Eesti koolinoorte 57. füüsikaolümpiaad

Lõppvoor. 6. märts 2010. a.

Gümnaasiumi ülesannete lahendused

1. (*SILD*)

Tähistame $l = 100\,\mathrm{m}$, $h = 5\,\mathrm{m}$, $m = 1000\,\mathrm{kg}$. Olgu silla kõverusraadius r. Pythagorase teoreemist

$$r^2 = (l/2)^2 + (r - h)^2 \implies 0 = l^2/4 - 2rh + h^2.$$

Kuna $h \ll l$ ja seega $h \ll r$, siis h^2 võib ära jätta ja $r = l^2/8h = 250\,\mathrm{m}$. Auto raskusjõu mg ja toereaktsiooni N resultant annab kesktõmbekiirenduse v^2/r. Seega $N = mg - mv^2/r \approx 8700\,\mathrm{N}$.

Kontakt rataste ja maapinna vahel hakkab kaduma kui $N = 0$. Seega $v = \sqrt{gr} \approx 180\,\mathrm{km/h}$.

2. (*DESTILLAATOR*)

Kahe liitri vee mass on $m = 2\,\mathrm{kg}$. Kondenseerudes eraldub soojushulk $Q = Lm$. 95% eraldunud soojushulgast laheb jahutusvee soojendamiseks. Seosest $\eta Lm = cM\Delta T$ saame jahutusvee massi

$$M = \frac{\eta Lm}{c\Delta T}.$$

Jahutusvee massi saame avaldada tiheduse ja ruumala kaudu ning ruumala omakorda toru ristlõikepindala, voolu kiiruse ja aja kaudu:

$$M = \rho V = \rho Sl = \rho Svt.$$

Viies kokku need kaks võrrandit, saame avaldada kiiruse:

$$v = \frac{\eta Lm}{c\Delta T \rho St} \approx 0{,}12\,\mathrm{m/s}.$$

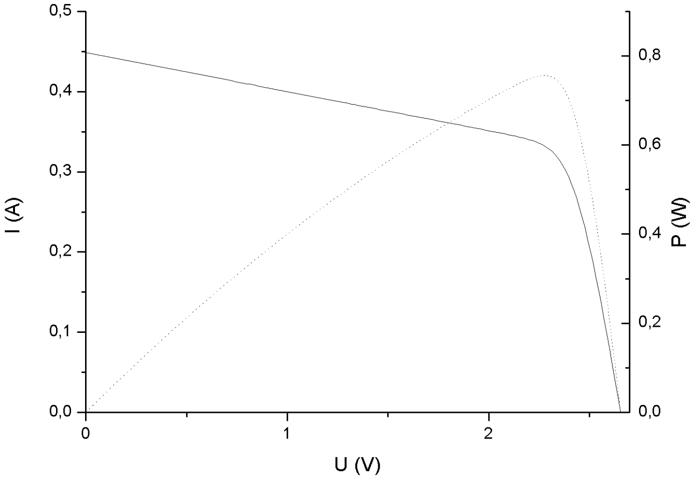
3. (*PÄIKESEPANEEL*)

Esimene lahendus

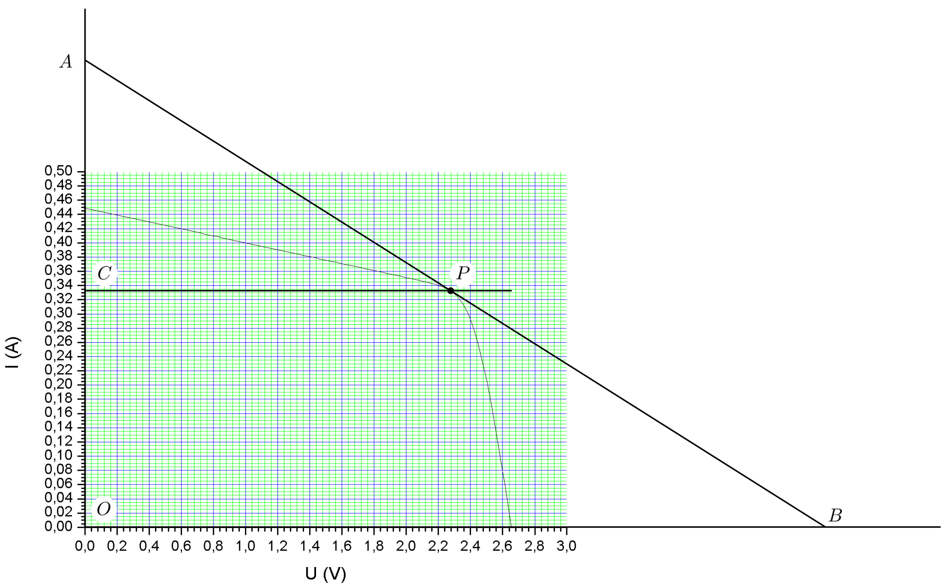
Tuleb leida graafikult voolutugevuse ja potentsiaalide vahe paarid. Tarbijal eralduv võimsus on nende korrutis. Edasi leiame graafikult maksimaalsele võimsusele vastav punkt ($U_{\max}$,$I_{\max}$). Tarbijal eralduv võimsus on maksimaalne, kui sellel on pingelang võrdne võimsuse maksimumi potentsiaalide vahega ja voolutugevus on sama.

$$R = \frac{U_{\max}}{I_{\max}}$$

Sellel meetodil saab graafikule vastava päikesepaneeli jaoks optimaalseks tarbija takistuseks ligikaudu 6,9 oomi (pinge $\sim 2{,}28$ V ja vooltugevus $\sim 0{,}33$ A).



Teine lahendus



Võimsus $N = UI$ on maksimaalne, kui võimsuse muut ΔN on väikese pinge muutuse ΔU korral null.

$$\begin{aligned}\Delta(U\,I(U)) &= (U+\Delta U)\,I(U+\Delta U) - U\,I(U) = \\ &= (U+\Delta U)(I(U)+\Delta I(U)) - U\,I(U) \overset{\Delta I\,\Delta U\approx 0}{\approx} \Delta U\,I + U\,\Delta I.\end{aligned}$$

(Sama mõttekäik viib korrutise tuletise valemini, mida siinkohal võinuksime ka kohe rakendada.) $\Delta N = 0 \implies I + U\frac{\Delta I}{\Delta U}$. $\frac{\Delta I}{\Delta U}$ läheneb väikese ΔU korral graafiku puutuja tõusule. Võttes nii I, U kui ka $\frac{\Delta I}{\Delta U}$ puutepunktis P, saame joonise tähistustes, et $|OC| = I$, $|CP| = U$ ja $\frac{|OA|}{|OB|} = \frac{|CA|}{|CP|} = -\frac{\Delta I}{\Delta U}$. Järelikult, kui me tahame, et P oleks otsitav võimsuse maksimumi punkt, peab kehtima $|OC| - |CP|\frac{|CA|}{|CP|} = 0 \implies |OC| = |CA| \implies |AP| = |PB|$. Joonlauaga veidi otsides pole sellist punkti P raske leida. Vastus on muidugi sama mis esimeses lahenduses.

4. (*HAMMASRATTAD*)

Esimene lahendus

Kasutame virtuaalse nihke meetodit: oletame, et nöör pole siiski päris venimatu ning saame esimest ratast pöörata väikese nurga α võrra. Hõõre puudub, mistõttu salvestub kogu välise jõumomendi töö nööri elastsusjõu potentsiaalseks energiaks. Välisjõumomendi töö on $M\alpha$ (kui jõumomenti avaldab üks jõud õlaga $\tilde{o}$ ja suurusega $M/\tilde{o}$, siis nihkub ta rakenduspunkt $\alpha\tilde{o}$ võrra ja töö on $\alpha\tilde{o}M/\tilde{o} = M\alpha$). Väikesel nihkel ei jõua T oluliselt muutuda, seega peab nööri venitamise töö olema Ts, kus s on nööri pikenemine. Hambumusse jäävate hammasrataste pinnapunktide läbitavad teepikkused on võrdsed — mõlemal αr_1, järelikult $s = 2\alpha r_1$ ja $M\alpha = 2\alpha r_1 T$, kust $T = \frac{M}{2r_1}$.

Teine lahendus

Ratastele mõjuvad jõud ja jõumomendid on tasakaalus. Lihtsaim on kirjutada jõumomentide tasakaalud rataste tsentrite suhtes, kuna siis on võllide poolt avaldatava tundmatute jõudude õlad nullid. (Muidu saame lahenduse, kui avaldame need jõud jõudude tasakaaluvõrranditest.) Rattad mõjutavad teineteist puutujasihilise jõuga; kui teine ratas avaldab esimesele jõudu $\vec{F}$, siis avaldab Newtoni III seaduse järgi esimene teisele $-\vec{F}$. Jõumomentide tasakaal esimesele rattale on nii $M = (F+T)r_1$ ning teisele $T = F$, sestap $T = \frac{M}{2r_1}$.

5. (*TORU*)

Prussi võnkumine torul on stabiilne, kui prussi kõrvalekallutamisel väikese nurga α võrra prussi masskese tõuseb kõrgemale, kui alguses $R + L/2$. Masskeskme kõrgus kõrvalekallutamisel (joonis) on

$$\left(R + \frac{L}{2}\right)\cos\alpha + R\alpha\sin\alpha > R + \frac{L}{2}$$

Kuna kõrvalekalde nurk on väike, siis võime arvestada, et $\sin\alpha \approx \alpha$ ja $\cos\alpha \approx 1-\alpha^2/2$. Võnkumised on väikeste kõrvalekallete korral stabiilsed, kui

$$L < 2R.$$

6. (*ÕHUHOKI*)

Olukorras, kus aluse temperatuur on maksimaalne, on rõhk seibi all võrdne süsihappegaasi aururõhuga. Seibi surutakse alla jõuga F ja kuna seibi pindala on πr^2, peab surumist tasakaalustav rõhk olema $P = \frac{F}{\pi r^2}$. Õhurõhk seibi mõlemal poolel tasakaalustab üksteist, seega ei pea seda seibile mõjuva summaarse jõu seisukohast arvestama. Kuiv jää aga hakkab sublimeeruma alles hetkel, kui aururõhk ületab ümbritsevat rõhku. Seetõttu on otsitavaks minimaalseks aururõhuks summaarne rõhk seibi all tasakaaluolekus

$$P + P_0 = P_0 + \frac{F}{\pi r^2} = 131{,}8 \text{ kPa}.$$

Sellele vastab graafiku põhjal temperatuur ~ 212 K.

7. (*SATELLIIDID*)

Lähtume analoogiast molekulaarfüüsikaga, kus ühe molekuli vaba tee hindamisel arvestatakse, et molekul liigub ilma põrgeteta tüüpiliselt aja jooksul, mil tema kokkupõrkeristlõige on katnud ruumala, milles asub tüüpiliselt üks osake (see ruumala avaldub kui anuma ruumala jagatud osakeste arvuga). Kokkupõrke-ristlõige pole päris identne osakese enda ristlõikega – vaatleme näiteks kera-kujulisi osakesi raadiusega r, osakesed põrkuvad kui nende tsentrid satuvad teineteisest kaugusele $2r$, niisiis on ühe osakese kokkupõrke-ristlõige neli korda suurem tema ristlõikest.

Satelliidid liiguvad ruumiosas ruumalaga

$$V = \frac{4\pi}{3}\left[(R_{Maa}+h_2)^3 - (R_{Maa}+h_1)^3\right] \approx 1.2\cdot 10^{12}\text{km}^3.$$

Liikumisruum ühe satelliidi kohta on seega V/N (niisuguse ruumalaga suvaliselt valitud ruumiosast leiame tüüpiliselt ühe satelliidi).

Aja t jooksul katab ühe satelliidi kokkupõrke-ristlõige ruumala

$$V_t = 4Svt,$$

kus v on tüüpiline satelliidi liikumise kiirus. Me ei tee suurt viga, võttes v väärtuseks esimese kosmilise kiiruse (kiirus sõltub raadiuse ruutjuurest ning suhteline viga oleks ainult $\sqrt{\frac{6400+2000}{6400}} \approx 1.15$):

$$\frac{v^2}{R_{Maa}} = \frac{GM}{R^2_{\text{Maa}}} = g.$$

Niisiis:

$$V_t = \sqrt{gR_{Maa}}4St.$$

Eelneva arutluse kohaselt arvestame, et ühel satelliidil tuleb kokkupõrget oodata niisugune ajavahemik t, et $V_t = V/N$. Et meil on aga N satelliiti, siis esimese niisuguse kokkupõrkeni kulub N korda vähem aega. Niisiis:

$$\Delta t = \frac{V}{N^2 4S\sqrt{gR_{\text{Maa}}}} = \frac{1.2\cdot 10^{12}\cdot 10^9}{4\cdot 2.5^2\cdot 10^6\cdot 10\cdot \sqrt{10\cdot 64\cdot 10^2\cdot 10^3}} s = 6\cdot 10^8\,\text{s}$$

ehk

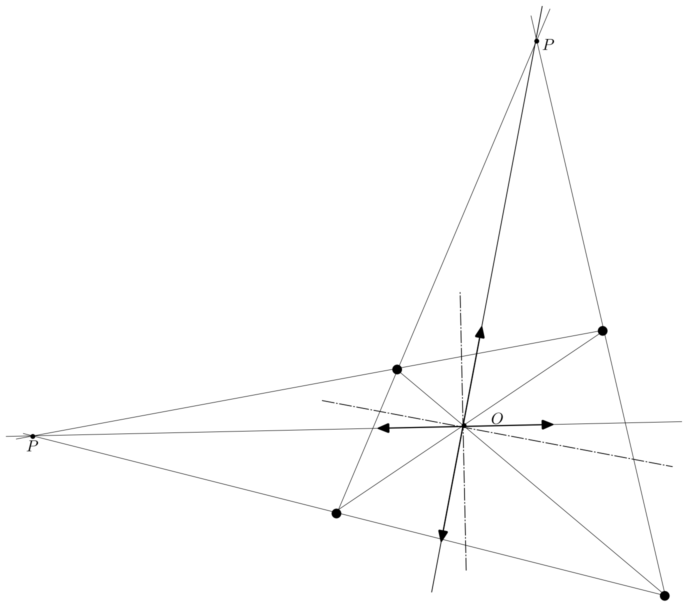
$$\Delta t = \frac{6\cdot 10^8}{3600\cdot 24\cdot 365} \approx 19\,\text{aastat}.$$

8. (*JÕULUKAUNISTUS*)

Maksimaalne pinge, milleni kondensaator laadub, võrdub võrgupinge amplituudväärtusega 311 V. Sellest takistile langeb pinge $311\,\text{V} - 50\times 3\,\text{V} = 161\,\text{V}$. Seega takistuse väärtus peab olema $161\,\text{V}/20\,\text{mA} \approx 8\,\text{k}\Omega$ ja sellel eraldub võimsus $161\,\text{V}\times 20\,\text{mA} \approx 3{,}2\,\text{W}$. Peale pinge amplituudväärtuse saavutamist peab kondensaator olema suuteline vahelduvvoolu ühe perioodi (20 ms) jooksul valgusdioodide ahelat toitma nii, et pingelang takistil (ja seega ka kondensaatoril endal) kukub mitte rohkem kui $0{,}05\times 161\,\text{V} = 8\,\text{V}$ võrra. Samas kondensaatorilt võetakse sama aja jooksul elektrilaeng $20\,\text{mA}\times 20\,\text{ms} = 0{,}0004\,\text{C}$. Seega nõutav mahtuvus on $0{,}0004\,\text{C}/8\,\text{V} = 50\,\mu\text{F}$.

9. (*PUNKTALLIKAD*)

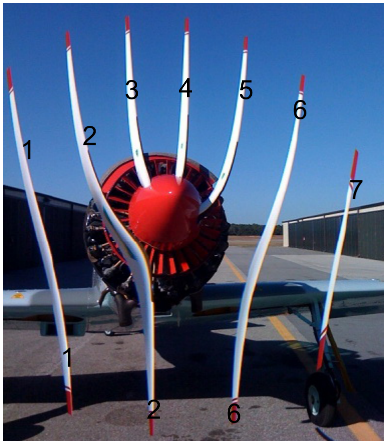
Allikat ja kujutist ühendav sirge läheb läbi läätse keskpunkti ning see punkt peab jääma allika ja kujutise vahele, sest kujutis on tõeline. Seetõttu saame läätse keskpunkti O leida kui lõikude S_1S_1' ning S_2S_2' lõikepunkti, kus S_1 ja S_2 on allikad ning S_1' ja S_2' on vastavad kujutised. Et lõikepunkt tekiks, peavad S_1 ja S_1' paiknema diagonaalselt. Edasi paneme tähele, et sirge kujutis on sirge, kusjuures need kaks sirget lõikuvad läätse tasandis. Et sirge S_1S_2 kujutis on $S_1'S_2'$, siis nende lõikepunkt P võimaldab meil leida juba läätse tasandi OP; optiline peatelg on punktist O tõmmatud ristsirge Läätse tasandi seisukohast pole oluline, kumb sirgetest (S_1S_2 või $S_1'S_2'$) on kujutis ja kumb originaal. Seetõttu tekib meil kaks oluliselt erinevat võimalust: kas need kaks sirged paiknevad ligikaudu horisontaalselt või ligikaudu vertikaalselt, vt joonist.



10. (*PROPELLER*)

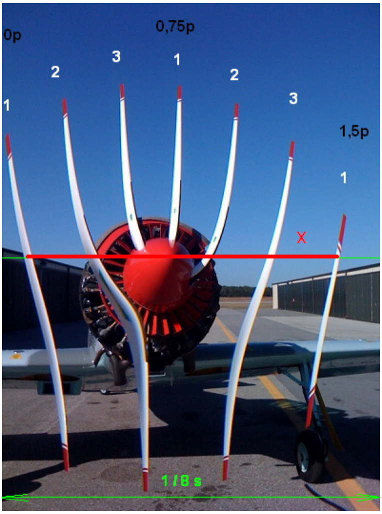
a) Propeller pöörleb vastupäeva, sest pildi ülaosas liiguvad labad vastu parajasti salvestatavale pikseliveerule ja seetõttu paiknevad seal labade kujutised tihedamalt.

b) Vasakpoolsesl joonisel on ülalt alla tõmmatud üks veerg millel on korraga peal maksimaalset 2 laba. Kui labasid oleks 2, peaks veerus paistma korraga vaid üks laba. Labad ise on kantud joonisele mustaga. Näha on, et labade vaheline nurk on suurem kui 90 kraadi ja seega propeller on 3-labaline.



<u>*Alternatiivne lahendus.*</u> Tähistame labade tekitatud jooned numbritega 1 kuni 7 nii nagu näidatud parempoolsel joonisel. Joonise alumises servas eelneb joon 2 joonele 6. See tähendab, et joonele 2 vastav laba peab eelnema joonele 6 vastavale labale. Joonise ülemise serva põhjal võime analoogselt väita, et joonele 5 vastav laba peab eelnema joonele 6 vastavale labale. Järelikult peavad jooned 5 ja 2 vastama samale labale. Ülemises servas jääb joonte 5 ja 2 vahele veel 2 joont, st sellele labale vastavad jooned korduvad perioodiga 3 joont. See periood peab olema propelleri labade arvu n kordne. Et 3 on algarv, siis ainus variant on $n = 3$.

c) Iga kolmas triip pildil kujutab sama propellerilaba. Järgneval joonisel on valgega nummerdatud labad; propelleri telje kõrgusel on tõmmatud joon mille kogupikkus moodustus pildistamise aja jooksul ehk kogupikkus on 1/8 s. Punasega on märgitud aeg millega laba number üks jõudis liikuda 1,5 pööret. (joonisel mustaga) Punase osa pikkus moodustab ligikaudu 4/5 pildi kogulaiusest. Seetõttu moodustab ka nende punktide ajaline intervall 4/5 pildi tegemise koguajast. Selle aja jooksul teeb propeller poolteist pööret. Ühes sekundis teeb propeller $1{,}5/(1/8 \cdot 4/5) = 15$ pööret ja ühes minutis $15 \cdot 60 = 900$ pööret.



E1. (*TRAAT*)

Ühe lambi ühendame järjestikku tuntud takistiga ning teise lambi — takistustraadiga. Takististustraadi puhul ühendame statsionaarselt vaid ühe kontakti traadi otspunktis; teise kontakti ühendame käsitsi, hoides juhet käega vastu takistustraati mingis punktis, mille asukohta saab piki traati libistades muuta. Mõlemad ahelad ühendame patarei klemmidele. Saavutame olukorra, kus mõlemad lambid põlevad ühe heledusega ning mõõdame selles asendis kontaktide vahele jääva takistustraadi osa pikkuse L. Sellises asendis on vastava takistustraadi osa takistus võrdne teise takisti takistusega, st $R = \rho 4L/\pi d^2$, millest $\rho = \pi R d^2/4L$.

Arvuliseks vastuseks saame $\rho = 1{,}35 \cdot 10^{-6}\ \Omega \cdot \mathrm{m}$.

Suhtelise mõõtevea leiame seosest $\Delta\rho = 2\Delta d/d + \Delta L/L$, kus nihiku viga $\Delta d \approx 0{,}05\,\mathrm{mm}$ ning pikkuse L vea leiame mitme mõõtmistulemuse (silmaga heleduse hindamisest johtuva) hajuvuse põhjal, $\Delta L \approx 3\,\mathrm{cm}$.

E2. (*VENTILAATOR*)

Riputame lauakese niidi abil ühest otsast kinnitades statiivi külge ning suuname ventilaatorist tuleva õhuvoo laua alumise osa vastu. Mõõdame õhuvoolust tingitud laua alumise otsa kõrvalekalde a. Ajaühikus laua alumisele otsale langeva õhu mass $m/t = \pi d^2 \rho v/4$ (kus d on ventilaatori diameeter) ning see õhumass kannab impulssi $mv/t = \pi d^2 \rho v^2/4$, mis antakse üle lauale ja kujutab endast efektiivset jõudu. Selle jõu moment tasakaalustab raskusjõu momendi $Mga/2$, st $\pi L d^2 \rho v^2/4 = Mga/2$, millest $v = \sqrt{2Mga/\pi\rho L}/d$.

Tulemuseks saame $v = 3{,}8\,\mathrm{m/s}$.