Eesti koolinoorte 49. täppisteaduste olümpiaad

Füüsika lõppvoor. 7. aprill 2002. a. Keskkooli ülesannete lahendused

1. ülesanne

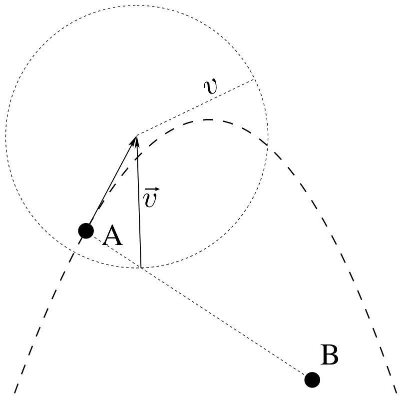
Kui kera kõrvalekaldenurk (poolkera keskpunkti suhtes) on ϕ, siis kera keskpunkti kõrgus on $2R\cos\phi$. Kera pöördenurk on 2ϕ, seepärast on masskeskme kõrgus keskpunkti suhtes $-a\cos 2\phi$ ning kõrgus maapinna suhtes

$$2R\cos\phi - a\cos 2\phi \approx 2R - a - \phi^2(R - 2a).$$

Väikeste nurkade puhul hakkab kõrgus kasvama (ja asend on stabiilne), kui $a > R/2$.

2. ülesanne

Vabalt langevas taustsüsteemis liiguvad vabalt langevad kehad sirgjooneliselt. Seepärast peab kahe keha suhteline kiirus olema kogu aeg suunatud ühelt kehalt teisele. Siit tuleneb ka konstruktsioon (vt. joon.).



3. ülesanne

Vaadelgem lampi ümbritsevat mõttelist sfääri, mille raadius on r. Valgusenergia jaguneb ühtlaselt üle sfääri sisepindala $4\pi r^2$ ning järelikult on pindalaühiku kohta tuleva valguse energia pöördvõrdeline kauguse ruuduga. Kauguselt a kaugusele L minnes väheneb lambi poolt valgustatud pinna heledus $(L/a)^2$ korda. Kui kaugusel a oli otsese päikesevalguse ja lambi heleduse suhe k, siis nüüd on see $k\,(L/a)^2$.

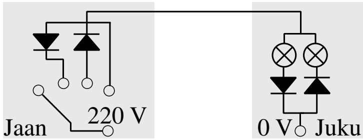
Peegel peab otsitaval kaugusel l valgustama sama heledalt, kui lamp kaugusel L, so. $k\,(L/a)^2$ korda nõrgemini, kui otsene päikesevalgus. Et peegel tekitab ühtlaselt valgustatud ringikujulise laigu nurkdiameetriga α, siis jaguneb peeglile langenud päikesevalgus pindala $\pi(l\alpha)^2/4$ peale laiali. Niisiis valgustab peegel $\pi(l\alpha)^2/4S$ korda nõrgemini, kui otsene päike. Seega

$$k\left(\frac{L}{a}\right)^2 = \frac{\pi(l\alpha)^2}{4S} \quad\Rightarrow\quad l = \frac{2L}{a\alpha}\sqrt{\frac{Sk}{\pi}} \approx 9\,\mathrm{km}.$$

<u>*Märkus*</u>: Peegli tekitatud laik on tõepoolest ühtlaselt valgustatud, sest läbi peegli on näha tükike päikest, päikese pind on aga kõikjal ühesuguse heledusega. Sisuliselt on tegemist päikese kujutisega *camera obscura*'s.

4. ülesanne

Lahendus baseerub kahel asjaolul: *(a)* mõlema maja null-faasi juhe on ühendatud läbi alajaama; *(b)* hõõglambi põlemiseks piisab, kui temast läheb vool läbi üle ühe poolperioodi (isegi kui ta jõuaks poolperioodi jooksul veidi jahtuda, sulaks see silma jaoks ühtlaseks põlemiseks). Küll aga põleb lamp nominaalheledusest märksa nõrgemini, sest ruutkeskmine pinge on 220 V asemel $220/\sqrt{2} \approx 156$ V.



5. ülesanne

(a) Alguses on kondensaatori pinge null, so. ta sisuliselt lühistab ampermeetri alumise klemmi lülitiga K. Vool poolis on null, so. ta katkestab ahela. Seega läheb kogu vool läbi kondensaatori ja takisti $4R$ ning ampermeeter näitab nulli.

(b) Olukord on vastupidine: pool lühistab, kondensaator katkestab ahela. Kogu vool läheb läbi pooli ja takisti R, ampermeeter näitab jälle nulli.

(c) Kondensaatori pinge on U (sest see ei jõua muutuda), vool läbi pooli on U/R (sest see ei jõua muutuda). Vool $C - R$ ahelas on U/R, ahelas $L - 4R$ samuti U/R. Ampermeeter näitab nende voolude vahet 0 A.

6. ülesanne

Reaalselt on kiirusvektori muudu moodul on piiratud maksimaalse kiirenduse ja ajavahemiku korrutisega, $|\Delta\vec{v}| \leq \mu g\tau$, mängus aga $|\Delta\vec{v}| \leq \sqrt{2}$ ruudu külge ühe käigu (so. $\tau = 1$ s) kohta. Vastaku ruudu küljele vahemaa a. Siis

$$\frac{\sqrt{2}\,a}{\tau} = \mu g\tau \quad \Rightarrow \quad a = \frac{\mu g\tau^2}{\sqrt{2}}\,.$$

Küsitav auto kiirus on $\sqrt{10}$ ruudu külge sekundis, so.

$$v = \sqrt{5}\,\mu g\tau \approx 13 \text{ m/s} \approx 47 \text{ km/h}.$$

7. ülesanne

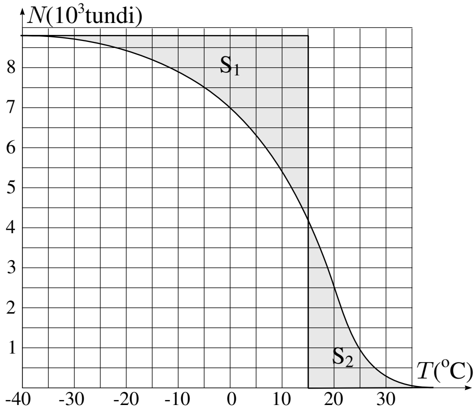
Jagame graafiku lühikesteks juppideks, olgu juppide otspunktidele vastavad temperatuurid T_i, kus $i = 1, 2, \ldots$. Kui jupid on piisavalt lühikesed, siis võib soojuskadude arvutamisel lugeda igale jupile vastava sise- ja välistemperatuuride vahe konstantseks. Jupile otspunktidega T_i ja T_{i+1} vastav soojuskadu on $\Delta Q_i = C(T_0 - T_i)\Delta N_i$, kus $\Delta N_i = N(T_i) - N(T_{i+1})$. Et $T_i \Delta N_i$ on vahemikus $N_{i+1} < N < N_i$ graafiku ja joone $T = T_0$ vaheline pindala, siis soojuskaod külmaperioodil on

$$Q_1 = C \sum_{T_i < T_0} T_i \Delta N_i = S_1 C,$$

kus S_1 pindala jooniselt. Analoogselt leiame soojaperioodil sissetungiva soojushulga $Q_2 = CS_2$. Elektrienergia kulu

$$A = \frac{Q_1}{\eta_s} + \frac{Q_2}{\eta_j} = C\left(\frac{S_1}{\eta_s} + \frac{S_2}{\eta_j}\right).$$

Jooniselt leiame $S_1 \approx 7{,}0 \cdot 10^4$ K·h, $S_2 \approx 3{,}0 \cdot 10^4$ K·h ning järelikult $A \approx 1{,}17 \cdot 10^4$ kW·h; korrutades tariifiga saame kuludeks 10800 kr.



8. ülesanne

Seadus $M_1M_2va = const$ tuleneb vahetult impulsimomendi jäävusest, kui asendada

$$a_1 = \frac{M_2}{M_1 + M2}, \quad a_2 = \frac{M_1}{M_1 + M2}, \quad v = v_1 + v_2.$$

Newtoni II seaduse saab kirja panna kujul

$$v_1^2 = a_1 \frac{GM_2}{a^2} = \frac{GM_2^2}{(M_1 + M_2)\, a}.$$

Kirjutades sümmeetrilise võrrandi, kus indeksid 1 ja 2 on vahetatud ning liites vasakute ja paremate poolte ruutjuured, saame

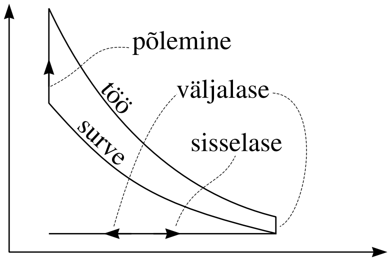
$$v\sqrt{a} = \sqrt{G(M_1 + M_2)} = const,$$

mis ongi tõestatav seadus. Niisiis $v^4a^2 = const$ ning $(M_1M_2va)^3 = const$. Jagades need kaks avaldist ja arvestades, et periood $T \propto a/v$, saame $T(M_1M_2)^3 = const$. Diferentseerides aja järgi ja avaldades $\dot{T}$, saame

$$\dot{T} = 3\mu T\left(\frac{1}{M_1} - \frac{1}{M_2}\right) = 10^{-6}.$$

9. ülesanne

(a) (vt. joon.)



(b) Olgu silindris ν mooli gaasi. Kui õhutemperatuur on T_0, siis surve lõpus on gaasi temperatuur $T_1 = T_0 k^{\gamma-1}$. Surumiseks tehtud töö leiame siseenergia muuduna,

$$A_1 = \nu c_V \,(T_1 - T_0) = \nu c_V T_1 \,(1 - k^{1-\gamma}).$$

Kui põlemisjärgne temperatuur on T_2, siis põlemisel vabanev energia

$$Q = (T_2 - T_1)\,\nu c_V.$$

Kui adiabaatilise paisumise lõpptemperatuur on T_3, siis $T_2 = T_3 k^{\gamma-1}$. Adiabaatilise paisumise ajal tehtud töö leiame jällegi siseenergia muuduna,

$$A_2 = \nu c_V \,(T_2 - T_3) = \nu c_V T_2 \,(1 - k^{1-\gamma}).$$

Summaarne kasulik töö on kahe töö vahe

$$A = A_2 - A_1 = \nu c_V \,(T_2 - T_1)(1 - k^{1-\gamma}) = Q(1 - k^{1-\gamma}).$$

Seega kasutegur

$$\eta = \frac{A}{Q} = 1 - k^{1-\gamma} \approx 0{,}60.$$

10. ülesanne

(a) Suunda C_2 ei lähe üldse valgust, sest kontaktpiirkonnas tekitatakse fiibris C samasuunaline laine, mis fiibris B-gi (selles veendumiseks võib meenutada Huygens'i printsiipi). Kõik, mis suunda A_2 minevast lainest üle jääb, peab minema suunda C_1, sest energia säilib. Tulemuseks on ülesande tekstis toodud graafiku peegelpilt (horisontaaltelje suhtes), mis puudutab alumise servaga joont $I = 0$ ja ülemisega — joont $I = I_0$.

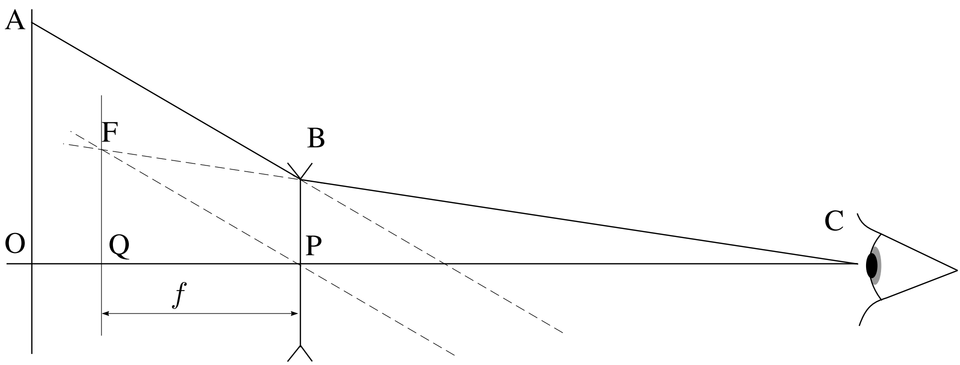
(b) Toodud lainepikkusel läheb kogu valgus I_0 fiibrisse C_1 ning see peab olema fiibris B ringlevast intensiivsusest α korda väiksem. Seega $I = \alpha I_0 = 100 I_0$.

(c) Valguse intensiivsus fiibris B on maksimaalne siis, kui fiibris ringlev valgus jõuab alumisse kontaktpiirkonda samas faasis, kui fiibrist A tulev valgus. Siis on ka fiibrisse C minev intensiivsus maksimaalne. Seega peab fiibrisse B mahtuma täisarv n lainepikkusi. Graafikult näeme, et kaks järjestikust resonantsi toimuvad lainepikkustel $\lambda_0 = 1660\,\mathrm{nm}$ ja $\lambda_1 = 1680\,\mathrm{nm}$. Niisiis $n\lambda_1' = (n+1)\lambda_0' = l$, kus l on otsitav pikkus ja teine resonantslainepikkus fiibris on $\lambda_1' = \lambda_0'\lambda_1/\lambda_0$. Sellest seosest leiame $n^{-1} = \lambda_1'/\lambda_0' - 1$ ning

$$l = \frac{\lambda_0'\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_0} = 84\,\mu\mathrm{m}.$$

E1. ülesanne

Tõmbame pliiatsiga paberile lõigu pikkusega l, näiteks $l = 20\,\mathrm{cm}$. Viime silma paberist kaugusele L, näiteks $L = 30\,\mathrm{cm}$. Viime läätse paberist sellise kaugusele a, et joonistatud lõik paistab läbi läätse täies pikkuses ulatudes servast servani. Teeme paberile sobivas mõõtkavas täpse joonise. Juuresoleval pildil $OA = l/2$, $PB = d/2$ (d on läätse diameeter), $OC = L$ ja $OP = a$. Konstrueerime punkti F fokaaltasandil nii, nagu näidatud joonisel. Mõõdame fookuskauguse f, optiline tugevus $D = 1/f$.



Võib ka avaldada analüütiliselt. Selleks paneme kirja sarnaste kolmnurkade sarnasustingimused:

$$\frac{CQ}{FQ} = \frac{CP}{PB}, \quad \frac{PQ}{FQ} = \frac{PO}{AO - PB}.$$

Jagades nende võrduste vasakud ja paremad pooled saame välja taandada pikkuse FQ. Saadud võrrandist on lihtne avaldada $D = 1/f$, kui arvestame, et

$$PQ = f, \quad CQ = f + L - a, \quad CP = L - a, \quad PO = a, \quad PB = d/2, \quad AO = l/2.$$

$$D = \frac{1}{a}\left(\frac{l}{d} - 1\right) - \frac{1}{L-a} \approx 8 \text{ dptr.}$$

E2. ülesanne

Niidi üks ots on juba seotud pliiatsi tagumise otsa külge, niidi teise otsa kinnitame statiivi külge. Niidi pikkuse l (statiivist pliiatsini) võtame sama pika kui pliiats ise. Laseme statiivi tasapisi allapoole: alguses puudutab pliiats klaasplaati otse kinnituspunkti all (edasise töö mugavuse huvides võime selle punkti ära märkida asetades klaasplaadi alla paberi ristikesega), edasi hakkab ta viltu kalduma. Lõpuks hakkab pliiats libisema: fikseerime selle asendi ning mõõdame kauguse plaadist statiivi kinnituspunktini h. Kirjutades välja jõumomentide tasakaalu niidi keskpunkti suhtes näeme, et toereaktsiooni ja hõõrdejõu resultant läheb läbi niidi keskpunkti. Seega on hõõrdetegur selle nurga tangens, mis jääb pliiatsi toetuspunktist tõmmatud vertikaali ja toetuspunkti ning niidi keskpunkti õhendava sirge vahele. Selle geomeetria ülesande lahendamisel leiame, et

$$\mu = \frac{1}{3}\sqrt{4\,\frac{l^2}{h^2} - 1}.$$

Aktsepteeritav on ka, kui valemi asemel tehakse sobivas mõõtkavas täpne joonis, mille pealt mõõdetakse otsitava nurga tangensi vahetuks arvutamiseks vajalikud vahemaad. Mõistlik tulemus on $\mu \approx 0{,}15$.

Alternatiivlahendused:

(a) Sama, mis eelmine, aga kinnituspunkti alla lastes lühendame ka niiti, nii et niit oleks kogu aeg horisontaalne (horisontaalsust võib kontrollida joonlaua abil). $\mu = l/(2L)$, kus L on pliaatsi pikkus.

(b) h võtame võrdseks pliiatsi pikkusega L ning pikendame niiti libisemiseni.

$$\mu = \frac{l}{\sqrt{4L^2 - l^2}}.$$