# Eesti koolinoorte 58. füüsikaolümpiaad

*9. aprill 2011. a. Lõppvoor. Gümnaasiumi ülesannete lahendused*

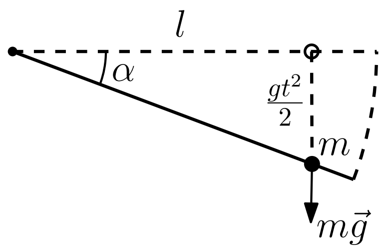
**1.** (*VESI*)

Energia jäävusest saame, et väikese koguse vee aurustumiseks kuluv soojushulk tuleb järelejäänud vee temperatuuri langemise arvelt.

Kuigi aurustumise alghetkel tekib veeaur temperatuuriga 100 °C, on hiljem nii vee kui tekkiva veeauru temperatuur veidi madalam. Uuel temperatuuril aga ei ole enam väikese koguse vee aurustumiseks kuluv soojushulk otseselt arvutatav vee aurustumissoojusest temperatuuril 100 °C (ülesandes antud $L$).

Seega teeme lihtsustuse, et vee aurustumissoojus on selles temperatuurivahemikus kogu aeg $L$. Olgu esialgselt termoses oleva vee mass $m$. Saame $0{,}01mL = 0{,}99mc_v\Delta t$, mis annab vastuseks $\Delta t = \frac{1}{99}\frac{L}{c_v} = 5{,}4$ °C.

**2.** (*VARRAS*)




Kuna varras on kaalutu ja rõngas libiseb hõõrdeta, on rõngas lihtsalt vabas languses: varda olemasolu ei mõjuta üldse rõnga käitumist. Seega nurga $\alpha$ jaoks saame kirja panna (vt. joonist) $\tan\alpha = \frac{gt^2}{2l}$.

**3.** (*TORMITUUL*)

Tuule poolt avaldatav horistonaalsuunaline jõud $F$ peab olema niisugune, et selle poolt tekitatud jõumoment $Fb/2$ ületab raskusjõu poolt tekitatud jõumomendi $Mga/2$. Jõumomentide võrdsuse korral $F = Mga/b$. Et niisgune jõud autot libisema ei paneks, peab hõõrdejõud $F_h = \mu Mg$ selle tasakaalustama, millest saame nõutud tingimuseks: $\mu > a/b = 2/3$.

**4.** (*VEETORU*)

Bernoulli seadusest saame seose $\frac{\rho v_1^2}{2}+p_1=\frac{\rho v_2^2}{2}+p_2$. Rõhu torudes leiame veesamba kõrguse järgi, $p_1=p_0+\rho g h_1$ ja $p_2=p_0+\rho g h_2$, kus $p_0$ on atmosfäärirõhk. Asendades $p_1$ ja $p_2$ esimeses seoses, saame vee kiiruse teises torus, $v_2=\sqrt{v_1^2+2g(h_1-h_2)}$. Et torud on ühendatud, peab läbi nende voolama sama aja jooksul sama kogus vett, $v_1S_1=v_2S_2$. Et toru ristlõikepindala on $S=\pi d^2/4$, saame $v_1d_1^2=v_2d_2^2$.

Kokku

$$\frac{d_1}{d_2}=\sqrt{\frac{v_2}{v_1}}=\left(1+\frac{2g(h_1-h_2)}{v_1^2}\right)^{1/4}.$$

**5.** (*SOLENOID*)

Väljatugevus solenoidi sees on $B=\mu_0 nI$, kus $n$ on solenoidi traadi keerete arv pikkusühiku kohta, $I$ seda läbiv vool ja $\mu_0$ vaakumi magnetiline läbitavus. Väli on suunatud pikki solenoidi telge. Kui selle välja suunaga on risti mingisugunegi kiirus $v$, siis ühe pöörde tegemiseks kulub aeg $T=2\pi m/eB$, kus $m$ ja $e$ on vastavalt elektroni mass ja laeng. Olgu elektronil ka solenoidi telje sihiline kiirus $V$. Ühikulises ajas läbib ta distantsi $1/V$. Selle aja sees teeb ta $1/(VT)$ pööret. Nende pöörete arv ülesande püstituse kohaselt peab olema $n$. Seega

$$n=\frac{1}{VT}=\frac{eB}{2V\pi m}=\frac{e\mu_0 nI}{2V\pi m}.$$

Siit saame $V=e\mu_0 I/(2\pi m)$.

*Märkus.* Kui telje sihiline komponent kiirusel on üheselt määratud, siis teljega risti olev kiiruse komponent võib olla suvaline nullist suurem.

**6.** (*FOTOGRAAF*)

Olgu pilu laius $d$, katiku kiirus $u$ ja piisa kujutise kiirus sensori tasandis $v$. Katiku taustsüsteemis liigub piisa kujutis kiirusega $u\pm v$; kui fotoaparaat on päripidi, siis tuleb võtta märk "+" ja kui tagurpidi, siis "-". Seega on piisa jälje tekkimise aeg $d/|u\pm v|$ ning jälje pikkus $l=vd/|u\pm v|$. Olgu $u\geq v$; siis

$$l_1=\frac{vd}{u+v},\quad l_2=\frac{vd}{u-v}.$$

Jagades teise võrrandi esimesega saaame $\frac{u+v}{u-v}=\frac{l_2}{l_1}=\frac{5}{3}$, millest $3u+3v=5u-5v$ ja $u=4v$. Kui fotoaparaat on portreeasendis, siis viibib piisa kujutis pilus ajavahemiku $d/u$ jooksul ja jälje pikkus on seega

$$l_3=vd/u.$$

Esimese võrrandiga läbi jagades leiame, et $l_3/l_1=1+\frac{v}{u}=\frac{5}{4}$ ning

$$l_3=\frac{5}{4}l_1=150\text{ pikselit.}$$

Kui $u < v$, siis muutub ainult teine võrrand,

$$l_2 = \frac{vd}{v - u},$$

mistõttu $3u + 3v = 5v - 5u$ ja $u = v/4$, mistõttu

$$l_3 = 5l_1 = 600 \text{ pikselit.}$$

*Märkus.* Ülesande teksti põhjal on see üks kahest võimalikust vastusest; reaalselt, arvestades tüüpilist katiku liikumiskiirust (18 mm läbimisaeg $\frac{1}{125}$ s $\Rightarrow u = 2{,}25\,\mathrm{m/s} \Rightarrow v = 4u = 9\,\mathrm{m/s}$) on siiski üsna raske saavutada, et $v = 4u$: pildistamine peaks toimuma ohtlikult lähedalt. Kui joa kõrgus oleks nt 100 m, siis vaba-langenud piisa kiirus oleks ca $44\,\mathrm{m/s}$, mistõttu pildistamiskauguse ja objektiivi fookuskauguse suhe (st suurendustegur) tuleks $44/9 \approx 5$ ning isegi teleobjektiivi (nt $f = 300\,\mathrm{mm}$) korral peaks fotograaf olema joast vaid 1,5 m kaugusel.

*Märkus 2.* Eeldusest, et "pilu laius on $d$" võib jääda mulje, justkui eeldanuks me vaikimisi, et senor ei jõua säritamise ajal täielikult avaneda. Ometigi kehtib lahendus ka siis, kui säriaeg on nii pikk, et sensor jõuab täielikult avaneda: piltlikult võib ette kujutada, et ikkagi mõlemad kardinad liiguvad samaaegselt, kuid pilu laius on suurem sensori kõrgusest, st esimene kardin jõuab sensori kohalt eemale minna enne teise kardina saabumist.

## 7. (*RÕNGAS*)

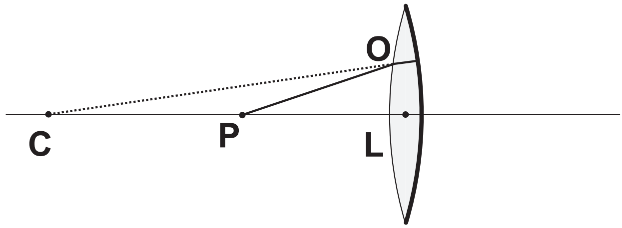
Olgu rõnga keskpunkt $O$ ja massikese $M$ ning võlli ja rõnga puutepunkt $P$. Vaadeldes jõumomentide tasakaalu punkti $P$ suhtes näeme, et raskusjõud peab andma sarnaselt kõigi teiste jõududega null-momendi, st lõik $PM$ peab olema vertikaalne. Toereaktsiooni $\vec{N}$ ja hõõrdejõu $\vec{F_h}$ resultant peab kompenseerima raskusjõu ja olema samuti vertikaalne. Pinnanormaali ja nimetatud resultantjõu vaheline nurk ei saa olla suurem kui $\arctan\mu$, vastasel korral algaks libisemine. Et pinnormaaliks on sirge $OP$, siis

$$\angle OPM \leq \arctan\mu.$$

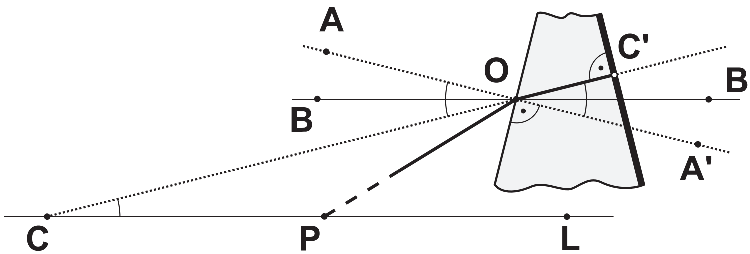
Rõnga pöörlemise käigus $|OP| = R$ ja $|OM| = R/2$; seega moodustub kolmurk $OPM$ lõikudest pikkusega $R$ ja $R/2$ ning järelikult on tipu $P$ juures olev nurk maksimaalne, kui tipu $M$ juures on täisnurk. Sel juhul

$$\mu = \tan\angle OPM = |MO|/|MP| = \frac{R}{2}\Big/\sqrt{R^2 - \frac{1}{4}R^2} = 1/\sqrt{3} \approx 0{,}58.$$

**8.** (*OPTILINE SÜSTEEM*)




Iga süsteemile langev valguskiir murdub läätse eesmisel pinnal, peegeldub tagumisel pinnal ja murdub uuesti. Lahenduse lihtsustamiseks vaatleme olukorda, kus kiirte käik on sümmeetriline. Sel juhul langeb murdunud kiir peegelpinnale risti, peegeldub otse tagasi ja teine murdumine on esimesega identne. Süsteemi sisenev ja sealt väljuv kiir lõikavad optilist peatelge ühes ja samas punktis $P$. Seal asuva punktobjekti kujutis langeb kokku objekti endaga.



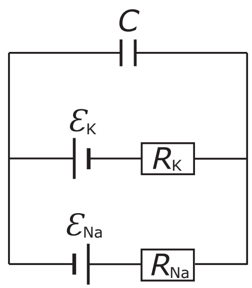

Võtame vaatluse alla teljelähedase kiire $PO$, mille korral võime nurga $\angle LPO$ lugeda väikeseks. Lõik $OC'$ on optilise peateljega veelgi väiksema nurga all ja punktide $O$ ning $C'$ kaugus optilisest peateljest on ligikaudu võrdne. Uurime lähemalt läätse õhukest kihti, mille kõrgus on palju väiksem kõverusraadiusest $r$. Sel juhul võime kõverpinnad asendada nende puutujatega. Pindade ristsirged on joonisel tähistatud punktiirjoonega ning need lõikavad optilist peatelge läätse kõverustsentrites. Optiline kõrvaltelg $BB'$ on paralleelne optilise peateljega ning $\angle LCO = \angle B'OC' = \angle A'OB' = \angle BOC = \angle AOB \equiv \phi$ ja murdumisnurk $\angle A'OC' = 2\phi$. Langemisnurgaks on $\angle AOP$. Murdumisseaduse rakendamisel kasutame väikese nurga lähendust $\frac{\sin(\angle AOP)}{\sin(\angle A'OC')} = n \approx \frac{\angle AOP}{\angle A'OC'}$, millest $\angle AOP = n\angle A'OC' = 2n\phi$. Järgmisteks arvutusteks on vaja teada nurka $\angle LPO = \angle BOP = \angle AOP - \angle AOB = 2n\phi - \phi = (2n-1)\phi$. Kuna lääts on õhuke ja punkt $O$ ei ole kaugel optilisest peateljest, siis $|CO| \approx |CL|$ ja $|PO| \approx |PL|$ ning $|CL| = r - \frac{d}{2} \approx r$, kus $d$ on läätse paksus keskkohas. Jällegi väikese nurga lähendust kasutades saame $|LO| = \angle LCO|CL| = \angle LPO|PL|$, millest $|PL| = \frac{\angle LCO}{\angle LPO}|CL| = \frac{\phi}{(2n-1)\phi}r = \frac{r}{2n-1}$. Viimaks rakendame läätse valemit $\frac{1}{a} + \frac{1}{k} = \frac{1}{f}$ ja seost $|PL| = a = k = \frac{r}{2n-1}$ ning saame, et $f = \frac{|PL|}{2} = \frac{r}{2(2n-1)}$.

*Alternatiivlahendus.* Valguskiire käiku võime lahutada kolmeks osaks: murdumine kaksikkumeras läätses, peegeldumine nõguspeeglilt ning taaskord kaksikkumeras läätses murdumine. Teatavasti võrdub süsteemi optiline tugevus üksikosade optiliste tugevuste summaga. Kaksikkumera läätse optiline tugevus on läätsevalmistaja valemi põhjal $D_1 = (n-1)\frac{2}{r}$. Nõguspeegli kõvesruraadiusega $r$ fookuskaugus on $\frac{r}{2}$ ning optiline tugevus seega $D_2 = \frac{2}{r}$. Kokku saame

$$D = 2D_1 + D_2 = \frac{2(2n-1)}{r} \quad \Rightarrow \quad f = \frac{1}{D} = \frac{r}{2(2n-1)}.$$

## 9. (*NÄRVIRAKK*)

Kuna laengud saavad voolata üle membraani kolme eri teed mööda ja kondensaatorile kogunev laeng põhjustab kõigile kolmele teele ühiselt mõjuva elektrostaatilise pinge $U$, siis on meil närviraku mudeldamiseks sobiv skeem, kus meil on rööbiti kolm vooluteed: kondensaatori voolutee, kaaliumi voolutee ja naatriumi voolutee.




Kui saabub tasakaal, ei lähe voolu läbi kondensaatori. Selleks peab kaaliumi ja naatriumi voolu summa olema elektriliselt neutraalne. Kaaliumi vool on $(\mathcal{E}_\mathrm{K} - U)/R_\mathrm{K}$. Naatriumi vool on $(\mathcal{E}_\mathrm{Na} - U)/R_\mathrm{Na}$. Võrrutades nende voolude summa nulliga saame pinge avaldiseks

$$U = \frac{R_\mathrm{K}\mathcal{E}_\mathrm{Na} + R_\mathrm{Na}\mathcal{E}_\mathrm{K}}{R_\mathrm{Na} + R_\mathrm{K}}.$$

Membraani kogulaeng on siis

$$q = CU = C\frac{R_\mathrm{K}\mathcal{E}_\mathrm{Na} + R_\mathrm{Na}\mathcal{E}_\mathrm{K}}{R_\mathrm{Na} + R_\mathrm{K}}.$$

**10.** (*TUNGRAUD*)

***a)*** Olgu $a$ tungraua vertikaalne ja $b$ horisontaalne diagonaal; Pythagorase teoreemi põhjal $a^2 + b^2 = \text{Const}$, millest diferentseerides saame

$$2a\Delta a + 2b\Delta b = 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta a = \frac{-b\Delta b}{a} = -\cot\alpha\Delta b.$$

Siinjuures $\Delta a$ ja $\Delta b$ on tungraua kõrguse ja laiuse väikesed muutused. Vändaga ühe täispöörde tegemisel $\Delta b = -3\,\text{mm}$. Võrrutades tehtud töö $2\pi l F_k$ (kus $l$ on vända pikkus) potentsiaalse energia muuduga $F\Delta a$, saame

$$F_k = -\frac{F\cot\alpha\Delta b}{2\pi l} \approx 24\,\text{N}.$$

*Alternatiivlahendus.* Kui vändale rakendatakse pöördemomenti $M$, siis keerates seda väikese nurga $\Delta\phi$ võrra tehakse tööd $M\Delta\phi$. Kuivõrd hõõrdumine puudub, siis see töö peab olema sama mis $F\Delta H$, kus $\Delta H$ on tungraua kõrguse muutus. Niisiis

$$M = F\frac{dH}{d\phi} = F \times \frac{dH}{d\alpha} \times \frac{d\alpha}{dL} \times \frac{dL}{d\phi},$$

kus $L$ on tungraua äärmiste šarniirsete kinnituste vahekaugus. Ilmselt $H = 2a\sin\alpha$, kus $a = 17\,\text{cm}$. Seega $dH/d\alpha = 2a\cos\alpha$. Teiselt poolt, $L = 2a\cos\alpha$, millest $dL/d\alpha = -2a\sin\alpha$. Vända üks täispööre tingib $L$ muutuse kruvikeerme sammu $h$ võrra: $\Delta L = -(\Delta\phi/2\pi)h$. Kokkuvõttes

$$M = F \times (2a\cos\alpha) \times \frac{1}{-2a\sin\alpha} \times \frac{-h}{2\pi} = \frac{Fh\cot\alpha}{2\pi}.$$

Tähistades vända õla pikkuse $l$, saame avaldada otsitava jõu:

$$F_k = \frac{M}{l} = \frac{Fh\cot\alpha}{2\pi l} \approx 24\,\text{N}.$$

***b)*** Kui hõõrdumist ei ole, siis läheb vändast pööramisel tehtav töö puhtalt auto potentsiaalse energia kasvatamiseks. Kui hõõrdumine on olemas tekstis kirjeldatud määral, siis vastupidises suunas pööramisel ei ole jõudu peaaegu vaja rakendada (tungraud püsib libisemise piiri peal) ja seega on potentsiaalse energia muut oma moodulilt võrdne hõõrdejõudude tööga. Kui vändata päripidi (auto kergitamiseks), siis hõõrdejõu töö ei muutu (võrreldes sama nurga võrra vastupidi pööramisega) ja on seetõttu endiselt võrdne potentsiaalse energia muuduga. Niisiis tuleb võrreldes hõõrdevaba pööramisega sooritada kaks korda suuremat tööd, st rakendatav jõud peab olema täpselt kaks korda suurem, kui (a)-osas. Seega $F_1 = 2F = 48$ N.

**E1.** (*SÜSTAL*)

Tõmbame süstla vett täis, suuname selle üles ja tühjendame surudes ühtlaselt, nii et veejuga kerkib kogu aeg enam-vähem samale kõrgusele. Mõõdame joonlaua abil veejoa kõrguse $h$ ja stopperiga süstla tühjenemiseks kuluva aja. Statiivi saab kasutada joonlaua vertikaalsena hoidmiseks. Energia jäävusest veejoa jaoks saame veejoa kiiruseks süstlast väljumisel $v = \sqrt{2gh}$; veekulu $V = \frac{\pi}{4}d^2vt = \frac{\pi}{4}d^2t\sqrt{2gh}$. Siit saame avaldada süstla sisediameetri

$$d = \sqrt{\frac{4}{\pi}\frac{V}{t}}(2gh)^{-1/4}.$$

Mõõtmistulemuste $t = (54 \pm 1)$ s ja $h = (12 \pm 2)$ cm ning väärtuse $V = 10\,\mathrm{ml}$ põhjal saame $d \approx 0{,}36\,\mathrm{mm}$.

*Märkus.* Tulemuse mõõtemääramatust on võimalik leida seosest

$$\frac{\Delta d}{d} = \frac{\Delta t}{2t} + \frac{\Delta h}{4h} + \frac{\Delta V}{2V} \approx 0{,}08,$$

kus ruumala $V$ määramatuseks on võetud $\Delta V = 0{,}5$ ml. Seega $d = (0{,}36 \pm 0{,}03)$ mm. Nii et vaatamata suhteliselt ebatäpsetele üksikmõõtmistele ei tule suhteline viga kokkuvõttes eriti suur.

**E2.** (*MUST KAST*)

Mõõdame pinge $U_{13}$ kontaktide 1 ja 3 vahel; et voltmeeter on ideaalne, siis takistis $R_1$ puudub vool ja järelikult ka pinge, mistõttu

$$\mathcal{E} = U_{13}.$$

Mõõdame voolu $I_{13}$ kontaktide 1 ja 3 vahel; et takistile $R_1$ rakendub patarei kogupinge (ampermeetri takistus on tühine), siis

$$R_1 = \mathcal{E}/I_{13}.$$

Mõõdame voolu $I_{23}$ kontaktide 2 ja 3 vahel; et ampermeetri takistus on tühiselt väike, siis kogu vool läbib ampermeetrit (vältides takistit $R_3$) ja patarei kogupinge rakendub takistile $R_2$, seega

$$R_2 = \mathcal{E}/I_{23}.$$

Mõõdame pinged $U_{12}$ ja $U_{23}$, vastavalt kontaktide 1 ja 2 ning 2 ja 3 vahel; et sama vool läbib takisteid $R_2$ ja $R_3$, siis jaguneb patarei pinge neil võrdeliselt takistuste väärtustega. Arvestades, et $U_{12}$ annab pinge takistil $R_2$ (takistil $R_1$ vool ja pinge puuduvad), saame $U_{12}/U_{23} = R_2/R_3$, millest

$$R_3 = R_2U_{23}/U_{12}.$$