Lahtine võistlus 2021 talv

Ülesanded 2
Noorem rühm 2
Vanem rühm 3

Ülesanded vene keeles 4
Младшая группа 4
Старшая группа 5

Lahendused 6
Noorem rühm 6
Vanem rühm 12

Hindamisskeemid 19
Noorem rühm 19
Vanem rühm 24

Võistluskomplekti valmimisse panustasid:

Artur Avameri
Jaan Kristjan Kaasik
Urve Kangro
Joonas Jürgen Kisel
Oleg Košik
Aleksei Lissitsin
Härmel Nestra
Sandra Schumann
Triinu Veeorg
Hendrik Vija

Matemaatika lahtine võistlus

11. detsember 2021 **Noorem rühm**

Lahendamisaega on 5 tundi.
Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti.
Elektroonilised ega kirjalikud abivahendid ei ole lubatud.

1. Leia kõik kahekohalised positiivsed täisarvud, mille numbrite summa ja numbrite korrutise kokkuliitmisel saame tulemuseks selle arvu enda.

2. Kolmnurgas ABC on $|AB| = |AC|$. Tipust B tõmmatud kõrguse aluspunkt on E. On teada, et BEA või BEC on võrdhaarne kolmnurk. Leia kõik võimalused, kui suur võib olla nurk kolmnurga ABC tipu A juures.

3. Kas leiduvad täisarvud x ja y, mille korral

a) $x^2 + (x+1)^2 + (x+2)^2 = y^2$?

b) $x^2 + (x+1)^2 + (x+2)^2 + (x+3)^2 = y^2$?

4. Mari valib viis erinevat positiivset täisarvu, mis pole suuremad kui 2021. Neist viiest arvust peab saama kahel erineval viisil valida kaks sellist, mille summa on 1919. Samuti peab neist viiest arvust saama kahel erineval viisil valida kaks sellist, mille summa on 2929. Leia kõik võimalused, millised viis arvu võib Mari valida.

Märkus. Kahe arvu valikuvõimalusi, mis erinevad vaid arvude järjestuse poolest, ei loeta erinevaks.

5. Kolmnurga ABC suurim nurk on tipu C juures. Olgu ϱ ringjoon keskpunktiga A ja raadiusega AC ning σ ringjoon keskpunktiga B ja raadiusega BC. Ringjoon σ lõikab kolmnurga ABC ümberringjoont punktis D ning ringjoont ϱ punktis F ($D \neq C$, $F \neq C$). Tõesta, et punktid A, D ja F asuvad ühel sirgel.

6. Loomaaias on 25 rohelist, 20 pruuni ja 15 oranži kameeleoni. Iga kord, kui täpselt kaks eri värvi kameeleoni kohtuvad, muudavad mõlemad oma värvi kolmandaks. Muudel juhtudel kameeleonid värvi ei muuda. Kas võib juhtuda, et:

a) mingil ajal on igat värvi kameeleone ühepalju?

b) mingil ajal on kõik kameeleonid ühte värvi?

Matemaatika lahtine võistlus

11. detsember 2021 **Vanem rühm**

Lahendamisaega on 5 tundi.
Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti.
Elektroonilised ega kirjalikud abivahendid ei ole lubatud.

1. Ema jagab kolmnurkset koogitükki kolme lapse vahel. Selleks teeb ta kõigepealt ühe sirge lõike ühest tipust vastaskülje keskpunkti ja siis teise sirge lõike teisest tipust vastaskülje keskpunkti. Tekkinud tükid jagab ta järgmiselt: Anna saab nelinurkse tüki, Berta selle vastas oleva kolmnurkse tüki ja Clara kaks ülejäänud kolmnurka. Kes lastest saab kõige rohkem kooki?

2. Kas leidub

a) 3 järjestikust naturaalarvu;

b) 4 järjestikust naturaalarvu,

mis kõik esituvad mingi kahe (mitte tingimata erineva) positiivse täisarvu ruutude summana?

3. Leia kõik täisarvupaarid (x, y), mis rahuldavad võrrandit

$$y^4 = x(2x^2 + y)^3.$$

4. Leia vähim võimalik 2021 liikme summa täisarvude jadas $a_1, a_2, a_3, \ldots$, kus $a_1 = 0$, $a_2 = a_3 = 1$ ja iga $i, j \geqslant 2$ korral $a_{i+j} > a_i + a_j$.

5. Kolmnurgas ABC on $|AB| = |AC|$. Mediaanid AD ja BE lõikuvad punktis G. Olgu P lõigu GE keskpunkt.

a) Tõesta, et kui $|GP| = |GD|$, siis $CEPD$ on kõõlnelinurk.

b) Kas kehtib ka pöördväide: kui $CEPD$ on kõõlnelinurk, siis $|GP| = |GD|$?

6. Väike Juku kirjutab tahvlile kõik naturaalarvud 1 kuni n, aga kuna ta number nelja veel ei tunne, siis jätab ta kõik nelja sisaldavad arvud vahele. Juku õde Mari kustutab kaks tahvlil olevat arvu ja kirjutab tahvlile nende arvude vahe absoluutväärtuse. Seejärel kustutab Mari uuesti kaks tahvlil olevat arvu ja kirjutab tahvlile nende vahe absoluutväärtuse, jne. Kas pärast lõplikku arvu selliseid samme on võimalik saavutada olukord, kus tahvlil esinevad kõik nelja sisaldavad naturaalarvud 1 kuni n ja ainult need, igaüks ühe korra, kui

a) $n = 2021$;

b) $n = 10000$?

Открытое соревнование по математике

11 декабря 2021 г. **Младшая группа**

Время, отводимое для решения: 5 часов.
Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи даёт 7 баллов.
Вспомогательные письменные материалы или электронные приборы не разрешены.

1. Найти все двузначные положительные целые числа, при сложении суммы цифр и произведения цифр которого получается это же самое число.

2. В треугольнике ABC выполняется $|AB| = |AC|$. Из вершины B проведена высота с основанием E. Известно, что по крайней мере один из треугольников BEA или BEC равнобедренный. Найти все возможные величины угла при вершине A треугольника ABC.

3. Существуют ли целые числа, при которых

а) $x^2 + (x+1)^2 + (x+2)^2 = y^2$?

б) $x^2 + (x+1)^2 + (x+2)^2 + (x+3)^2 = y^2$?

4. Маша выбирает пять различных положительных целых чисел, не больших чем 2021. Из этих пяти чисел должно быть возможно двумя различными способами выбрать два, сумма которых равна 1919. А также из этих пяти чисел должно быть возможно двумя различными способами выбрать два, сумма которых равна 2929. Найти все возможности, какие пять чисел может выбрать Маша.

Примечание. Способы выбрать два числа, которые отличаются только порядком чисел, не считаются различными.

5. Наибольший угол треугольника ABC находится при вершине C. Зададим окружность ϱ через центр A и радиус AC, а окружность σ через центр B и радиус BC. Окружность σ пересекается с окружностью, описанной около треугольника ABC, в точке D и с окружностью ϱ в точке F ($D \neq C$, $F \neq C$). Доказать, что точки A, D и F лежат на одной прямой.

6. В зоопарке живут хамелеоны, среди которых 25 зелёных, 20 коричневых и 15 оранжевых. Каждый раз, когда встречаются ровно два хамелеона двух различных цветов, они оба меняют свой цвет на третий. В других случаях хамелеоны свой цвет не меняют. Может ли случиться, что:

а) в какой-то момент времени хамелеонов каждого цвета будет одинаковое количество?

б) в какой-то момент времени все хамелеоны будут одного цвета?

Открытое соревнование по математике

11 декабря 2021 г. **Старшая группа**

Время, отводимое для решения: 5 часов.
Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи даёт 7 баллов.
Вспомогательные письменные материалы или электронные приборы не разрешены.

1. Мама хочет поделить треугольный кусок пирога между тремя детьми. Для этого она первым делом делает один прямой разрез из одной вершины до середины противоположной стороны, а затем и второй прямой разрез из другой вершины до середины противоположной стороны. Получившиеся кусочки она раздаёт следующим образом: Ане достаётся четырёхугольный кусок, Вере — треугольный кусок напротив, а Гале — два оставшихся треугольника. Кто из детей получит больше всего пирога?

2. Существуют ли

а) 3 последовательных натуральных числа;

б) 4 последовательных натуральных числа,

каждое из которых представимо как сумма квадратов каких-то двух (не обязательно различных) положительных целых числа?

3. Найти все такие пары целых чисел (x, y), что

$$y^4 = x(2x^2 + y)^3.$$

4. Найти наименьшую возможную сумму 2021 членов последовательности целых чисел $a_1, a_2, a_3, \ldots$, где $a_1 = 0$, $a_2 = a_3 = 1$ и $a_{i+j} > a_i + a_j$ для всех $i, j \geqslant 2$.

5. В треугольнике ABC выполняется $|AB| = |AC|$. Медианы AD и BE пересекаются в точке G. Точка P — середина отрезка GE.

а) Доказать, что если $|GP| = |GD|$, то $CEPD$ — вписанный четырёхугольник.

б) Верно ли обратное: если $CEPD$ — вписанный четырёхугольник, то $|GP| = |GD|$?

6. Ванюшка записывает на доске все натуральные числа от 1 до n, но так как он ещё не знает, как пишется цифра четыре, то пропускает все числа, содержащие эту цифру. Его сестра Таня стирает два числа на доске и записывает на доске модуль их разности. Затем Таня снова стирает два числа на доске и записывает на доске модуль их разности, и так далее. Может ли после конечного числа таких ходов получиться так, что на доске окажутся все натуральные числа от 1 до n, содержащие цифру четыре, и только они, причём каждое по одному разу, если

а) $n = 2021$;

б) $n = 10000$?

Matemaatika lahtine võistlus

11. detsember 2021 **Noorem rühm**

Lahendused

1. *(Hendrik Vija)*

Leia kõik kahekohalised positiivsed täisarvud, mille numbrite summa ja numbrite korrutise kokkuliitmisel saame tulemuseks selle arvu enda.

Vastus: $19, 29, 39, 49, 59, 69, 79, 89, 99$.

Lahendus 1. Olgu otsitav arv $\overline{AB}$ ehk $10A + B$. Ülesande tingimustest saame võrduse $A+B+AB = 10A+B$, millest sarnaste liikmete koondamisel saame $AB = 9A$. Kuna A on arvu esimene number, siis $A \neq 0$, mistõttu saame A-ga läbi jagades $B = 9$. Seega sobivad kõik arvud $19, 29, 39, 49, 59, 69, 79, 89, 99$.

Lahendus 2. Olgu otsitav arv n. Meenutame, et arv n ja tema numbrite summa annavad arvuga 9 jagamisel sama jäägi. Seega ainus võimalus, kuidas soovitud võrdus saaks kehtida, on siis, kui arvu n numbrite korrutis jagub arvuga 9.

Kui üks numbritest on 0, siis on numbrite korrutis 0 ja numbrite summa ühekohaline, mistõttu soovitud võrdus ei saa kehtida.

Kui üks numbritest on 9, siis on kaks võimalust, kus ta saab arvus paikneda. Kõik arvud, milles 9 on üheliste kohal, sobivad, sest iga nullist erineva kümneliste numbri A korral $A + 9 + A \cdot 9 = 10A + 9 = \overline{A9}$. Arvud, kus 9 on kümneliste kohal ja üheliste kohal on midagi muud, ei sobi, sest numbrite summa ja numbrite korrutise summa on maksimaalselt $9 + 8 + 9 \cdot 8$ ehk 89.

Kui kumbki number ei jagu arvuga 9, siis peavad mõlemad numbrid jaguma arvuga 3. Jäävad kontrollida arvud 33, 36, 63, 66, millest ükski ei sobi.

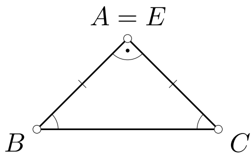
2. *(Härmel Nestra)*

Kolmnurgas ABC on $|AB| = |AC|$. Tipust B tõmmatud kõrguse aluspunkt on E. On teada, et BEA või BEC on võrdhaarne kolmnurk. Leia kõik võimalused, kui suur võib olla nurk kolmnurga ABC tipu A juures.

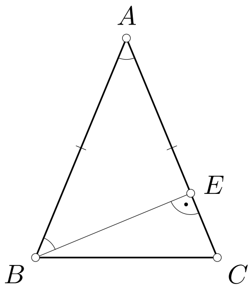
Vastus: 45°, 90°, 135°.

Lahendus 1. Tähistame $\alpha = \angle BAC$. Kolmnurkade BEA ja BEC üks nurk on tipu E juures ja see on täisnurk. Seega need kolmnurgad võivad olla võrdhaarsed ainult siis, kui ülejäänud nurkade suurused on 45°.

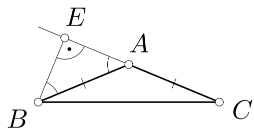
Oletame, et BEC on võrdhaarne kolmnurk (joonis 1). Siis eelneva põhjal $\angle BCE = 45^\circ$. Kuna $\angle BCE = \angle BCA = \dfrac{180^\circ - \alpha}{2}$, siis $\alpha = 180^\circ - 2 \cdot 45^\circ = 90^\circ$.



Joonis 1



Joonis 2



Joonis 3

Oletame nüüd, et BEA on võrdhaarne kolmnurk. Eelneva põhjal saame $\angle BAE = 45^\circ$. Kui E asub lõigul AC (joonis 2), siis $\angle BAE = \angle BAC = \alpha$, millest tulenevalt $\alpha = 45^\circ$. Kui E asub lõigu AC pikendusel (joonis 3), siis $\angle BAE = 180^\circ - \angle BAC = 180^\circ - \alpha$, kust $\alpha = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$.

Lahendus 2. Tähistame $\alpha = \angle BAC$. Siis $\angle ABC = \angle ACB = \dfrac{180^\circ - \alpha}{2}$ ja $\angle EBC = 90^\circ - \dfrac{180^\circ - \alpha}{2} = \dfrac{\alpha}{2}$. Kolmnurkade BEA ja BEC üks nurk on tipu E juures ja see on täisnurk, mistõttu need kolmnurgad on võrdhaarsed parajasti siis, kui nende ülejäänud kaks nurka on võrdsed.

Oletame, et BEC on võrdhaarne kolmnurk. Eelneva põhjal $\dfrac{180^\circ - \alpha}{2} = \dfrac{\alpha}{2}$, kust $\alpha = 90^\circ$.

Oletame nüüd, et BEA on võrdhaarne kolmnurk. Kui kolmnurk ABC on teravnurkne, siis $\angle BAE = \alpha$ ja $\angle ABE = \dfrac{180^\circ - \alpha}{2} - \dfrac{\alpha}{2} = 90^\circ - \alpha$. Seega $\alpha = 90^\circ - \alpha$, kust $\alpha = 45^\circ$. Kui kolmnurk ABC on nürinurkne, siis $\angle BAE = 180^\circ - \alpha$ ja $\angle ABE = \dfrac{\alpha}{2} - \dfrac{180^\circ - \alpha}{2} = \alpha - 90^\circ$. Siit $180^\circ - \alpha = \alpha - 90^\circ$, mis annab $\alpha = 135^\circ$. Kolmnurk ABC ei saa olla täisnurkne, sest siis oleks kolmnurgal BEA kaks täisnurka.

3. *(Urve Kangro)*

Kas leiduvad täisarvud x ja y, mille korral

a) $x^2 + (x+1)^2 + (x+2)^2 = y^2$?

b) $x^2 + (x+1)^2 + (x+2)^2 + (x+3)^2 = y^2$?

Vastus: a) ei; b) ei.

Lahendus.

a) Arvud x, $x+1$ ja $x+2$ annavad 3-ga jagamisel jäägid 0, 1 ja 2 mingis järjestuses. Nende arvude ruudud annavad 3-ga jagamisel jäägiks vastavalt 0, 1 ja 1. Seega võrrandi vasak pool annab 3-ga jagamisel jäägiks 2. Parem pool aga annab 3-ga jagamisel jäägiks 0 või 1. Järelikult võrrand ei saa kehtida.

b) Arvude x, $x+1$, $x+2$ ja $x+3$ seas on kaks paarisarvu ja kaks paaritut arvu. Paarisarvude ruudud jaguvad 4-ga, paaritute arvude ruudud annavad 4-ga jagamisel jäägi 1. Seega vasak pool annab 4-ga jagamisel jäägi 2. Parem pool aga annab 4-ga jagamisel jäägiks 0 või 1. Järelikult võrrand ei saa kehtida.

4. *(Joonas Jürgen Kisel)*

Mari valib viis erinevat positiivset täisarvu, mis pole suuremad kui 2021. Neist viiest arvust peab saama kahel erineval viisil valida kaks sellist, mille summa on 1919. Samuti peab neist viiest arvust saama kahel erineval viisil valida kaks sellist, mille summa on 2929. Leia kõik võimalused, millised viis arvu võib Mari valida.

Märkus. Kahe arvu valikuvõimalusi, mis erinevad vaid arvude järjestuse poolest, ei loeta erinevaks.

Vastus: $1, 908, 1011, 1918, 2021$ on ainus võimalus.

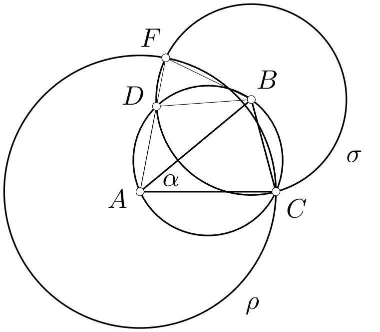
Lahendus 1. Olgu a ja $1919-a$ ning b ja $1919-b$ kaks paari Mari valitud arve, mis annavad summaks 1919. Kui neil kahel esitusel oleks üks ühine liidetav, siis peaks ka teine liidetav olema sama ning tegu poleks kahe erineva esitusega. Seega arvud a, b, $1919-a$ ja $1919-b$ on kõik erinevad. Olgu viies Mari valitud arv x; siis Mari valitud arvude summa esitub kujul $3838+x$.

Sarnaselt näeme, et Mari valitud arvud peavad väljenduma kujul c, $2929-c$, d, $2929-d$, y; nende summa on $5858+y$. Võrdusest $3838+x=5858+y$ järeldub aga $x=y+2020$ ehk $x-y=2020$. Ainus võimalus selleks on $x=2021$, $y=1$. Seega arvude a, b, $1919-a$, $1919-b$ seas leidub arv 1 ning arvude c, d, $2929-c$, $2929-d$ seas arv 2021; üldisust kitsendamata $a=1$ ja $c=2021$. Siis Mari valitud arvude hulka kuuluvad veel arvud $1919-1$ ehk 1918 ja $2929-2021$ ehk 908. Järelikult üldisust kitsendamata $b=908$ ja viimane Mari valitud arv on $1919-908$ ehk 1011.

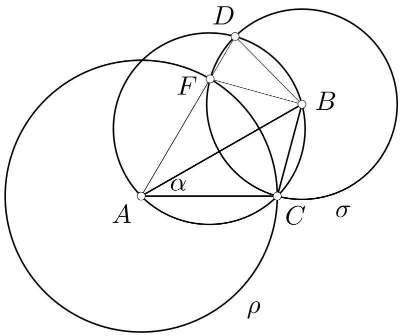
Lahendus 2. Olgu Mari valitud arvud a, b, c, d, e. Üldisust kitsendamata $a+b=1919$. Kui teisel viisil, kuidas summaks saada 1919, oleks üheks liidetavaks kas a või b, siis peaks teine liidetav olema võrdne vastavalt arvuga b või arvuga a; kuna aga valitud arvud on teineteisest erinevad, on see võimatu. Järelikult üldisust kitsendamata $c+d=1919$.

Sarnaselt tuleb 2929 saamiseks kahel eri viisil kasutada nelja erinevat arvu. Kui need arvud oleks a, b, c, d, siis $a+b=c+d=1919$ annab $a+b+c+d=3838$, aga teisest küljest $a+b+c+d=2929+2929=5858$, vastuolu. Seega peab üks summadest sisaldama arvu e. Üldisust kitsendamata $d+e=2929$. Teine viis arvu 2929 moodustamiseks peab kasutama täpselt kaht arvudest a, b, c, aga me teame, et $a+b=1919$. Seega üldisust kitsendamata $b+c=2929$.

Kasutades neid võrdusi, saame $b=1919-a$, $c=2929-b=1010+a$, $d=1919-c=909-a$ ja $e=2929-d=2020+a$. Kuna kõik arvud on



Joonis 4



Joonis 5

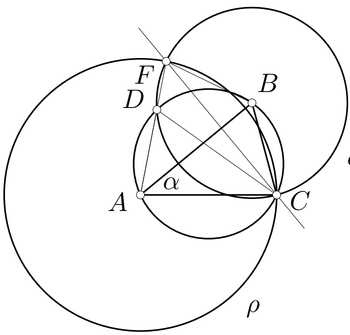
positiivsed ja ei ületa arvu 2021, siis viimasest võrdusest järeldub $a = 1$ ja $e = 2021$. Asendades $a = 1$ ülejäänud võrdustesse saame $b = 1918$, $c = 1011$ ja $d = 908$.

5. *(Sandra Schumann)*

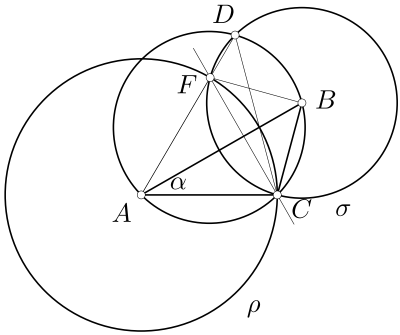
Kolmnurga ABC suurim nurk on tipu C juures. Olgu ϱ ringjoon keskpunktiga A ja raadiusega AC ning σ ringjoon keskpunktiga B ja raadiusega BC. Ringjoon σ lõikab kolmnurga ABC ümberringjoont punktis D ning ringjoont ϱ punktis F ($D \neq C$, $F \neq C$). Tõesta, et punktid A, D ja F asuvad ühel sirgel.

Lahendus 1. Tähistame $\angle BAC = \alpha$ (joonised 4 ja 5 esitavad kaks võimalikku pilti). Paneme tähele, et $|AC| = |AF|$ ja $|BC| = |BF|$, kuna tegemist on ringjoonte ϱ ja σ raadiustega. Seega on kolmnurgad ABF ja ABC tunnuse KKK põhjal võrdsed. Järelikult $\angle BAF = \alpha$. Ringjoone σ raadiuste võrdsusest aga saame ka $|BD| = |BC|$. Kolmnurga ABC ümberringjoone võrdsetele kõõludele BC ja BD toetuvate piirdenurkade võrdsuse põhjal seega $\angle BAD = \alpha$. Järelikult A, D ja F on ühel sirgel.

Lahendus 2. Piirdenurkadest kolmnurga ABC ümberringjoonel saame võrduse $\angle ADC = \angle ABC$. Sarnaselt lahendusega 1 näitame, et kolmnurgad ABF ja ABC on võrdsed; seega $\angle ABC = \angle ABF = \frac{\angle CBF}{2}$. Kui D ja A asuvad samal pool sirget CF (joonis 6), siis piirde- ja kesknurga vahelisest seosest ringjoonel σ tuleneb $\frac{\angle CBF}{2} = 180^\circ - \angle CDF$. Kui aga D ja A asuvad erineval pool sirget CF (joonis 7), siis analoogselt $\frac{\angle CBF}{2} = \angle CDF$. Kokkuvõttes oleme näidanud, et $\angle ADC = 180^\circ - \angle CDF$ või $\angle ADC = \angle CDF$ vastavalt sellele, kas D ja A asuvad samal või erineval pool sirget CF. Mõlemal juhul nähtub saadud võrdusest, et A, D ja F on ühel sirgel.



Joonis 6



Joonis 7

6. *(Urve Kangro)*

Loomaaias on 25 rohelist, 20 pruuni ja 15 oranži kameeleoni. Iga kord, kui täpselt kaks eri värvi kameeleoni kohtuvad, muudavad mõlemad oma värvi kolmandaks. Muudel juhtudel kameeleonid värvi ei muuda. Kas võib juhtuda, et:

a) mingil ajal on igat värvi kameeleone ühepalju?

b) mingil ajal on kõik kameeleonid ühte värvi?

Vastus: a) ei; b) ei.

Lahendus 1. Igal kohtumisel kaht värvi kameeleonide arv väheneb 1 võrra ja üht värvi kameeleonide arv suureneb 2 võrra. Seega iga kaht värvi kameeleonide arvude vahe jääk 3-ga jagamisel ei muutu. Et algul annavad eri värvi kameeleonide arvud 3-ga jagamisel erinevad jäägid, siis ei saa ühtki kaht värvi kameeleonide arvud ühelgi hetkel muutuda võrdseks. Viimasest tuleneb ka, et kõik kameeleonid ei saa olla ühte värvi, sest siis oleks ülejäänud kaht värvi kameeleone võrdselt 0.

Lahendus 2.

a) Kui igat värvi kameeleone on ühepalju, siis neid kõiki peab olema 20. Selleks, et pruunide kameeleonide arv jääks samaks, peab igale kahe võrra suurenemisele vastama 2 ühe võrra vähenemist, mistõttu kokku peaks käikude arv olema $3x$. Selleks, et 25 rohelisest kameeleonist saaks 20, on vaja 5 ühe võrra vähenemist; lisaks igale kahe võrra suurenemisele peab vastama 2 ühe võrra vähenemist, seega käikude arv peaks olema $5+3y$. Kokkuvõttes $3x = 5+3y$, aga sellel võrrandil täisarvulised lahendid puuduvad.

b) Analoogiliselt, kui pruune kameeleone oleks lõpus 60, siis oleks vaja $20 + 3x$ käiku; sel juhul oranže peaks olema 0, milleks on vaja $15 + 3y$ käiku, aga võrrandil $20+3x = 15+3y$ täisarvulised lahendid puuduvad.

Kui pruune oleks lõpus 0, siis oleks vaja samuti $20 + 3x$ käiku; kui ka oranže oleks 0, siis oleks vaja $15 + 3y$ käiku ning saame sama võrrandi, kui aga rohelisi oleks 0, siis saaksime võrrandiks $20+3x = 25+3y$, millel samuti lahendid puuduvad.

Lahendus 3. Alguses on kameeleonide arvude jäägid 3-ga jagamisel 0, 1 ja 2. Pärast ükskõik millist käiku on need jäägid endiselt 0, 1 ja 2 mingis järjekorras. Seega pole võimalik saada jääkideks 2, 2 ja 2, mis vastab juhulele, kus igat värvi kameeleone on ühepalju, ega ka 0, 0 ja 0, mis vastab juhulele, kus kõik kameeleonid on ühte värvi.

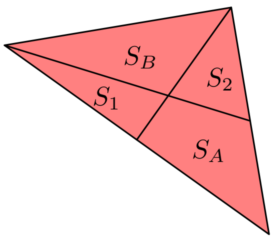
Lahendused

1. *(Urve Kangro)*

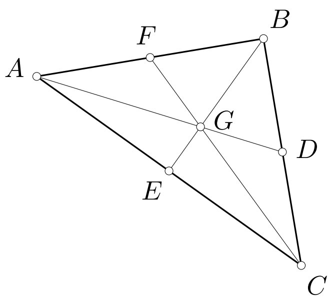
Ema jagab kolmnurkset koogitükki kolme lapse vahel. Selleks teeb ta kõigepealt ühe sirge lõike ühest tipust vastaskülje keskpunkti ja siis teise sirge lõike teisest tipust vastaskülje keskpunkti. Tekkinud tükid jagab ta järgmiselt: Anna saab nelinurkse tüki, Berta selle vastas oleva kolmnurkse tüki ja Clara kaks ülejäänud kolmnurka. Kes lastest saab kõige rohkem kooki?

Vastus: kõik saavad võrdselt.

Lahendus 1. Olgu kogu koogi pindala S, nelinurkse tüki pindala S_A, Berta tüki pindala S_B ja ülejäänud väiksemad tükid S_1 ja S_2 (joonis 8). Siis $S_1 + S_B = S_2 + S_B = \frac{1}{2}S$ (samad kõrgused, aluste suhe $\frac{1}{2}$). Kuna mediaanide lõikepunkt jaotab mediaani suhtes $1 : 2$, siis $S_B = 2S_1$ (samad kõrgused, aluste suhe 2). Siit $S_1 = S_2 = \frac{1}{6}S$, $S_B = \frac{1}{3}S$ ja seega ka $S_A = \frac{1}{3}S$.



Joonis 8



Joonis 9

Lahendus 2. Oletame, et ema teeb ka kolmanda lõike kolmandast tipust vastaskülje keskpunkti. Kuna kolmnurga mediaanid lõikuvad ühes punktis, jaotab see lõige Anna ja Berta tükid kaheks osaks ning Clara tükid jäävad puutumata. Nii saab iga laps täpselt kaks tükki.

Näitame, et kolmnurga mediaanid jaotavad kolmnurga kuueks võrdpindseks osaks; sellest järeldub, et kõik lapsed saavad võrdselt kooki. Olgu kolmnurk ABC, tema mediaanid AD, BE ja CF ning mediaanide lõikepunkt G

(joonis 9). Kolmnurga BGD külje BD pikkus on $\frac{1}{2}$ kolmnurga ABC külje BC pikkusest, küljele BD joonistatud kolmnurga BGD kõrgus on aga $\frac{1}{3}$ küljele BC joonistatud kolmnurga ABC kõrgusest (kuna mediaanide lõikepunkt jaotab mediaani suhtes $2 : 1$, siis $|AD| = 3|GD|$, mistõttu kiirteteoreemi põhjal on tipust A sirgele BC tõmmatud ristlõik 3 korda pikem tipust G samale sirgele tõmmatud ristlõigust). Seega kolmnurga BGD pindala moodustab $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}$ ehk $\frac{1}{6}$ kolmnurga ABC pindalast. Samasugune arutlus kehtib kolmnurga teiste tükkide kohta. Järelikult kõik osad on võrdse pindalaga.

2. *(Urve Kangro)*

Kas leidub

a) 3 järjestikust naturaalarvu;

b) 4 järjestikust naturaalarvu,

mis kõik esituvad mingi kahe (mitte tingimata erineva) positiivse täisarvu ruutude summana?

Vastus: a) jah; b) ei.

Lahendus.

a) Sobivad näiteks $72 = 6^2 + 6^2$, $73 = 3^2 + 8^2$, $74 = 5^2 + 7^2$.

b) Kuna täisarvu ruut annab 4-ga jagades jäägi 0 või 1, siis kahe täisarvu ruudu summa annab 4-ga jagades jäägi 0, 1 või 2. Iga 4 järjestikuse täisarvu seas leidub selline, mis annab 4-ga jagades jäägi 3. Seega 4 järjestikust täisarvu ei saa olla kõik esitatavad kahe täisarvu ruudu summana.

Märkus. Osas a) leidub sobivaid järjestikuste täisarvude kolmikuid lõpmata palju. Seda väidet saab tõestada järgnevalt. Olgu $n-1$, n, $n+1$ suvalised ülesande tingimusi rahuldavad täisarvud. See tähendab, et leiduvad täisarvud a, b, c, d, e, f, nii et $n-1 = a^2 + b^2$, $n = c^2 + d^2$ ja $n+1 = e^2 + f^2$. Siis ka arvud $n^2 - 1$, n^2, $n^2 + 1$ rahuldavad ülesande tingimusi, sest $n^2 - 1 = (n-1)(n+1) = (a^2 + b^2)(e^2 + f^2) = (af + be)^2 + (ae - bf)^2$, $n^2 = (c^2 + d^2)^2 = (c^2 - d^2)^2 + (2cd)^2$ ja $n^2 + 1 = n^2 + 1^2$. (Siin $ae - bf = 0$ pole võimalik, sest muidu oleks $n^2 - 1$ täisruut, ja $c^2 - d^2 = 0$ on välistatud, sest n on paaritu). Samamoodi jätkates näeme, et arvud $n^4 - 1$, n^4, $n^4 + 1$ rahuldavad ülesande tingimusi, jne.

3. *(Triinu Veeorg)*

Leia kõik täisarvupaarid (x, y), mis rahuldavad võrrandit

$$y^4 = x(2x^2 + y)^3.$$

Vastus: $\left(\frac{z^3(z-1)}{2}, \frac{z^6(z-1)}{2}\right)$, kus z on suvaline täisarv.

Lahendus 1. Kui $x = 0$, siis ka $y = 0$. Eeldame järgnevas, et $x \neq 0$.

Olgu $d = \text{SÜT}(x, y) > 0$ ning $x = da$, $y = db$. Taandades antud võrrandi arvuga d^4, saame

$$b^4 = a(2a^2 d + b)^3.$$

Et a ja b on ühistegurita, kuid a on viimasest võrrandist tulenevalt b^4 tegur, siis $|a| = 1$ ja võrrand taandub kujule

$$b^4 = \pm(2d + b)^3.$$

Et sama arv esitub nii täisarvu neljanda astme kui ka kuubina, on tegu mingi täisarvu kaheteistkümnenda astmega ning $b = z^3$ mingi täisarvu z korral. Võrrandisse asendades ja juurides saame $z^4 = \pm(2d + z^3)$ ehk $\mp z^4 = 2d + z^3$. Et $-z^4 \leqslant -|z^3| \leqslant z^3 < 2d + z^3$, ei ole miinusmärk võimalik, mistõttu

$$d = \frac{z^4 - z^3}{2} = \frac{z^3(z-1)}{2}.$$

Seega $x = \dfrac{z^3(z-1)}{2}$ ja $y = \dfrac{z^6(z-1)}{2}$, kus z on suvaline 0-st ja 1-st erinev täisarv. Sel juhul $d > 0$, mistõttu leitud lahend rahuldab algset võrrandit. Kui $z = 0$ või $z = 1$, saame algul leitud lahendi $(0, 0)$.

Lahendus 2. Kui $x = 0$, siis ka $y = 0$ ning kui $y = 0$, siis ka $x = 0$. Eeldame järgnevas, et $x \neq 0$ ja $y \neq 0$.

Jagades antud võrrandi mõlemad pooled arvuga y ning võttes kolmanda juure, saame

$$y = (2x^2 + y) \cdot \sqrt[3]{\frac{x}{y}}.$$

Jagades võrrandi mõlemad pooled arvuga $2x^2 + y$ (mis erineb nullist, muidu võrrandisse asendades $y = 0$), saame

$$\sqrt[3]{\frac{x}{y}} = \frac{y}{2x^2 + y}.$$

Saadud võrrandi parem pool on ratsionaalarv. Seega on ka $\sqrt[3]{\dfrac{x}{y}}$ ja $\sqrt[3]{\dfrac{y}{x}}$ ratsionaalarvud, mistõttu $\dfrac{y}{x}$ on ratsionaalarvu kuup.

Olgu $\sqrt[3]{\dfrac{y}{x}} = z$, siis $\dfrac{y}{x} = z^3$ ja $y = xz^3$. Enne saadud võrrand läheb siis kujule

$$\frac{1}{z} = \frac{xz^3}{2x^2 + xz^3}.$$

Korrutades selle võrrandi mõlemaid pooli arvuga $z(2x+z^3)$, saame

$$2x + z^3 = z^4.$$

Siit näeme, et $x = \dfrac{z^4 - z^3}{2}$, mis peab olema täisarv.

Olgu $z = \dfrac{a}{b}$, kus $\text{SÜT}(a,b) = 1$. Siis $\dfrac{a^4 - a^3 b}{2b^4}$ on täisarv, millest tulenevalt $b \mid a^4 - a^3 b$ ja siit omakorda $b \mid a^4$. Et $\text{SÜT}(a,b) = 1$, siis $b = \pm 1$, mistõttu z on täisarv.

Saame lahendid $x = \dfrac{z^3(z-1)}{2}$ ja $y = \dfrac{z^6(z-1)}{2}$, kus z on suvaline täisarv. Näeme, et x ja y on täisarvud iga täisarvu z korral, kuna $z-1$ on erineva paarsusega arvudest z^3 ja z^6.

4. *(Artur Avameri)*

Leia vähim võimalik 2021 liikme summa täisarvude jadas $a_1, a_2, a_3, \ldots$, kus $a_1 = 0$, $a_2 = a_3 = 1$ ja iga $i, j \geqslant 2$ korral $a_{i+j} > a_i + a_j$.

Vastus: $2 \cdot 1010^2$ ehk 2040200.

Lahendus. Näitame, et vähima summa annab jada $0, 1, 1, 3, 3, 5, 5, \ldots$ (iga $i \geqslant 1$ korral $a_{2i} = a_{2i+1} = 2i - 1$). Veendume kõigepealt, et see jada rahuldab ülesande tingimusi. Tõepoolest, kui j ja k on sama paarsusega, siis $a_{j+k} = j + k - 1 > (j-1) + (k-1) \geqslant a_j + a_k$. Kui aga j ja k on erineva paarsusega, siis üldisust kitsendamata olgu j paaris ja saame $a_{j+k} = j + k - 2 > (j-1) + (k-2) = a_j + a_k$.

Tõestame nüüd, et mistahes positiivse täisarvu n korral $a_{2n} \geqslant 2n - 1$ ja $a_{2n+1} \geqslant 2n - 1$, kui $a_1, a_2, a_3, \ldots$ on suvaline ülesande tingimusi rahuldav täisarvujada. Viime läbi induktsiooni n järgi. Baasjuhud $a_2 \geqslant 1$ ning $a_3 \geqslant 1$ kehtivad. Kui $a_{2n} \geqslant 2n - 1$, siis saame ülesande tingimustest

$$a_{2n+2} \geqslant a_{2n} + a_2 + 1 \geqslant 2n - 1 + 1 + 1 = 2(n+1) - 1,$$

mis tõestab induktsiooni sammu paaris indeksite jaoks. Sama kehtib paaritute indeksite korral: kui $a_{2n+1} \geqslant 2n - 1$, siis

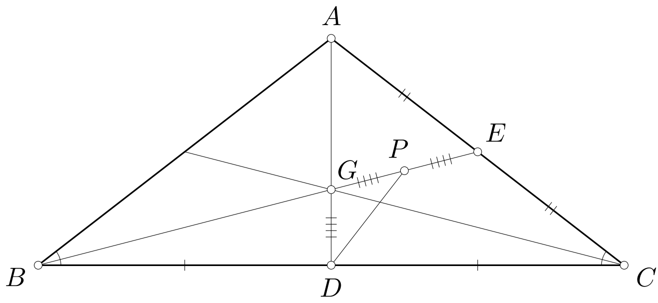
$$a_{2n+3} \geqslant a_{2n+1} + a_2 + 1 \geqslant 2n - 1 + 1 + 1 = 2(n+1) - 1.$$

Seega vähim 2021 liikme summa on $2(1 + 3 + \cdots + 2019)$ ehk $2 \cdot 1010^2$.

5. *(Sandra Schumann)*

Kolmnurgas ABC on $|AB| = |AC|$. Mediaanid AD ja BE lõikuvad punktis G. Olgu P lõigu GE keskpunkt.

a) Tõesta, et kui $|GP| = |GD|$, siis $CEPD$ on kõõlnelinurk.



Joonis 10

b) Kas kehtib ka pöördväide: kui $CEPD$ on kõõlnelinurk, siis $|GP| = |GD|$?

Vastus: b) jah.

Lahendus 1.

a) Et mediaanide lõikepunkt jaotab mediaanid suhtes $2:1$ ja P vastavalt ülesande tingimusele poolitab lõigu GE (joonis 10), siis

$$|AG| = 2|GD| = 2|GP| = |GE|.$$

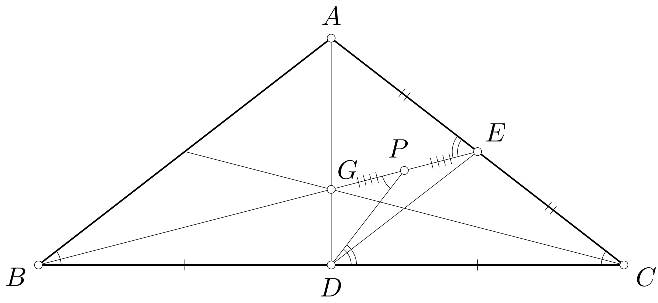
Seega kolmnurk GAE on võrdhaarne tipunurgaga tipu G juures.
Olgu $\angle BAC = \alpha$. Et võrdhaarse kolmnurga tipunurgast tõmmatud mediaan poolitab tipunurga, siis $\angle DAC = \frac{\alpha}{2}$. Võrdhaarsest kolmnurgast GAE saame $\angle AGE = 180^\circ - 2 \cdot \frac{\alpha}{2} = 180^\circ - \alpha$, millest tulenevalt $\angle DGP = 180^\circ - \angle AGE = \alpha$. Seega võrdhaarsed kolmnurgad ABC ja GDP on sarnased võrdsete tipunurkade tunnusel. Järelikult on võrdsed ka nende kolmnurkade alusnurgad ehk $\angle GPD = \angle ACB$. See tähendabki, et $CEPD$ on kõõlnelinurk.

b) Olgu $\angle BCA = \angle CBA = \gamma$ ja $\angle CDP = \xi$. Et $CEPD$ on kõõlnelinurk, siis $\angle DPG = \gamma$ ja $\angle GEA = \xi$ (joonis 11). Kuna mediaanide lõikepunkt jaotab mediaanid suhtes $2:1$ ja P on ülesande tingimuse põhjal lõigu GE keskpunkt, siis $\frac{|GD|}{|GP|} = \frac{|GA|}{|GE|}$. Siinusteoreemist kolmnurgas GDP saame

$$\frac{|GD|}{|GP|} = \frac{\sin\angle GPD}{\sin\angle GDP} = \frac{\sin\gamma}{\sin(90^\circ - \xi)} = \frac{\sin\gamma}{\cos\xi},$$

sest võrdhaarse kolmnurga tipunurgast tõmmatud mediaan ja kõrgus ühtivad. Siinusteoreemist kolmnurgas GAE aga

$$\frac{|GA|}{|GE|} = \frac{\sin\angle GEA}{\sin\angle GAE} = \frac{\sin\xi}{\sin\left(90^\circ - \gamma\right)} = \frac{\sin\xi}{\cos\gamma}.$$



Joonis 11

Kokkuvõttes $\dfrac{\sin\gamma}{\cos\xi} = \dfrac{\sin\xi}{\cos\gamma}$ ehk $\sin\gamma\cos\gamma = \sin\xi\cos\xi$, millest järeldub $\sin 2\gamma = \sin 2\xi$. Et γ ja ξ asuvad esimeses veerandis, siis annab see võimalused $\xi = \gamma$ ja $\xi = 90^\circ - \gamma$. Et aga DE on kolmnurga ABC kesklõik, siis $\angle CDE = \gamma$, mistõttu $\xi > \gamma$. Seega ainus võimalus on $\xi = 90^\circ - \gamma$. Kolmnurgast GDP saame nüüd

$$\angle GDP = 90^\circ - \xi = 90^\circ - \big(90^\circ - \gamma\big) = \gamma = \angle GPD,$$

kust $|GD| = |GP|$.

Lahendus 2. Olgu $|BD| = |DC| = x$ ja $|GP| = |PE| = y$. Kuna mediaanide lõikepunkt jaotab mediaani suhtes $2 : 1$, siis $|BG| = 2 \cdot 2y = 4y$, $|BP| = 4y + y = 5y$ ja $|BE| = 4y + 2y = 6y$. Võrdhaarse kolmnurga tipunurgast tõmmatud mediaan ühtib kõrgusega. Seega võrdus $|GP| = |GD|$ ehk $|GP|^2 = |GD|^2$ kehtib Pythagorase teoreemi põhjal parajasti siis, kui $y^2 = |BG|^2 - |BD|^2 = 16y^2 - x^2$ ehk $x^2 = 15y^2$. Tingimus, et $CEPD$ on kõõlnelinurk, on aga potentsivõrduse põhjal samaväärne tingimusega $|BP| \cdot |BE| = |BD| \cdot |BC|$ ehk $5y \cdot 6y = x \cdot 2x$, mille lihtsustamisel saame samuti $x^2 = 15y^2$. Järelikult $|GP| = |GD|$ parajasti siis, kui $CEPD$ on kõõlnelinurk, mis lahendab ülesande mõlemad osad.

Märkus. Kirjeldatud olukord tekib alusnurga γ puhul, mis rahuldab võrdust $\sin^2\gamma = \dfrac{3}{8}$; ümardatult $\gamma \approx 37{,}76^\circ$.

6. *(Sandra Schumann, Oleg Košik, Härmel Nestra)*

Väike Juku kirjutab tahvlile kõik naturaalarvud 1 kuni n, aga kuna ta number nelja veel ei tunne, siis jätab ta kõik nelja sisaldavad arvud vahele. Juku õde Mari kustutab kaks tahvlil olevat arvu ja kirjutab tahvlile nende arvude vahe absoluutväärtuse. Seejärel kustutab Mari uuesti kaks tahvlil olevat arvu ja kirjutab tahvlile nende vahe absoluutväärtuse, jne. Kas pärast lõplikku arvu selliseid samme on võimalik saavutada olukord, kus tahvlil esinevad kõik nelja sisaldavad naturaalarvud 1 kuni n ja ainult need, igaüks ühe korra, kui

a) $n = 2021$;

b) $n = 10000$?

Vastus: a) ei; b) ei.

Lahendus.

a) Kahe täisarvu vahe ja summa on sama paarsusega, samuti on täisarv ja tema absoluutväärtus sama paarsusega. Seega iga Mari samm jätab kõigi tahvlil olevate arvude summa paarsuse samaks. Kuna kõigi arvude $1, 2, \ldots, 2021$ seas on paarituid arve $\frac{2022}{2}$ ehk 1011 tükki, mis on paaritu arv, siis kõigi arvude $1, 2, \ldots, 2021$ summa on paaritu. Sellest tulenevalt on nende seas olevate nelja sisaldavate arvude ja nelja mitte sisaldavate arvude summad erineva paarsusega. Järelikult ei saa Mari kõigi nelja mitte sisaldavate arvude kooslusega alustades jõuda kõigi nelja sisaldavate arvude koosluseni.

b) Olgu esimese 10000 positiivse täisarvu seas a sellist, mis ei sisalda nelja, ja $10000 - a$ sellist, mis sisaldavad nelja. Et igal Mari sammuga jääb tahvlil üks arv vähemaks, peaks Mari eesmärgi saavutamiseks tegema täpselt $a - (10000 - a)$ ehk $2a - 10000$ sammu. Et iga sammuga tekib vaid üks uus arv, peaks kõigi nelja sisaldavate arvude tekkimiseks kehtima võrratus $2a - 10000 \geqslant 10000 - a$, mis on samaväärne tingimusega $a \geqslant \frac{20000}{3}$. Kuid esimese 10000 positiivse täisarvu seas on ainult 9^4 ehk 6561 arvu, mis nelja ei sisalda. Kuna $6561 < \frac{20000}{3}$, siis nõutud tingimuste täitmine pole võimalik.

Hindamisskeemid ja kontrollijate kommentaarid

1. *(Hendrik Vija)*

Žürii lahendusega 1 sarnaste mõttekäikude allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Tähistatud kahekohalise arvu numbrid muutujatega: 1 p
- Kirjutatud kahekohaline arv $\overline{ab}$ ümber kui $10a + b$: 1 p
- Koostatud võrrand a ja b suhtes: 1 p
- Korrektselt järeldatud, et $b = 9$: 2 p
- *Sealhulgas:*
  - Leitud, et $b = 9$, veendumata võrrandi pooli a-ga läbi jagades, et $a \neq 0$: *1 p*
- Jõutud õige vastuseni: 1 p
- Veendutud, et vastus tõepoolest sobib: 1 p

Enamik õpilasi, kes suutsid ära teha hindamisskeemi kaks esimest punkti, jõudsid ka õige vastuseni. Samas väga levinud viga oli võrrandi poolte a-ga jagamisel mitte veendumine, kas $a = 0$ on võimalik või ei. Samuti unustati kontrollida, et kõik leitud arvud tõepoolest sobivad. Žürii lahenduses 1 ei olegi tegelikult lahendite kontrolli vaja, sest kõik sammud lahendite leidmise teel on pööratavad (mistõttu ametlikus materjalis kontrolli pole), aga võistleja peaks ikkagi lahenduses näitama, et ta saab aru, mida teeb, kui jätab kontrolli ära. Piisas mainimisest, et lahendid sobivad, sest kõik sammud on pööratavad, või et läbivaatus näitab kõigi leitud lahendite sobivust. Vigade vältimiseks tasub lahendeid kontrollida ka siis, kui lahenduse loogika seda ei nõua.

Mõned õpilased hakkasid järjest kahekohalisi arve läbi proovima, leidsid mõne huvitava mustri ning väitsid, et see muster alati jätkub. Aga selliseid mustreid tuleb ka tõestada. Kahjuks selles ülesandes ei ole taolise mustri tõestamine lihtsam kui algse ülesande enda lahendamine.

2. *(Härmel Nestra)*

Žürii lahendusega 1 sarnaste mõttekäikude allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Põhjendatud, et kui BEA või BEC on võrdhaarne kolmnurk, siis alusnurk on suurusega 45°: 2 p

  Sealhulgas:

        - Alusnurga suurus leitud vaid ühe kolmnurga jaoks: *1 p*
- Ammendavalt käsitletud juht, kus BEC on võrdhaarne: 2 p
- Lahendatud juht, kus BEA on võrdhaarne ja E asub lõigul AC: 1 p
- Lahendatud juht, kus BEA on võrdhaarne ja E asub lõigu AC pikendusel: 2 p

Žürii lahendusega 2 sarnaste mõttekäikude allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Eeltöö (nurkade arvutamine jms): 2 p
- Ammendavalt käsitletud teravnurkse kolmnurga juht: 2 p
- Ammendavalt käsitletud nürinurkse kolmnurga juht: 2 p
- Ammendavalt käsitletud täisnurkse kolmnurga juht: 1 p

Ülesanne osutus ootamatult raskeks. Esialgsetes tulemustes on vaid üks täisskoor. Alla 10 lahendaja arvestas asjaoluga, et kolmnurga kõrguse aluspunkt võib asuda külje pikendusel. Eriti ootamatu oli aga see, kui paljud lahendajad jätsid sihilikult vaatluse alt välja juhu, kus BEC on võrdhaarne, saades vastuseks vaid 45° või mõnel juhul ka 135°. Põhjenduseks kirjutati näiteks, et kuna nurga EBA suurus oleks 0°, siis see juht pole võimalik (suurus 0° on võimalik, kui tegu ei ole kolmnurga nurgaga). Sellised võistlejad said lahendusele 1 vastava skeemi järgi hinnates skeemi teise rea järgi 0–1 punkti sõltuvalt sellest, kui palju kasulikke arvutusi selle juhu lahendamiseks oli tehtud.

3. *(Aleksandr Šved)*

Ülesande allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Lahendatud osa a): 4 p

  Sealhulgas:
    - Eraldatud arvu 3 kordsed, viies vasaku poole näiteks kujule $3(x^2+2x)+5$: *1 p*
- Lahendatud osa b): 3 p

  Sealhulgas:
    - Eraldatud arvu 4 kordsed, viies vasaku poole näiteks kujule $4(x^2+3x)+14$, või teisendatud võrrandi vasak pool kujule $(2x+3)^2+5$: *1 p*

4. *(Joonas Jürgen Kisel)*

Žürii lahendusega 1 analoogsete mõttekäikude allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Tõestatud, et kummaski summapaaris peab kasutama nelja erinevat arvu: 1 p
- Tõestatud, et $3838+x=5858+y$, kus x, y kuuluvad Mari valitud arvude hulka: 4 p

- Järeldatud, et kaks valitud arvu peavad teineteisest erinema 2020 võrra: 1 p
- Esitatud õige vastus: 1 p

Žürii lahendusega 2 analoogsete mõttekäikude allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Tõestatud, et kummaski summapaaris peab kasutama nelja erinevat arvu: 1 p
- Tõestatud, et iga valitud arv peab esinema vähemalt ühes summas: 2 p
- Näidatud, et üldisust kitsendamata $a+b=c+d=1919$ ja $b+c=d+e=2929$: 2 p
- Järeldatud, et kaks valitud arvu peavad teineteisest erinema 2020 võrra: 1 p
- Esitatud õige vastus: 1 p

Ülesanne läks oluliselt kehvemini kui oodatud: ligemale 80 esitatud töö hulgas oli kõigest 8 täislahendust. Kõige sagedasem viga oli unustamine, et tegemist on positiivsete arvudega, ning seega võõrlahendi leidmine. Vähe oli selgeid ja korrektseid argumente, enamasti hüpati detailidest üle ja esitati naiivseid mõttekäike. Näiteks esines paljudes töödes väiteid, et kui vähimat või suurimat liiget võrreldes ainsa lahendiga, mis sisaldab nii arve 1 kui ka 2021, ühele või teisele poolele nihutada, siis me rikume tingimust, et kõik arvud on vahemikus $[1, 2021]$. Selleks, et see argument pädeks, on tarvis näidata vähemalt seda, et üldisust kitsendamata kehtivad võrdused $a+b=c+d=1919$ ja $b+c=d+e=2929$ (nt kui lubatud oleks valida kuus arvu, siis oleks võrrandite $a+b=c+d=1919$ ja $b+c=e+f=2929$ lahendid põhimõtteliselt erinevad lahenditest kujul $1, 908, 1011, 1918, 2021, f$, mistõttu argumendid ühest lahendist kõikide teiste saamiseks ei töötaks) ning et arvu 1 asendamisel arvuga 2 peab arv 2021 asenduma arvuga 2022, mitte arvuga 2020 (nt kui arvud oleks 1919 ja 2929 asemel olnud 1517 ja 2022, oleks Maril olnud enam kui 500 võimalust viie arvu valimiseks, ehkki üks lahenditest on $\{1, 506, 1011, 1516, 2021\}$, mis sisaldab nii 1 kui ka 2021); kõigis sellistes töödes oli vähemalt üks neist väidetest tõestamata, sageli mõlemad. Mõnes töös eeldati meelevaldselt, et Maril on ainult üks võimalus arvude valimiseks, ning sellest johtuvalt oletati ka, et kas 1 või 2021 peab nende hulka kuuluma.

5. *(Sandra Schumann)*

Žürii lahendusega 1 sarnaste mõttekäikude allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Põhjendatud, et kolmnurgad ABC ja ABF on võrdsed: 2 p
- Välja toodud, et $\angle BAC = \angle BAF$: 1 p
- Välja toodud, et $|BC| = |BD|$: 1 p

- Põhjendatud, et $\angle BAC = \angle BAD$: 2 p
- Kõiki eelnevaid osasid kokku pannes jõutud lõppjärelduseni: 1 p

Žürii lahendusega 2 sarnaste mõttekäikude allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Põhjendatud, et kolmnurgad ABC ja ABF on võrdsed: 2 p
- Välja toodud, et $\angle ABC = \angle ABF$: 1 p
- Välja toodud, et $\angle ADC = \angle ABC$: 1 p
- Leitud ringjoone σ punktide abil $\angle CDF$ suurus mõlemal lahenduses kirjeldatud juhul: 2 p
- Kõiki eelnevaid osasid kokku pannes jõutud lõppjärelduseni: 1 p

Muude punkte väärt sammude puudumisel võis ühe punkti saada tähelepanekute eest, mille alusel saaks lihtsasti järeldada, et kolmnurgdad ABC ja ABF on võrdsed.

Ülesanne osutus ootuspäraselt keeruliseks. Sellegipoolest saadi palju osalisi punkte, eriti just võrdsete kolmnurkade leidmise eest.

6. *(Urve Kangro)*

Žürii lahendusega 1 sarnaste mõttekäikude allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Pandud tähele, et kameeleonide arvude jäägid 3-ga jagamisel on algul erinevad (või et vahed ei jagu 3-ga): 1 p
- Näidatud, et kaht värvi kameeleonide arvu vahe jääk 3-ga jagamisel ei muutu: 4 p
- Järeldatud sellest osa a) õige vastus: 1 p
- Järeldatud osa b) õige vastus: 1 p

Žürii lahendusega 2 sarnaste mõttekäikude allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Põhjendatud, mitu käiku on vaja mingi konkreetse värvi puhul vajaliku tulemuse saamiseks: 3 p
- Vaadeldud sama ka mingi teise värvi jaoks: 1 p
- Järeldatud sellest osa a) õige vastus: 1 p
- Järeldatud osa b) õige vastus: 2 p

Žürii lahendusega 3 sarnaste mõttekäikude allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Pandud tähele, et kameeleonide arvude jäägid 3-ga jagamisel on algul 0, 1 ja 2: 1 p
- Näidatud, et need jäägid käikude tegemisel jäävad samaks (kuigi teises järjekorras): 4 p
- Järeldatud sellest osa a) õige vastus: 1 p
- Järeldatud osa b) õige vastus: 1 p

Teise skeemi järgi lahendades võis kaotada punkti, kui käike tehti mingis konkreetses järjekorras, nt kui kõigepealt vähendati roheliste arvu 20-ni ja siis öeldi, et edasi on vaja 3-ga jaguv arv käike. Tegelikult siin küll käikude järjekorrast tulemus ei sõltu, aga sellest tuleks aru saada, mitte proovida konkreetset järjekorda.

Mõnede kasulike tähelepanekute eest (ilma tõestuseta) võis saada 1 punkti, nt et pole võimalik saavutada olukorda, kus kahte värvi oleks sama palju või et pole võimalik saada 3-ga jaguvat vahet.

Punkte ei saanud lihtsalt õige vastuse eest. Paljudes töödes oli lihtsalt proovitud erinevaid kohtumiste jadasid, püüdes saada lähedale soovitud tulemusele ja selle alusel väidetud, et see pole võimalik. Ka sellise lahenduse eest punkte ei saanud, sest põhimõtteliselt pole võimalik proovida läbi kõiki võimalikke kohtumiste jadasid. Mitmetes töödes püüti ülesannet lahedada kameeleonide arvu paarsust vaadeldes, aga esialgsest seisust, kus üks paaris ja kaks paaritut arvu, võib saada nii samasuguse seisu kui ka kõik paarisarvuks. Kuna ka soovitud lõppseisudes on kõik arvud paaris, siis siit vastuolu ei saa.

Mõnes töös oli ülesannet „lihtsustatud“: kuna kõik algsed kameeleonide arvud jaguvad 5-ga, siis vaadeldi juhtu, kus arvud on samas suhtes ehk 5, 4 ja 3. Sellisel juhul on põhimõtteliselt võimalik kõikvõimalikud kohtumised läbi vaadata. Aga see sisuliselt tähendab, et esialgses ülesandes vaadeldakse ainult juhtu, kus alati toimub 5 ühesugust kohtumist järjest, mis on väga kitsendav. Üldiselt ei tohi sarnases ülesandes lihtsalt ühise teguriga läbi jagada: kui kameeleonide arvud oleksid algul olnud näiteks 3, 6 ja 9, siis oleks nii a) kui ka b) saavutatavad, aga juhul 1, 2, 3 ei ole kumbki saavutatav.

Hindamisskeemid ja kontrollijate kommentaarid

1. *(Kaur Aare Saar)*

Žürii lahendusega 1 sarnaste mõttekäikude allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Näidatud, et $S_A = S_B$: 2 p
- Näidatud, et $S_1 = S_2$: 2 p
- Näidatud, et $S_B = 2S_1$: 2 p
- Viidud lahendus lõpuni: 1 p

Žürii lahendusega 2 sarnaste mõttekäikude allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Tõestatud, et kolme mediaani poolt tekitatud kuus kolmnurka on võrdpindsed: 4 p

  Sealhulgas:
  - Tõestatud, et mingile samale küljele toetuvad kaks kolmnurka on võrdpindsed: *2 p*
  - Tõestatud, et mingid kaks erinevatele külgedele toetuvat kolmnurka on võrdpindsed: *2 p*
- Näidatud, et iga laps saab tekkinud kuuest tükist täpselt kaks: 3 p

Ülesanne oli hästi lahendatud. Esines palju täislahendusi, enamus neist sarnased žürii lahendusega. Paljud õpilased olid konstrueerinud kolmanda mediaani ja jaotanud kolmnurga kuueks kolmnurgaks ning väitnud, et tekkinud 6 kolmnurka on võrdpindsed. See on küll tõene väide, aga vajab tõestamist, mistõttu lahendusi, kus see väide oli tõestamata, hinnati maksimaalselt 3 punktiga. Mõne üksiku kasuliku tähelepaneku eest, nt et mediaanid jaotavad üksteist suhtes $1 : 2$ või iga mediaan jaotab kolmnurga kaheks võrdpindseks kolmnurgaks, sai 1 punkti (juhul, kui skeemi ridadest punkte ei saadud).

2. *(Jaan Kristjan Kaasik)*

Lahenduse allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Osa a) täielik lahendus: 3 p
- Osa b) täielik lahendus: 4 p

Kui osas a) leiti ametlikus lahenduses esinevast kolmikust erinev korrektne vastus, anti samuti täispunktid. Osas b) tõid täispunktid ka mõne teise arvu järgi jääkide leidmine, kui tegu oli korrektse lahendusega (nt arv 8 sobib ka).

Lahenduse vastava osa eest sai 0 punkti, kui seal osas:

- oli põhjenduseta esitatud pakkumine, mis võiks olla õige vastus;
- liigitati arv 0 positiivseks ning selle põhjal konstrueeriti ka näide.

Arvu 0 ei loeta positiivseks. Kui teine kord tekib sarnaseid segadusi, siis täpselt sellel põhjusel on võimalik võistluse alguses küsimusi esitada.

Ülesande tüübist tulenevalt oli tulemus oodatav: lahenduseks tuli midagi kindlat tähele panna, misjärel oli lahenduse lõpuni viimine lihtne; kes tähelepaneku tegi, sai vastava osa eest täispunktid, kes mitte, jäi punktidest ilma.

3. *(Martin Rahe)*

Žürii lahendusega 1 sarnaste mõttekäikude allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Viidud võrrand kujule $b^4 = \pm(2d + b)^3$ (või midagi ilmselgelt samaväärset): 3 p

  Sealhulgas:

  - Viidud x ja y kujudele $x = ad$ ja $y = bd$, kus $d = \text{SÜT}(x, y)$: *1 p*
  - Jagatud võrrand suurusega d^4 ning järeldatud, et $a = \pm 1$: *1 p*
- Põhjendatud, et $b = z^3$ mingi täisarvu z korral: 2 p

  Sealhulgas:

  - Ilma ammendava põhjenduseta väidetud, et $b = z^3$ mingi täisarvu z korral: *1 p*
- Avaldatud suurus d suuruse z kaudu (õigete märkidega): 1 p
- Tuletatud õige kuju üldlahenditele: 1 p

  Sealhulgas:

  - Leitud mõned üksikud lahendid: *0 p*

Žürii lahendusega 2 sarnaste mõttekäikude allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Viidud võrrand kujule $\sqrt[3]{\frac{x}{y}} = \frac{y}{2x^2 + y}$ (või midagi ilmselgelt samaväärset): 1 p
- Järeldatud (koos põhjendusega), et $\sqrt[3]{\frac{y}{x}}$ on ratsionaalarv: 1 p
- Saadud seos $x = \frac{z^4 - z^3}{2}$ (või midagi ilmselgelt samaväärset): 2 p
- Näidatud, et z peab olema täisarv: 2 p

  Sealhulgas:

  - Viidud z kujule $z = \frac{a}{b}$, kus $\text{SÜT}(a, b) = 1$: *1 p*
- Tuletatud õige kuju üldlahenditele: 1 p

  Sealhulgas:

- Leitud mõned üksikud lahendid: *0 p*

4. *(Artur Avameri)*

Lahenduse allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Näidatud, et iga n korral $a_{2n} \geqslant 2n-1$ ja $a_{2n+1} \geqslant 2n-1$: 3 p
- Näidatud, et iga $n \geqslant 2$ korral $a_{2n} = a_{2n+1} = 2n-1$ sobib: 3 p
- Lõppvastus õigesti arvutatud: 1 p

Kui muud kasulikku töös ei esinenud, siis õige jada leidmise eest (ilma tõestuseta) anti 1 punkt ning seejärel korrektse vastuse leidmise eest veel 1 punkt.

Ülesanne osutus oodatust raskemaks ning täislahendusi esines vähe. Nende hulgas, kes ülesannet valesti lahendasid, oli peamiseks komistuskiviks olukord, kus leiti küll ülesande tingimusi rahuldav jada, kuid see ei osutunud minimaalseks võimalikuks. Samuti mõistsid mitmed lahendajat ülesannet valesti.

Siiski oli hea meel oli näha, et paljud osalejad leidsid õige jada (ning tegid seda läbi väikeste juhtude proovimise, mis on eduka lahendamise esimene samm) ja said selle leidmise eest osalisi punkte.

5. *(Karl Paul Parmakson)*

Lahenduse allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Lahendatud osa a): 3 p

  Sealhulgas žürii lahendusega 1 sarnase lähenemise puhul:
  - Tõestatud, et kolmnurk AGE on võrdhaarne: *1 p*
  - Tõestatud, et kolmnurgad GDP ja ABC on sarnased, või midagi analoogset: *1 p*
  - Tõestatud eelnevast lähtuvalt, et $CEPD$ on kõõlnelinurk: *1 p*

  Sealhulgas žürii lahendusega 2 sarnase lähenemise puhul:
  - Avaldatud lõigu BD pikkus lõigu GP pikkuse kaudu: *1 p*
  - Leitud punkti potentsist, et $CEPD$ on kõõlnelinurk: *2 p*

  Lahendatud osa b): 4 p

  Sealhulgas:
  - Avaldatud punkti potentsi abil lõigu BD pikkus lõigu GP pikkuse kaudu: *2 p*
  - Leitud lõigu GD pikkus Pythagorase teoreemist: *2 p*

Ülesande osa a) lahendati oluliselt rohkem kui osa b). Osa b) tulemuslikud lahendused lähtusid kõik punkti potentsist ning pikkuste arvutustest, sarnaselt lahendusele 2. Kohati põhjustas raskusi kõõlnelinurga definitsioon.

6. *(Oleg Košik)*

Lahenduse allpool märgitud osade eest antud punktid liideti.

- Osa a): 3 p

  Sealhulgas:

  - Idee vaadelda tahvlil olevate arvude summa või paaritute arvude arvu paarsust: *1 p*

- Osa b): 4 p

  Sealhulgas:

  - Õigesti leitud nelja sisaldavate arvude arv: *1 p*