Eesti koolinoorte 63. füüsikaolümpiaad

9. aprill 2016. a. Lõppvoor.
Gümnaasiumi *ülesannete lahendused*

1. (*SOOJUSVAHETI*) (*6 p.*) Nafta jahtumisel eraldunud soojus läheb vee soojendamiseks - $Q_{nafta} = Q_{vesi}$

$$m_n c_n \Delta t_n = m_v c_v \Delta t_v \quad \Rightarrow$$

$$\rho_n V_n c \Delta t_n = \rho_v V_v \Delta t_v \quad \Rightarrow \quad \Delta t_v = \frac{\rho_n V_n c \Delta t_n}{\rho_v V_v} \approx 64\,^\circ\mathrm{C}$$

Seega väljub vesi soojusvahetist temperatuuriga $T = 64\,^\circ\mathrm{C} + 10\,^\circ\mathrm{C} = 74\,^\circ\mathrm{C}$.

2. (*PIDURDUS*) (*6 p.*) Olgu auto mass m ning pidurdusjõud F. Auto kineetiline energia kulub pidurdusjõu ületamiseks ning potentsiaalse energia muuduks. Ülesmäge sõites $\frac{mv^2}{2} = Fs_1 + mg\Delta h_1$. Kõrguse muut ning auto poolt läbitud teepikkus on omavahel seotud avaldisega $\Delta h_1 = ks_1$, seega $\frac{mv^2}{2} = (F + mgk)\, s_1$. Allamäge sõites kehtib analoogiliselt $\frac{mv^2}{2} = (F - mgk)\, s_2$. Vasakute poolte võrdsusest järeldub paremate poolte võrdsus $(F + mgk)\, s_1 = (F - mgk)\, s_2$ ehk $F = \frac{s_2+s_1}{s_2-s_1} mgk$. Kiiruse jaoks saame energia jäävusest avaldised $v = \sqrt{2gks_1\left(\frac{s_2+s_1}{s_2-s_1} + 1\right)}$ või $v = \sqrt{2gks_2\left(\frac{s_2+s_1}{s_2-s_1} - 1\right)}$. Mõlemad saab ümber kirjutada kujule $v = \sqrt{4gk\frac{s_1 s_2}{s_2-s_1}} = 14\,\mathrm{m/s} = 50{,}4\,\mathrm{km/h}$.

3. (*KAHURIKUUL*) (*8 p.*) Lähtume sellest, et kehtima peab energia jäävuse seadus. Kui laskmise hetkel on kuuli kiirus v, siis on alghetkel energia $E_1 = mv^2/2 - GMm/R$, kus M on Maa mass ja m kuuli mass. Kõige kõrgemal olles on kuuli vertikaalne kiirus 0, seega energia avaldub kui $E_2 = -GMm/(R + h)$, kus h on kuuli kõrgus Maa pinnast. Energia jäävuse seadusest lähtuvalt peavad need energiad olema võrdsed:

$$E_1 = E_2 \quad \rightarrow \quad \frac{mv^2}{2} - \frac{GMm}{R} = -\frac{GMm}{R+h}.$$

On öeldud, et juhul kui gravitatsioonivälja tugevus oleks igas punktis kuuli trajektooril võrdne raskuskiirendusega Maa pinnal, lendaks kuul kõrgusele H. Ehk $mv^2/2 = mgH$ ja asendades $g = GM/R^2$ saame $v^2/2 = GMH/R^2$. Asendades selle ülalpool olevasse võrdusesse, saame:

$$\frac{GMm}{R^2}H - \frac{GMm}{R} = -\frac{GMm}{R+h} \quad \rightarrow \quad \frac{H}{R^2} - \frac{1}{R} = -\frac{1}{R+h},$$

$$h = \frac{R^2}{R-H} - R = \frac{RH}{R-H} \approx 427\,\mathrm{km}.$$

4. (*SILINDER*) (*10 p.*) Silindri impulsimoment ei muutu telje suhtes, mis läbib silindri ja pinna kontaktpunkte, sest hõõrdejõul puudub moment selle telje suhtes. Olgu esialgne nurkkiirus ω. Esialgne impulsimoment on seega $h_1 = -mvR + I\omega = -mvR + mR^2\omega$. Pärast libisemist on nurkkiirus $\frac{v}{R}$. Seega impulsimoment on $h_2 = mvr + I\frac{v}{R} = 2mvR$. Impulsimomendi jäävusest $h_1 = h_2$ saame, et $\omega = \frac{3v}{R}$

5. (*RADOON*) (*10 p.*) Iga lagunev uraani tuum jõuab oma lagunemisahelas radoonini. Tasakaalulisel juhul tähendab see, et ajaühikus lagunevate uraani tuumade arv on võrdne ka nii ajaühikus tekkivate kui lagunevate radooni tuumade arvuga. Niisiis, ajaühikus lagunevate radooni tuumade arv $\Delta N_\mathrm{R}/\Delta t$ on määratud uraani tuumade koguarvu N_U ja uraani poolestusaja τ kaudu kujul

$$\frac{\Delta N_\mathrm{R}}{\Delta t} = \frac{N_\mathrm{U} \ln 2}{\tau}.$$

Uraani tuumade arvu saame selle kogumassi $m_\mathrm{U} = \frac{0{,}3}{10^3}m$ ja ühe aatomi massi $m_1 = 238 \cdot u$ suhtena:

$$N_\mathrm{U} = \frac{m_\mathrm{U}}{m_1} = 1{,}26 \cdot 10^{-6}\frac{m}{u}.$$

Et radooni aktiivsus (lagunemiste arv ruumalaühikus ajaühiku kohta) ruumis peab piirjuhul rahuldama tingimust

$$\frac{\Delta N_\mathrm{R}}{\Delta t} = 200 \cdot V,$$

saame kivimitüki ohutu massi ülempiiriks

$$m = \frac{200 \cdot Vu\tau}{1{,}26 \cdot 10^{-6} \ln 2} = 1{,}4\,\mathrm{kg}.$$

6. (*LUUP*) (*12 p.*) Poolkera kumera pinna keskosa võib vaadelda omaette õhukese läätsena, mille fookuskaugus f ja kaugus paberi pinnast (võrdne kumerpinna raadiusega R) määravad kujutise suurenduse. Selle ekvivalentse läätse fookuskauguse määramiseks vaatleme valguskiirt, mis liigub paralleelselt optilise peateljega ja peale murdumist koondub fookusesse (vt joonis). Kui valguskiir levib optilise peatelje lähedal, siis kõik murdumisel tekkivad nurgad on väikesed, nii et saame tingimuse

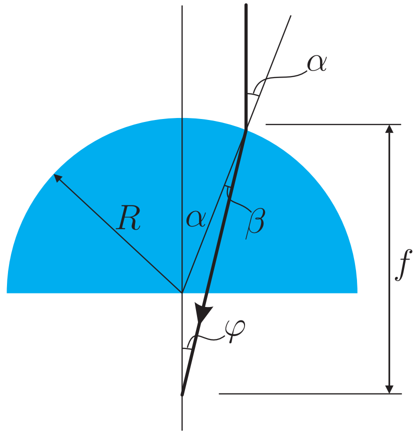
$$\alpha R \approx f\varphi.$$

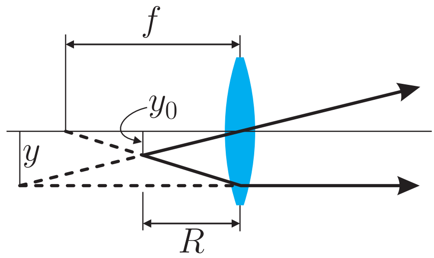
Ilmselt

$$\varphi = \alpha - \beta = \alpha - \alpha/n = \alpha(1 - 1/n).$$

Nende seoste kombineerimisel nurgad taanduvad välja ja saame $f = nR/(n-1)$. Ilmselt eseme (paberi pinna) kaugus läätsest on R, kusjuures $f > R$, järelikult tekib näiline kujutis kusagil paberi taga. Kõik kaugused on siiski R suurusjärgus, seega suurelt distantsilt silmaga vaadeldav suurendus (st nurksuurendus) on praktiliselt sama mis joonsuurendus y/y_0. Kujutise konstrueerimisel tekkivatest sarnastest kolmnurkadest saame

$$\frac{y}{y_0} = \frac{f}{f - R} = n = 1{,}5.$$



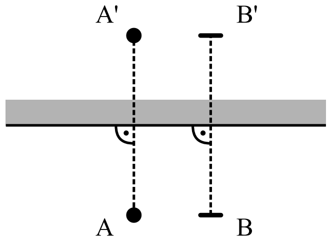


7. (*VOOLUALLIKAD*) (*12 p.*)

A) Kui lüliti on suletud, siis vooluallika vool saab läbi lüliti ringi käia ja ei mõjuta midagi. Võime tema asendada juhtmega. Lisaks paneme tähele, et $5\,\mathrm{k\Omega}$ takisti ei mõjuta kuidagi pinget $10\,\mathrm{k\Omega}$ takisti otstel. Liikudes $10\,\mathrm{k\Omega}$ takisti vasakult poolt vastupäeva mööda skeemi edasi, saame, et potentsiaalide erinevus (pinge) sellel takistil on $U = -1\,\mathrm{V} + 3\,\mathrm{V} - 2\,\mathrm{V} = 0\,\mathrm{V}$. Selle abil saame leida voolutugevuse läbi takisti: $I = \frac{U}{R} = \frac{0\,\mathrm{V}}{10\,\mathrm{k\Omega}} = 0\,\mathrm{mA}$. Pinge U on lihtsalt patarei pinge $U = 1\,\mathrm{V}$.

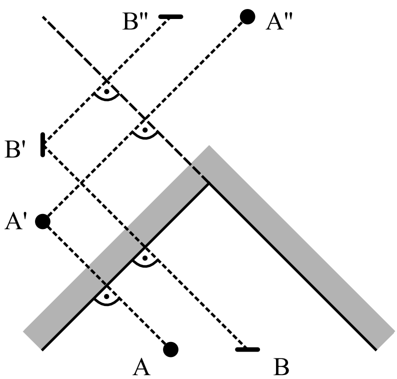
B) Lüliti on avatud. Alustame seekord voolutugevusest. Me teame, et tänu konstantse voolu allikale läbib $10\,\mathrm{k\Omega}$ takistit vool tugevusega $I = 2\,\mathrm{mA}$. Selle abil saame leida pinge takisti otstel: $U_R = IR = 2\,\mathrm{mA} \cdot 10\,\mathrm{k\Omega} = 20\,\mathrm{V}$. Liites takistil olevale pingele kahe patarei pinged otsa, jälgides märke, saame leida pinge $U = 20\,\mathrm{V} - 2\,\mathrm{V} + 3\,\mathrm{V} = 21\,\mathrm{V}$.

8. (*NURGAPEEGEL*) (*12 p.*) Vaatame kõigepealt kujutise tekkimist tasapeeglis. Joonisel 1 on olukord pealtvaates. A on Juku lahtine silm ja A′ selle kujutis. Kinnine silm ja selle kujutis on vastavalt B ja B′. Näeme, et parema silma kinnipigistamisel paistab ka peeglis kinnisena vaatleja suhtes parempoolne silm.



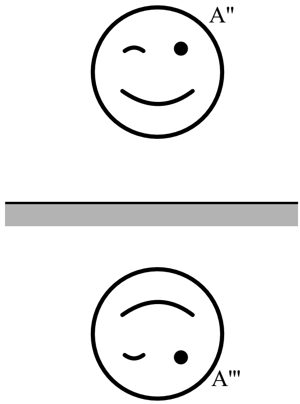
Joonis 1: Kujutis tasapeeglis

Olgu kolmest peeglist üks horisontaalne ja kaks ülejäänut vertikaalsed, kusjuures Juku vaatab otse vertikaalsete peeglite kokkupuutejoone poole. Joonisel 2 on see olukord pealtvaates. Vaatame vertikaalsete peeglite mõju. Esmalt konstrueerime silma A kujutise A' vasakpoolses peeglis. Seejärel konstrueerime kujutise A' kujutise A'' parempoolses peeglis. Tomime samamoodi kujutise B'' konstrueerimisel ja paneme tähele, et seekord on peegelpildil vasak ja parem pool vahetatud ning kinnisena paistab peeglites vasakpoolne silm.



Joonis 2: Kujutis kahes peeglis

Võtame nüüd arvesse horisontaalse peegli mõju. Joonisel 3 on otsevaates teist järku kujutis A'' ning selle kujutis A''' horisontaalses peeglis. Näeme, et horisontaalne peegel pöörab pildi "pea peale". Seega näeb Juku nurgapeeglis ennast sellisena, nagu on joonisel 3 kujutis A'''.



Joonis 3: Peegeldumine horisontaalselt peeglilt

9. (*KAATER*) (*14 p.*) Vaatleme kaatri liikumist õhu suhtes: alguses $l_1 = t_1 v_1 = 2700\,\mathrm{m}$ itta, siis $l_2 = t_2 v_2 = 900\,\mathrm{m}$ kagusse ning lõpuks $l_3 = t_3 v_3 = 450\,\mathrm{m}$ edelasse. Kokkuvõttes nihkuti lõunasuunas $L_S = \frac{l_2+l_3}{\sqrt{2}} \approx 955\,\mathrm{m}$ ning idasuunas $L_E = l_1 + \frac{l_2-l_3}{\sqrt{2}} \approx 3018\,\mathrm{m}$, maa suhtes aga nihkuti l võrra lõunasse. Seetõttu pidi õhk liikuma L_E võrra läände ning $l - L_S$ võrra lõunasse. Siit saame tuule tugevuseks

$$v_t = \frac{\sqrt{L_S^2 + (l - L_S)^2}}{t_1 + t_2 + t_3} \approx 11{,}9\,\mathrm{m/s} \approx 12\,\mathrm{m/s}.$$

10. (*KOLM KUULI*) (*14 p.*) (a) Kiirus on maksimaalne siis, kui elektriline potentsiaalne energia on minimaalne, st siis, kui nööride vahel on sirgnurk. Muutub ainult kahe äärmise kuuli vahekaugus. Algselt on see L, pärast aga $L/\cos 60° = 2L/\sqrt{3}$. Imuplsi jäävuse tõttu liiguvad sel hetkel äärmised kuulid kaks korda aeglasemalt, kui keskmine. Olgu äärmiste kuulide kiirus v. Energia jäävuse seadusest

$$3mv^2 = kq^2\left(\frac{1}{L} - \frac{\sqrt{3}}{2L}\right) \Rightarrow v = q\sqrt{\frac{k}{6mL}\left(2-\sqrt{3}\right)} = q\frac{\sqrt{3}-1}{2}\sqrt{\frac{k}{3mL}}.$$

(b) Joonisel laeng A liigub sümmeetria tõttu vertikaalselt, seega niidi AB hetkeline pöörlemiskese peab asuma horisontaaljoonel OA. Massikese

M jääb paigale, mistõttu niidi punkt D, mis jagab lõigu AB vahekorras 2:1, liigub horisontaalselt, seetõttu punkti D ja hetkelist pöörlemiskeset O ühendav sirge peab olema vertikaalne. Nüüd saab ilmseks, et O on võrdkülgse kolmnurga ABE keskpunkt, mistõttu lõik OB on vertikaali suhtes $30°$ nurga all ning seega punkt B hakkab liikuma horisontaali suhtes $30°$ nurga all ning selles sihis peab on ka laengu B kiirendus. Projitseerides laengu B jaoks Newtoni II seaduse lõigu AB ristsihile saame

$$ma\cos 30° = \cos 60° \frac{kq^2}{L^2},$$

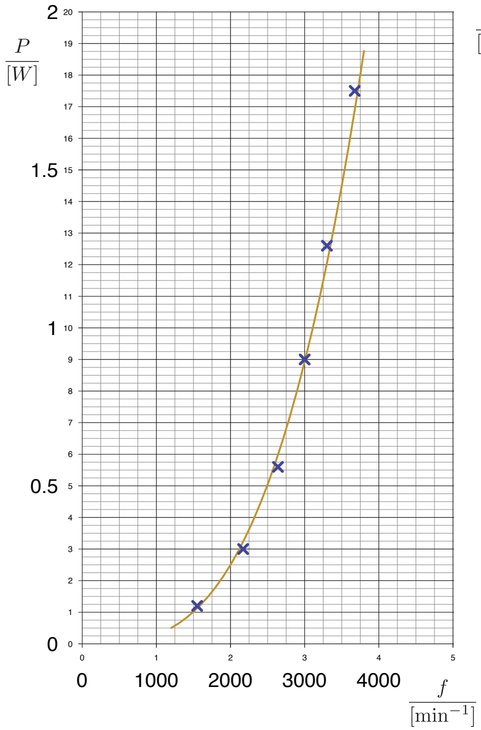
millest

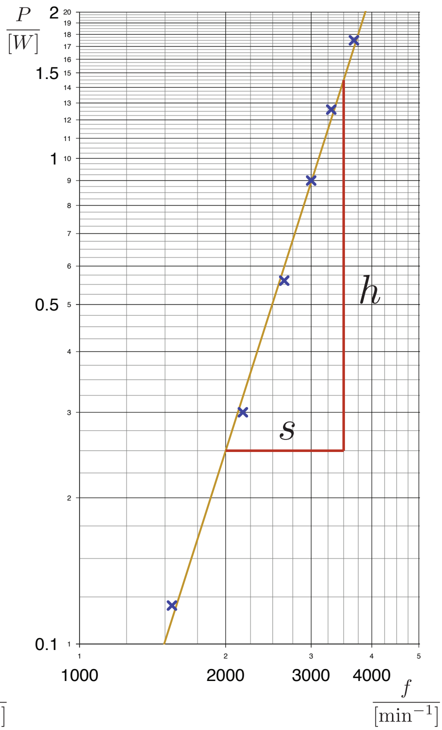
$$a = \tan 30° \frac{kq^2}{mL^2} = \frac{kq^2}{mL^2\sqrt{3}}.$$

Impulsi jäävuse tõttu on laengu A kiirendus $2a\sin 30° = a$, st sama, mis teistel laengutel.

E1. (*TIIVIK*)(*10 p.*) Selgitame esmalt umbkaudu välja, millises pingevahemikus peab mootor töötama, et võimsus jääks vahemikku 0,1 W kuni 2 W. See on ligikaudu 2 V kuni 7 V. Otsustame selles vahemikus ühtlaste vahedega pinget muutes võtta 5 kuni 7 katsepunkti. Kanname tabelisse pinge mootoril U, voolutugevuse I ja tahhomeetri näidu t ning arvutame nende põhjal mootori võimsuse $P = UI$ ning mootori tõelise pöörlemissageduse $f = t/2$. (Tiivikul on kaks laba ning seetõttu muutub lasertäpi intensiivsus pöörlemissagedusest kaks korda tihedamini.)

U [V]	I [A]	t [min^{-1}]	P [W]	f [min^{-1}]
2,0	0,06	3100	0,12	1550
3,0	0,10	4340	0,30	2170
4,0	0,14	5280	0,56	2640
5,0	0,18	6000	0,90	3000
6,0	0,21	6600	1,26	3300
7,0	0,25	7350	1,75	3680





Kanname andmepunktid (võimsus P vs pöörlemissagedus f) logaritmiliste jaotistega teljestikule ja märkame, et andmepunktid paiknevad ligikaudu sirgjoonel. Tõepoolest, kui võtame seadusest $P = kf^n$ logaritmi, saame $\ln P$ ja $\ln f$ vahel lineaarse seose

$$\ln P = \ln k + n \ln f.$$

Sobitame läbi andmepunktide sirgjoone ning mõõdame selle tõusu n. Juhul, kui teljestiku x- ja y-jaotised on joonistatud võrdses skaalas, piisab tõusu arvutamiseks paberil joonlauga mõõdetud pikkuste h ja s jagatisest:

$$n = \frac{h}{s} = 3{,}1.$$

Üldisemal juhul peaksime tõusu arvutamiseks aga leidma logaritmide muutude suhte (näiteks graafikul punasega tähistatud lõikudes):

$$n = \frac{\ln 14{,}5 - \ln 2{,}5}{\ln 3{,}5 - \ln 2{,}0} = 3{,}1.$$

Märkus: logaritmide vahede arvutamisel ei pea ühikute pärast muretsema. Ühikud taanduvad välja, sest $\ln a - \ln b = \ln a/b$.

E1. (*KILE JA PABER*)(*14 p.*) Paneme tina kilekotti ja paneme ka pabeririba otsapidi kotti ning sukeldame selle vette. Leiame, kui pikalt (L) peab olema pabeririba veenivoost allpool, et tina koos kotiga kerkiks üles, kui pabeririba otsast tirida. Mõõdame riba laiuse a. Keskmine rõhumisjõud paberirba ühele küjele on $\rho_v g H^2 L/2$ ning vastav hõõrdejõud — $\mu\rho_v g H^2 L/2$. Et ribal on kaks külge, siis summarne jõud on kaks korda suurem, $\mu\rho_v g H^2 L$, mis peab olema võrdne haavlile mõjuva raskusjõu ja üleslükkejõu vahega,

$$\mu\rho_v g H^2 L = mg(1 - \rho_v/\rho_t),$$

millest saame

$$\mu = \frac{m(\rho_v^{-1} - \rho_t^{-1})}{H^2 L}.$$