiivse täisarvu summa on 45: 1 p
- Tõestatud, et ülesande tingimustel ei saa ruudustikku paigutatud arvude summa olla 45: 2 p
- Toodud näide ülesande tingimustele vastavast ruudustikust, kus arvude summa on 46: 4 p

Ametlikust lahendusest erinevad täislahendused said täispunktid. Punkte sai ka kasulike ideede eest näite konstrueerimisel.

Ühe kergeima ülesandena komplektis oli üllatav, et keskmisele lahendajale osutus see ikkagi raskeks. Valele lahendusteele mindi peamiselt seetõttu, et ei oldud „leia suurim/vähim võimalik“ ülesandetüübiga tuttavad. Keskmine lahendus väitis, et vastus on minimaalne, sest proovides ei suudetud midagi paremat. Teise levinud minimaalsuse põhjendusena öeldi, et minimaalse summaga ruudu koostamiseks peavad seal olema teatud arvud mingis kindlas paigutuses. Hoolimata sellest oli ka täislahendusi omajagu.

Kuna probleeme oli paljudel, siis ehk aitab väike spikker sellele tulevikus kaasa. Olgu meil vaja leida vähim element, mis vastab ülesandes antud tingimustele. Selleks võib kasutada järgnevat skeemi:

1) Vaatame ülesandes antud tingimust ning proovime leida lisatingimusi, mis teeksid järgmise sammu lihtsamaks. (Antud juhul: tuvastame, et vähim mõeldav summa on 45.)
2) Proovime ülesande tingimuste ja leitud lisatingimuste põhjal leida kõige väiksemat elementi $a$. (Antud juhul: proovime konstrueerida ruutu summaga 45; kui see ei õnnestu, proovime 46.)
3) Proovime näidata, et kui suvaline element $b$ rahuldab ülesande tingimusi, siis $a \leqslant b$. (Antud juhul: näitame, et 45 ei saa olla sellise ruudu summa, mis vastab ülesande tingimustele; järelikult on 46 vähim võimalik.)

Kui suudame sammus 2 leida elemendi, mille minimaalsuse suudame sammus 3 tõestada, siis oleme ülesande lahendanud ning vastus on $a$. Kui aga leiame sammus 3 kontranäite, saame minna tagasi sammu 2 juurde, osates juba elementi kavalamalt otsida!

Ülesannet, kus on vaja leida maksimaalne element, võib lahendada analoogse skeemi järgi.

**2.** *(Aleksandr Šved)*

Skeemi järgnevalt märgitud osade eest saadud punktid summeeriti.

- Viidud mõlemad pooled ühisele nimetajale: 1 p
- Vaadatud läbi juht, kus lugeja on nullist suurem: 1 p
- Tõestatud, et kui $x > 1$, siis võrratus kehtib: 2 p
- Leitud, et üheks vastuseks on $-3$: 1 p
- Leitud, et üheks vastuseks on $-\frac{1}{3}$: 1 p
- Täielik õige vastus: 1 p

Ametlikust lahendusest erinevad täislahendused said täispunktid.

Paljudel jäi vaatlemata juht, kus vasak ja parem pool on võrdsed. Samuti paljud korrutasid läbi suurusega $x-1$ ning unustasid, et see võib olla negatiivne ja sellisel juhul muutub võrratuse märk.

**3.** *(Urve Kangro)*

Toome ära kaks hindamisskeemi, mis vastavad erinevatele lahendusideedele.

*Skeem lahendusele* 3 *astmetega jaguvuse analüüsi kaudu.* Ametliku lahenduse 1 allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Tähele pandud, et $x^3 + y^3$ (või $x + y$) peab jaguma 3-ga: 1 p
- Järeldatud, et on kaks võimalust: kas $x$ ja $y$ mõlemad jaguvad 3-ga või peavad nad andma 3-ga jagades jäägid 1 ja 2: 1 p
- Ammendavalt analüüsitud juht, kus mõlemad jaguvad 3-ga: 2 p
- Ammendavalt analüüsitud juht, kus $x$ ja $y$ annavad 3-ga jagades jäägid 1 ja 2: 3 p

*Skeem lahendusele tegurdamise kaudu.* Ametliku lahenduse 2 allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Võrrandi mõlemast poolest lahutatud 1 ning tegurdatud: 2 p
- Järeldatud, et $x + y - 1$ on arvu 2018 tegur: 1 p
- Kirjutatud välja avaldise $x + y - 1$ kõik võimalikud väärtused: 1 p
- Ammendavalt analüüsitud kõik võimalused: 3 p

Kui polnud tähele pandud, et $x + y$ peab jaguma 3-ga, siis tuli skeemi viimases reas läbi vaadata 8 võimalust.

Esines ka ideed võrrandi vasakut poolt hinnates vähendada võimalike läbivaadatavate juhtude arvu. Positiivsete lahendite korral saab lihtsalt järeldada, et suurem arvudest $x$ ja $y$ on 10 ja 12 vahel, ning siis näidata, et teine arv ei saa olla täisarv. Aga kui üks arvudest on negatiivne, siis see idee ei tööta. Kui täisarvulisust mitte nõuda, siis on iga $x$ korral olemas vähemalt üks $y$ nii, et võrrand on rahuldatud; kui $x$ on väga suur, siis $y \approx 1 - x$.

**4.** *(Härmel Nestra)*

Lahenduse järgnevalt märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Vaadeldud juhtu, kus kõik lugejad on väiksemad kõigist nimetajatest, koos põhjendusega, miks see ei kitsenda üldisust: 1 p
- Ülesanne taandatud sarnasele võrratusele, kus murdude lugejateks on täisarvud $1, 3, \ldots, 2n-1$ ja murdude nimetajateks täisarvud $2n+1, 2n+3, \ldots, 4n-1$ mingis järjestuses: 3 p

  *Sealhulgas:*
  - Tehtud see eeldusel, et arvud $a_1, a_2, \ldots, a_{2n}$ paiknevad arvteljel vahedega 1: *1 p*
- Tõestatud ülesande võrratus selliste murdudega: 3 p

  *Sealhulgas ametliku lahenduse 2 järgmiste sammude eest antud punktid summeeriti*:
  - Ümberpaigutusvõrratuse abil taandatud vajalik väide võrratusele $\frac{1}{2n+1} + \frac{3}{2n+3} + \ldots + \frac{2n-1}{4n-1} > \frac{n}{4}$: *1 p*
  - Vaadeldud liidetavate murdude paare, kus esimene murd paaris viimasega jne, eesmärgiga tõestada, et iga paari liikmete summa on suurem kui $\frac{1}{2}$: *1 p*

Punkte ei antud triviaalsete tähelepanekute eest nagu järjendi kasvavus ja see, et ümardamisel tekivad järjestikused täisarvud. Samuti ei antud punkte skeemi esimese rea alusel, kui puudus igasugune usutav põhjendus, miks on optimaalne asetada väiksemad arvud lugejatesse ja suuremad nimetajatesse. Lihtsalt väide ei veena; oli ka mitu tööd, kus väideti, et optimaalne paigutus on hoopis $\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_3}{a_4} + \ldots + \frac{a_{2n-1}}{a_{2n}}$.

On väga kahju, et paljud kasulike ideedega tööd said väga vähe punkte põhjenduste puudumise või ebakorrektsete põhjenduste tõttu. Näiteks jäi ühel õpilasel punkt saamata skeemi viimase rea järgi, sest see, et paari liikmete summa on suurem kui $\frac{1}{2}$, oli põhjendatud vaid asümptootiliselt protsessis $n \to \infty$, aga ülesandes on vaja iga $n$ jaoks (st ka väikestel). Mitmed võistlejad vaatlesid ainult juhtu, kus antud reaalarvud paiknevad arvteljel vahedega 1, ilma põhjendamata, miks see ei kitsenda üldisust. Samuti püüti mõnes töös põhjendada võrratusi ligikaudsete arvutustega, mis põhimõtteliselt ei ole korrektne.

Paar võistlejat oli jätnud kahe silma vahele olulise tingimuse, et ümardamisel saadud täisarvud on positiivsed (millest nähtub ka algsete reaalarvude positiivsus), ja esitasid „kontranäiteid“ nulli või negatiivsete arvudega.

**5.** *(Oleg Košik)*

Žürii lahendusega 1 sarnaste mõttekäikude allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Tõestatud, et punktid $E$, $A$, $G$ asuvad ühel sirgel: 1 p
- Defineeritud punktid $K$ ja $K'$ ning ilmutatud ideed uurida suhteid $\frac{|AK|}{|BK|}$ ja $\frac{|AK'|}{|BK'|}$: 1 p
- Avaldatud suhe $\frac{|AK|}{|BK|}$: 2 p
- Avaldatud suhe $\frac{|AK'|}{|BK'|}$: 2 p
- Näidatud, et need suhted on võrdsed: 1 p

Kahjuks esines mitu libatõestust, kus lahendaja oma tõestuse käigus sisuliselt eeldas ülesande väite kehtivust.

Seda ülesannet polnud võimalik ära lahendada üksnes nurkade arvutusega, mistõttu ainult nurkade arvutamise eest polnud võimalik teenida üle ühe punkti. Siin ei pääsenud ideedest, mis seotud sarnaste kolmnurkade või suhete arvutamisega, neile kahjuks mõtlesid väga vähesed.

Paar õpilast lahendas ülesannet Ceva teoreemi abil, kas selle klassikalist või trigonomeetrilist kuju kasutades. Mõlemad need viivad ka sihile. Üks sellistest lahendustest oli viidud ka lõpule, teine jäi kahjuks poolikuks.

**6.** *(Tähvend Uustalu)*

Tüüpiliste mõttekäikude eest anti punkte järgnevalt.

- Toodud toimiv kontranäide: 7 p
- Ainult õige vastus: 0 p

Kui kontranäide ei vastanud ülesande tingimusele „on teada, et igal sammul on vabade prügikastide seas võimalikult suurearvulise üksteise sisse äravisatava prügikastide hulga valimiseks täpselt üks võimalus," võeti selle eest maha 2 punkti.

Ülesanne osutus võistlejate jaoks väga keeruliseks. Väga paljudes töödes oli ülesandest valesti aru saadud: näiteks, et üks prügikast mahub teise sisse, kui esimese ruumala on teisest väikesem.

Tüüpiliselt oli tulemusena tähelepanuta jäetud see, et võib leiduda kaks prügikasti, kus kumbki ei mahu teise sisse (mis seejuures ei ole samade mõõtmetega), näiteks kastid mõõtmetega $1 \times 4 \times 5$ ja $3 \times 2 \times 6$. Selliste kastide potentsiaalne olemasolu tähendab, et ei saa argumenteerida stiilis „vanaisa võtab kõige suurema, paneb selle sisse suuruselt järgmise jne...".

Vanaisa algoritm kastide ära viskamiseks on nn ahne algoritm, kus vanaisa viskab korraga võimalikult suure osa ära ilma sellele tähelepanu pööramata, mis pärast seda juhtuda võiks. Üks kuldreeglitest on, et ahned algoritmid peaaegu kunagi ei anna garanteeritult optimaalset tulemust. Kui mõni ahne algoritm annab alati parima tulemuse, siis on sellel tavaliselt mingi väga hea põhjus. Näiteks on mingi invariant, mis jääb pärast algoritmi iga sammu kehtima.

Samas enamus töödes (kus oli ülesande tekstist õigesti aru saadud) väideti, et vanaisa algoritm töötab, tihti toodi põhjenduseks ainult väga lihtsaid ja konkreetseid olukordi, kus vanaisa meetod tõepoolest viskab ära maksimaalse arvu prügikaste.

Tavaliselt ahnete algoritmide probleem on see, et varakult tehtud otsused võivad hilisemad valikud ära rikkuda. See võiks olla strateegia kontranäite otsimiseks. Näiteks antud ülesandes võiks mõelda „Mis siis saab, kui tuleks võtta mõned mõõduka suurusega jadad, aga vanaisa võtab pika jada, mis lõhub need õiged jadad tükkideks, mida enam ei saa kuidagi kokku panna?“ Žürii lahendus ja mõlemad punkte saanud lahendused kasutavad just seda ideed.