Eesti koolinoorte 53. füüsikaolümpiaad

4. märts 2006. a. Lõppvoor. Gümnaasiumi lahendused

1. MÕÕTERIISTAD

Olgu alguses pinge ampermeetril U_A ja pinge voltmeetril U_V. Jadaühenduse korral kehtib

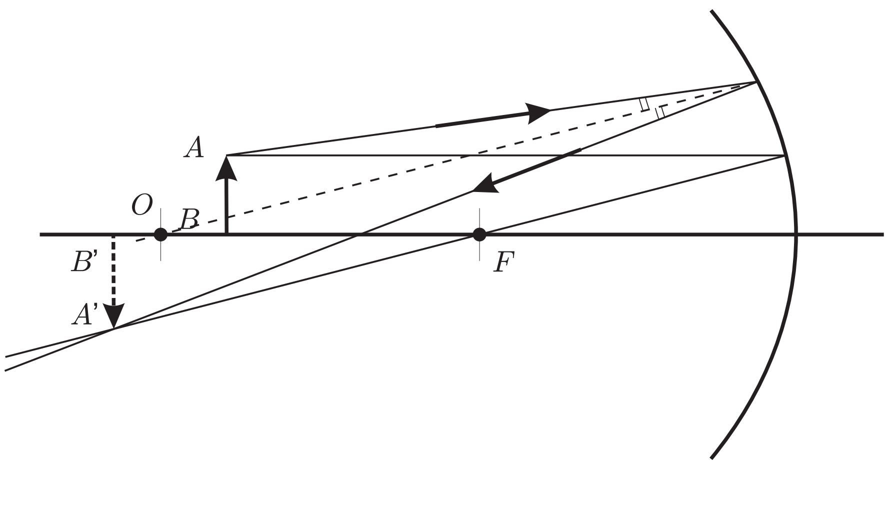
$$U_A + U_V = 9.$$

Peale takisti lisamist suurenes ampermeetri näit 2 korda, seega teda läbiv voolutugevys suurene 2 korda, järelikult ka pinge ampermeetril suurenes kaks korda ja oli $2U_A$. Pinge voltmeetril aga vähenes kaks korda ja oli $0{,}5U_V$. Et voltmeeter ja takisti olid ühendatud rööbiti, siis kogupinge nelles vooluringi osas on samuti $0{,}5U_V$ ning kogu vooluringi jaoks saame

$$2U_A + 0{,}5U_V = 9.$$

Lahendades kahest võrrandist koosneva võrrandisüsteemi, saame $U_A = 3$ V ja $U_V = 6$ V. Seega alguses oli pinge voltmeetril 6 V, lõpus aga kaks korda väiksem ehk 3 V.

2. NÕGUSPEEGEL



3. KADA

Olgu v kiirus, mille saavutab kivi lasu järel. Selle kiiruse horisontaalsuunaline komponent on $v_x = v\cos\alpha$ ja vertikaalsuunaline komponent vastavalt $v_y = v\cos\alpha$. Kivi lennuaeg on siis

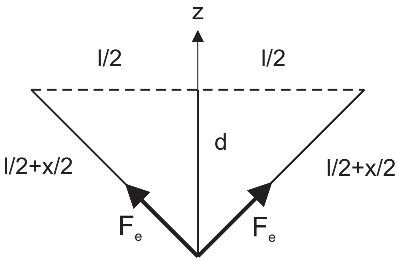
$$t = 2\frac{v_y}{g} = 2\frac{v\cos\alpha}{g}$$

ja lennukaugus

$$L = v_x t = \frac{2v^2\sin\alpha\cos\alpha}{g} = \frac{v^2\sin 2\alpha}{g}.$$

Siit

$$v^2 = \frac{gL}{\sin 2\alpha}.$$



Kivi saavutab algkiiruse tänu kumminööri elastsele energiale. Olgu nööri pikenemine võrreldes algolekuga x, siis

$$\frac{kx^2}{2} = \frac{mv^2}{2},$$

kust

$$x^2 = \frac{mv^2}{k} \quad \Rightarrow \quad x = \sqrt{\frac{mgL}{k\sin 2\alpha}} = 1{,}7 \text{ cm}.$$

Täisnurkses kolmnurgas on nüüd hüpotenuus $l/2+x/2$. Otsitav kaugus, millele tuleb nööri tõmmata, on seega

$$d = \sqrt{(l/2+x/2)^2 - (l/2)^2} = 7{,}2 \text{ cm}.$$

Kumminööris tekib elsastsusjõud $F_e = kx$. Jõud, millega tuleb nööri tõmmata, võrdub selle jõu kahekordse projektsiooniga teljele z:

$$F = 2kx\frac{d}{l/2+x/2} \approx 400 \text{ N}.$$

4. VEEPÜSTOL

Kuna me ei arvesta dissipatiivseid effekte, siis peab kehtima mehaanilise energia jäävus. Liikugu kolb jõu F toimel kiirusega v_1 ja olgu vee kiirus suudmes v_2. Kuna vee koguruumala ei muutu, siis $v_1 S_1 = v_2 S_2$. Ajavahemiku t vältel läbib kolb vahemaa $x = v_1 t$ tehes tööd $A = Fx$. Vaatame, milline on sellele liikumisele vastav vee summaarne kineetilise energia muut. Ühelt poolt kolvi eest "kaob ära" veehulk $m = S_1 x \rho$, mille kiirus oli v_1, teiselt poolt ilmub suudmesse sama kogus vett liikudes kiirusega v_2. Energia jäävus annab

$$A + \frac{mv_1^2}{2} = \frac{mv_2^2}{2}$$

ehk peale asendamist ja v_1 elimineerimist

$$\frac{F}{S_1} + \frac{\rho v_2^2}{2}\frac{S_2^2}{S_1^2} = \frac{\rho v_2^2}{2}.$$

Aga $d_2 \ll d_1$ ja $S \propto d^2$, seega ammugi $S_2^2 \ll S_1^2$ ning teise liikme vasakul pool võrdusmärki võib ära jätta. Avaldame v_2:

$$v_2 = \frac{1}{d_1}\sqrt{\frac{8F}{\pi\rho}} \approx 22{,}6\,\mathrm{m/s}.$$

Ülesande oleks saanud lahendada ka kiiremat teed pidi lähtudes Bernoulli seadusest

$$p + \frac{\rho v^2}{2} = \mathrm{Const},$$

mille me lahendamise käigus sisuliselt tuletasime.

5. KUU

Olgu valgustatus (valgusenergia pinna- ja ajaühku kohta = valgusvoog pinnaühiku kohta; kui valgustatav pind on risti valguse langemise suunaga, siis on see sama, mis valgusvoo tihedus) päeval I_1 ja öösel I_2. Kuna säriaeg ja valgustatus on pöördvõrdelised, siis kehtib seos:

$$t_1/t_2 = I_2/I_1.$$

Öösel valgustab Maad Kuult peegeldunud valgus. Kuna eeldati, et Kuu ja Maa on Päikesest võrdsel kaugusel, siis on valgustatus Kuul ka I_1. Kui Kuu pind oleks Maad ja Kuud (ning ühtlasi Päikest) ühendava teljega risti, siis oleks Kuu poolt tagasi (Maa poole) suunatud valgusvoo tihedus $I_k = kI_1$, kus k on Kuu pinna keskmine peegeldustegur (albeedo). Kuu näiv keskpunkt seda ka on, aga servad mitte. Ometigi, visuaalne kogemus ütkeb, et Kuu ketas näib kõikjal enam-vähem ühe-heledune.

Selliseid valgusallikaid, mille pinna näiv heledus ei sõltu vaatamisnurgast nimetatakse koosinuskiirgajateks. Märkigem, et see heledus ei sõltu ka vaatlemiskaugusest, sest vaatlejani jõudev valgusvoog väheneb pöördvõrdeliselt valgusallika kaugusega, kuid seda teeb ka valgusallika näiv pindala (korrektsemalt: ruuminurk). Suur osa vagusallikaid ongi enam-vähem koosinuskiirgajad (nt absoluutselt mustad soojuskiirgavad kehad), sh Päikese pind. Tõesti, Päike näeb välja nagu ühtlase heledusega ketas. Kuu puhul on teoreetiliselt asi veidi keerulisem, sest servades on Kuu pinnaühikule langev valgusvoog väiksem (pind on päikesekiirte suhtes kaldu): kui Kuu pind hajutaks peale langenud valgust kõigis suundades enam-vähem ühepalju ja oleks koosinuskiirgaja (iga mõttelise pinnatüki näiv heledus oleks sõltumatu vaatlemissuunast), siis peaksid servad olema vähem heledad. Ometigi tõendab praktiline kogemus vastupidist. Ilmselt on asi selles, et Kuu pinna ebatasasuste tõttu hajutab Kuu päikesevalguse langemissuunda rohkem valgust, kui teistes suundades.

Olgu selle täpse mehanismiga kuidas on, lähtugem praktilisest kogemusest, et täiskuu näib ühtlaselt heleda kettana. Niisiis, asendagem mõtteliselt Kuu kui kera Kuu kui “pannkoogiga”, st kettaga, mille raadius on võrdne Kuu raadiusega. Edasi kasutagem asjaolu, et ka Päike näib ühtlase heledusega kettana. Päikese- ja Kuu valguse poolt tekitatud valgustatuse suhe I_1/I_2 on seega võrdne Päikese ja Kuu näivate heleduste suhte (st pinnaühiku poolt kiiratud valgusvoo tiheduste suhtega I_p/I_k) ning näivate ruuminurkade suhte Ω_p/Ω_k korrutisega. Edasi paneme tähele, et $I_p/I_1 = (R_p/r_p)^2$ (sest päikesevalguse voo tihedus on pöördvõrdeline kauguse ruuduga); niisiis

$$I_k/I_p = k(r_p/R_p)^2.$$

Edasi on lihtne leida, et

$$\Omega_k/\Omega_p = (r/R)^2/(r_p/R_p)^2,$$

mistõttu

$$I_1/I_2 = (\Omega_k/\Omega_p) \cdot (I_k/I_p) = k(r/R)^2.$$

Siit saame avaldada

$$k = (I_1/I_2) \cdot (R/r)^2 = (t_2/I_1) \cdot (R/r)^2 \approx 4\%.$$

Märkigem, et Kuu keskmiseks albeedoks loetakse 7%. Erinevused meie tulemuse ja täpse arvu vahel võivad olla põhjustatud meie mudelist (Kuu näiv heledus on konstantne üle kogu pinna, öisel ajal oli Kuu kõrgus horisondist sama, mis päeval Päikesel). Juhul, kui tegemist oli filmile pildistamisega, siis tuleb arvestada ka nn Schwarzschild efektiga: pikkade säriaegade puhul (alates mõnest sekundist) pole filmi säritus enam võrdeline säriajaga, vaid sama tulemuse saamiseks tuleb säriaega mõnevõrra (mõnikord isegi mitmeid kordi) pikendada.

Lõpetuseks, kuivõrd küsitud oli hinnangut, siis täispunktid antakse iga enamvähem füüsikaliselt mõistliku mudeli eest, ja vastuse eest orienteerivas vahemikus 2%–8%.

6. LENDAV ELEKTRONKAHUR

Olgu elektroni laengu absoluutväärtus e ja mass m_e. Ajaga t lahkub katoodilt hulk elektrone kogulaengu absoluutväärtusega $q = It$. Elektronide arv, mis selle ajaga lendu läheb, on siis $N = \frac{q}{e} = \frac{It}{e}$ ja mass $m = Nm_e = \frac{Itm_e}{e}$. Leiame ka, kui kiiresti need elektronid liiguvad. Üks elektron saab elektronkahuris kineetilise energia $E = Ue$. Samas $E = \frac{m_e v^2}{2}$, seega $v = \sqrt{\frac{2E}{m_e}} = \sqrt{\frac{2Ue}{m_e}}$. Ajaga t lendu läinud elektronide koguimpulss $p = mv = \frac{Itm_e}{e}\sqrt{\frac{2Ue}{m_e}} = It\sqrt{2U\frac{m_e}{e}}$. Et elektronkahur muudab aja t jooksul elektronide impulssi p võrra, siis mõjub temale keskmiselt jõud $F = \frac{p}{t} = I\sqrt{2U\frac{m_e}{e}} = \underline{\underline{I\sqrt{\frac{2U}{k}}}}$. Tõstmaks masinat õhku, peab see F ületama masinale (koos Tatikaga) mõjuva raskusjõu $m_T g$, st. $F \geq m_T g$ ehk $I\sqrt{U} \geq m_T g\sqrt{\frac{k}{2}} \approx \underline{\underline{4{,}3 \cdot 10^8\ \mathrm{A} \cdot \sqrt{\mathrm{V}}}}$. Ilmselt peavad I ja U olema ebarealistlikult suured (televiisori puhul $I\sqrt{U} \approx 0{,}017\ \mathrm{A} \cdot \sqrt{\mathrm{V}}$), seega pole Tatikal lootustki sellise masinaga lennata.

Märkus. Erirelatiivsusteooriat arvestades sama arutluskäiku läbi tehes saaksime, et täpsem valem on $F = I\sqrt{\frac{2U}{k} + \frac{U^2}{c^2}}$, kus $c \approx 3{,}0 \cdot 10^8$ m/s on valguse kiirus vaakumis. Seega võime relativistlikud efektid arvestamata jätta vaid siis, kui $\frac{U^2}{c^2} \ll \frac{2U}{k}$ ehk $U \ll \frac{2c^2}{k} \approx 1{,}0 \cdot 10^6$ V. Arvestades vajalikku $I\sqrt{U}$ suurusjärku, peab Tatikas niisiis kardetavasti ka relatiivsusteooriat uurima… Lendu tõusta ei suudaks ta aga sellegipoolest.

7. TUBA

Temperatuuri kasvu või langemise kiirus on võrdeline summarse soojusliku võimsusega, mis tuppa sisse või välja läheb. Sellele vastab graafiku puutuja tõus. Ajahetkeni $t = 1000$ min läheb soojus toast välja, peale seda lisandub kaotatavale võimsusele tuulepuhuja võimsus. Tuulepuhuja võimsusele vastab puutuja tõusu muut mingil temperatuuril. Näiteks hetke $t = 1000$ min jaoks saame, et puutuja tõusu muut on (ligikaudu) $8/1000 + 10{,}2/400 \approx 0{,}036$ °C/min. Graafiku abil leiame nüüd temperatuuri, mille korral soojuskadude võimsus võrdub tuulepuhuja võimsusega. Graafiku esimeses osas on puutuja tõus $0{,}036$ °C/min ligikaudu temperatuuri $T = 20$ °C korral. Seega toatemperatuur pika aja möödumisel on $T = 20$ °C.

8. SOOJUSKIIRGUS

a) Tähistame $j_{\mathrm{s}\to\mathrm{v}}$ abil soojusvoogu pindalaühiku kohta, mis on suunatud siseseinalt välisseina poole. Vastassuunalist soojusvoogu tähistame $j_{\mathrm{v}\to\mathrm{s}}$. $j_{\mathrm{s}\to\mathrm{v}}$ on tingitud siseseina kiirgusest ja $j_{\mathrm{v}\to\mathrm{s}}$ osalisest peegeldumisest. Analoogiliselt, $j_{\mathrm{v}\to\mathrm{s}}$ on tingitud välisseina kiirgusest ja $j_{\mathrm{s}\to\mathrm{v}}$ osalisest peegeldumisest. Seega siis

$$j_{\mathrm{s}\to\mathrm{v}} = \varepsilon\sigma T_{\mathrm{s}}^4 + (1-\varepsilon) j_{\mathrm{v}\to\mathrm{s}},$$

$$j_{\mathrm{v}\to\mathrm{s}} = \varepsilon\sigma T_{\mathrm{v}}^4 + (1-\varepsilon) j_{\mathrm{s}\to\mathrm{v}},$$

millest

$$j_{\mathrm{s}\to\mathrm{v}} = \sigma\frac{T_{\mathrm{s}}^4 + (1-\varepsilon)T_{\mathrm{v}}^4}{2-\varepsilon}, \quad j_{\mathrm{v}\to\mathrm{s}} = \sigma\frac{T_{\mathrm{v}}^4 + (1-\varepsilon)T_{\mathrm{s}}^4}{2-\varepsilon}.$$

Summaarne soojusvoog on

$$j = j_{\mathrm{v}\to\mathrm{s}} - j_{\mathrm{s}\to\mathrm{v}} = \varepsilon\sigma\frac{T_{\mathrm{v}}^4 - T_{\mathrm{s}}^4}{2-\varepsilon} \approx 0{,}0022\,\mathrm{W/cm^2}.$$

b) Eelmise punkti vastusest selgub, et kahe seina vahel toimuv soojusvoog on võrdeline vahega $T_2^4 - T_1^4$. Seega on siin täielik analoogia elektriahelate teooriaga, kui T^4 tõlgendada pingena, soojusvoogu voolutugevusena ning $(2-\varepsilon)/(\sigma\varepsilon)$ takistusena. Viimane ei sõltu seinte vahekaugusest. Paigutades sise- ja välisseina vahele N ekraani, on tegemist $N+1$ ühesuguse takisti järjestikühendusega. Järelikult soojusvoog kahaneb $N+1$ korda.

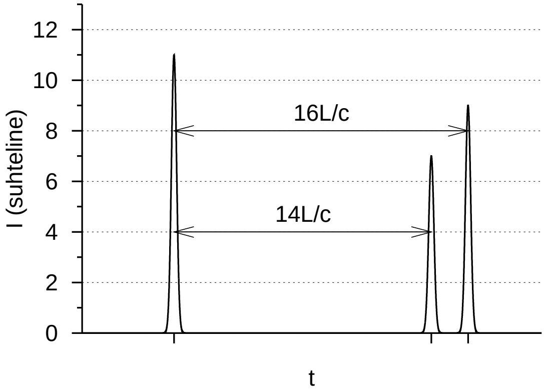
9. SÄHVATUS

Alustuseks paneme tähele suurepärast seost arvandmetes. Nimelt ühtivad peeglite fookused, sest peeglite vahemaa on võrdne peeglite fookuskauguste summaga. Nõguspeegli fookuskaugus on teatavasti pool raadiusest. Paralleelne kiirtekimp koondub peegli fookuses. Seepärast jääb paralleelne kiirtekimp antud süsteemis pärast kahekordset peegeldumist ikkagi paralleelseks. Kuid paneme tähele, et kiire laius väheneb kaks korda, sest ühe läätse fookuskaugus on kaks korda suurem teise omast.

Valguskiir jääb niisiis peeglite vahele pendeldama seniks, kuni tema kaugus teljest on väiksem kui $d_0 = 1$. Pärast n-kordset edasi-tagasi peegeldumist väheneb kiire kaugus teljest 2^n korda. Paneme tähele, et 128 on kahe aste ($2^7 = 128$). Seepärast väljub peeglile langenud kiir pilust kahes järgus: esimene osa pärast seitsmendat edasi-tagasi liikumist ning teine osa pärast kaheksandat. Üks edasi-tagasi liikumine peeglite vahel tekitab ajalise viivise $2L/c$.

Kumerläätsele langev paralleelne kiirtekimp koondub fookuses, kusjuures fookuseni jõudmise aeg ei sõltu kiire asukohast (teljelähedased kiired läbivad paksema klaasikihi kui kaugemad kiired, klaasi läbib valgus aga aeglasemalt). Niisiis on fookuses oodata kolme impulssi: peegli ümbert tulnud osa, pärast seitset edasi-tagasi peegeldumist tulnud osa ning pärast kaheksat. Nende impulsside ajaline vahe on vastavalt $14L/c$ ja $2L/c$.

Nüüd tuleb veel leida impulsside suhtelised intensiivsused, mis on võrdsed vastavate rõngaste pindaladega esialgse kiire ristlõikes. Esimese peegli läbimõõdust väiksem osa ei läbigi süsteemi. Kõige välimise rõnga pindala on võrdeline arvuga $192^2 - 160^2$, järgmisele impulsile vastav rõnga pindala $128^2 - 96^2$ ning viimasele impulsile vastava rõnga korral $160^2 - 128^2$. Need arvud suhtuvad kui: $32^2(6^2 - 5^2) : 32^2(4^2 - 3^2) : 32^2(5^2 - 4^2) = 11 : 7 : 9$.



10. KUULID

Teisest ja kolmandast kuulist koosnevale süsteemile mõjus sel aja, kui esimest kuuli lükati, esimese varda sihiline jõud, st šarniirne ühenduspunkt nihkus esimese varda sihiliselt ning teine ja kolmas kuul omandasid sümmeetria tõttu ühesugused kiirused. Šarniirse ühenduspunkti kiirus on $v_s = v_0 \cos 30°$, sest esimese varda pikkus ei muutu. Et nii teisele kui kolmandale kuulile mõjub ainult varda sihiline jõud, siis nende kiirus on ka varda sihiline; varda venimatusest johtuvalt $v_2 = v_3 = v_s \cos 60° = v_0\sqrt{3}/4$.

Pinged varrastes on võrdsed, sest šarniirne ühenduspunkti massi võime lugeda nulliks (talle mõjuv resultantjõud peab olema 0), tähistame selle sümboliga T. Seega on kõigi kuulikeste kiirendused võrdsed, $a_k = T/m$. Läheme šarniirne ühenduspunktiga seotud kulgevalt liikuvasse taustsüsteemi, mis liigub kiirendusega $\vec{a}$. Selles süsteemis on esimese kuuli kiirus $u_1 = v_0/2$ ning teiste kiirus $u = v_s \sin 60° = \frac{3}{4}v_0$. Selles süsteemis liiguvad kuulid ringjoont mööda. Iga kuuli jaoks saame välja kirjutada jõudude tasakaalu tingimuse projekteerituna vastava varda sihile (siis kaob vajadus teada kuulikese ringliikumise tangetsiaalkiirendust, sest see on teljega risti). Teise ja kolmanda kuuli tasakaalutingimusi võrreldes selgub, et inetrsijõu $-m\vec{a}$ projektsioon kummalegi teljele peab olema üks ja sama, st $\vec{a}$ peab olema esimese varda sihiline. Seega saame kaks võrrandit:

$$mu_1^2/l + a = T,$$
$$mu^2/l - a/2 = T.$$

Elimineerides neist võrrandeist a saame $T = \frac{1}{3}\frac{m}{l}(u_1^2 + 2u^2)$ ning otsitava kiirenduse $a_k = T/m = (u_1^2 + 2u^2)3l = \frac{11}{24}v_0^2/l$.

EXP 2. LAMP

Liiguta tuld kiiresti käes edasi tagasi. Püsivalt põleva tule asemel näete punkte. Katsu lugeda punktide hulk ja jätkata võngutamist samas rütmis ning mõõta siis ära võnke periood. Lambi vilkumise sagedus = võngutamise sagedus × punktide hulk.

Märkus. Täpne lambi vilkumise sagedus on $f = 142$ Hz.