Eesti koolinoorte XLVIII täppisteaduste olümpiaad

MATEMAATIKA PIIRKONDLIK VOOR

27. jaanuaril 2001. a.

VII klass

I osa: Lahendamiseks on aega 40 minutit.
Sellele lehele kirjuta ainult vastused, lahendamiseks võid kasutada lisapaberit.
Iga ülesande õige vastus annab 2 punkti.
Taskuarvutit kasutada ei lubata.

1. Arvu a absoluutväärtus on 2,5 võrra suurem arvust 7,3. Leia arvu a kõik võimalikud väärtused.

   .....

2. Kell on praegu 22.45. Kui palju on kell 2001 tunni pärast?

   .....

3. Leia suurim algarv, millega jagub arv 364.

   .....

4. Naturaalarvud alates arvust 1 paigutatakse järjest kolmnurksesse tabelisse, mille neli esimest rida on näidatud joonisel. Millised on selle tabeli kümnenda rea esimene ja viimane arv?

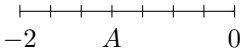
   1
   2 3
   4 5 6
   7 8 9 10
   . . . . . .

   .....

5. Mari tassis on 60% võrra vähem piima kui Jüri kruusis. Mitu korda on Jüri kruusis piima rohkem kui Mari tassis?

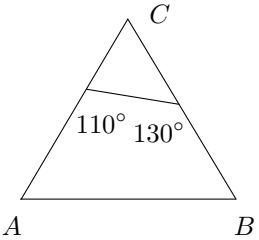
   .....

6. Arvsirge lõik, mille otspunktid kujutavad arve -2 ja 0, on jaotatud seitsmeks võrdseks osaks. Milline arv vastab tähele A?



.....

7. Kolmnurgas ABC on $|AC| = |BC|$. Leia selle kolmnurga nurkade suurused.



.....

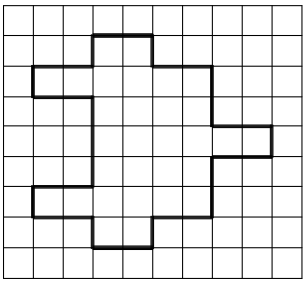
8. Ringi pindala on $9\pi\,\mathrm{cm}^2$. Leia selle ringi täpne ümbermõõt.

.....

9. Leia sellise risttahuka ruumala, millel kaks kolmandikku servadest on pikkusega $5\,\mathrm{cm}$ ja kaks kolmandikku tahkudest on pindalaga $40\,\mathrm{cm}^2$.

.....

10. Jaota ruudulisele alusele joonestatud kujund kõrvaloleval joonisel näidatud kujundiga T võrdseteks osadeks (kujundit T võib ka pöörata).



T

Eesti koolinoorte XLVIII täppisteaduste olümpiaad

MATEMAATIKA PIIRKONDLIK VOOR

27. jaanuaril 2001. a.

VIII klass

I osa: Lahendamiseks on aega 40 minutit.
Sellele lehele kirjuta ainult vastused, lahendamiseks võid kasutada lisapaberit.
Iga ülesande õige vastus annab 2 punkti.
Taskuarvutit kasutada ei lubata.

1. Leia naturaalarvud m ja n, mis on 30-st väiksemad ning mille korral $m : n = 3{,}125$.

   $m =$ ..... $n =$ .....

2. Arvu a vähendati 40% võrra, seejärel suurendati tulemust 20% võrra ja saadi arv 18. Leia arv a.

   .....

3. Kirjuta punktiiridele avaldised $(2^3)^4$, $(3^2)^4$ ja $(4^3)^2$ ning ruutudesse sobivad märgid $<$ või $=$, nii et kirjapandud seosed kehtiksid.

   ..... $\square$ ..... $\square$ .....

4. Arvu $a + 1{,}3$ absoluutväärtus on 9. Leia arvu a kõik võimalikud väärtused.

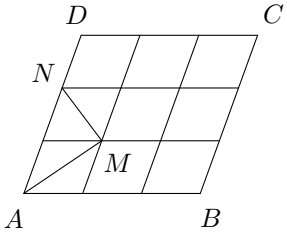
   .....

5. Naturaalarvud alates arvust 1 paigutatakse järjest kolmnurksesse tabelisse, mille neli esimest rida on näidatud joonisel. Mitme võrra on selle tabeli 17. rea vasakpoolseim arv väiksem 19. rea parempoolseimast arvust?

   1
   2 3
   4 5 6
   7 8 9 10
   . . . . . .

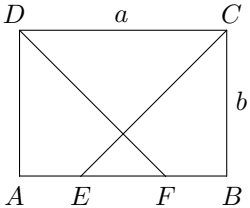
   .....

6. Romb $ABCD$ on jaotatud üheksaks võrdseks rombiks. Leia rombi $ABCD$ pindala, kui $|AM| = 5\,\text{cm}$ ja $|NM| = 3\,\text{cm}$.



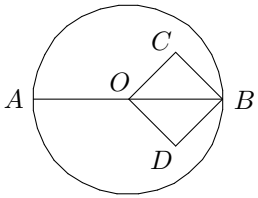
.....

7. Lõigud DF ja CE on ristküliku $ABCD$ nurgapoolitajad. Leia lõigu EF pikkus, kui ristküliku küljed on pikkustega a ja b.



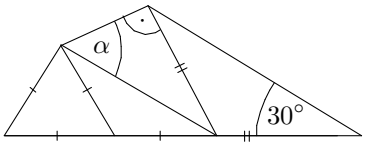
.....

8. Ruudu $BCOD$ tipp O on ringi keskpunkt ning AB on ringi diameeter. Leia ringi ja ruudu pindalade suhe.



.....

9. Leia nurga α suurus, kui joonisel ühtviisi tähistatud lõigud on võrdse pikkusega.



.....

10. On antud 27 valget ühikkuupi. Nende mõned tahud värvitakse kollaseks ja mõned roheliseks nii, et neist oleks võimalik kokku laduda nii üleni kollane kuup mõõtmetega $3 \times 3 \times 3$ kui ka üleni roheline kuup mõõtmetega $3 \times 3 \times 3$. Leia roheliseks värvitavate tahkude suurim võimalik arv.

.....

Eesti koolinoorte XLVIII täppisteaduste olümpiaad

MATEMAATIKA PIIRKONDLIK VOOR

27. jaanuaril 2001. a.

IX klass

I osa: Lahendamiseks on aega 40 minutit.
Sellele lehele kirjuta ainult vastused, lahendamiseks võid kasutada lisapaberit.
Iga ülesande õige vastus annab 2 punkti.
Taskuarvutit kasutada ei lubata.

1. Leia vähim algarv, millega jagub summa $3^4 + 5^3 + 7^2 + 11$.

   .....

2. Toimetaja ja korrektori töötasuks kokku arvestatakse 5% raamatute müügi eest saadud rahast. Autor saab 10% kahest kolmandikust müügi eest saadud rahast. Kui suur on autori tasu, kui toimetaja ja korrektor said kumbki 3000 kr?

   .....

3. Kahekohaline arv a on võrdne oma kümneliste numbri ja kahekordse üheliste numbri summaga. Leia arv a.

   .....

4. Turniiril mängis iga võistkond iga ülejäänud võistkonnaga ühe korra. Kokku mängiti 105 mängu. Mitu võistkonda osales turniiril?

   .....

5. Naturaalarvud 1 kuni 2001 kirjutatakse seitsmeveerulisse tabelisse joonisel näidatud viisil. Millise tähega märgitud veergu kirjutatakse arv 2001?

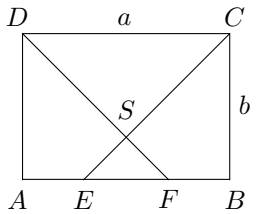
A	B	C	D	E	F	G
1		2		3		4
	5		6		7	
8		9		10		11
	12		13		14	

   .....

6. Kolme erineva küljepikkusega ruudu moodustamiseks kasutati kokku 49 ühikruutu. Leia neist kolmest ruudust vähima küljepikkus.

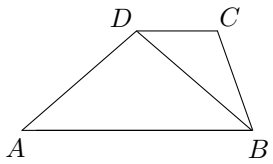
.....

7. Ristküliku $ABCD$ nurgapoolitajad DF ja CE lõikuvad punktis S. Leia kolmnurga ESF pindala, kui ristküliku küljed on pikkustega a ja b.



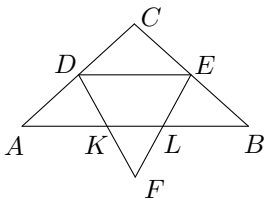
.....

8. Trapetsi $ABCD$ alusteks on AB ja CD. Leia nurga ADB suurus, kui $|AD| = |DB|$, $\angle BCD = 110°$ ja $\angle CBD = 30°$.



.....

9. Kolmnurgad ABC ja DEF on võrdhaarsed, D ja E on kolmnurga ABC haarade AC ja BC keskpunktid ning K ja L on kolmnurga DEF haarade DF ja EF keskpunktid. Leia suhe $|AB| : |KL|$.



.....

10. On antud 27 valget ühikkuupi. Nende mõned tahud värvitakse kollaseks ja mõned roheliseks nii, et neist oleks võimalik kokku laduda nii üleni kollane kuup mõõtmetega $3 \times 3 \times 3$ kui ka üleni roheline kuup mõõtmetega $3 \times 3 \times 3$. Leia valgeks jäetavate tahkude suurim võimalik arv.

.....

Eesti koolinoorte XLVIII täppisteaduste olümpiaad

MATEMAATIKA PIIRKONDLIK VOOR

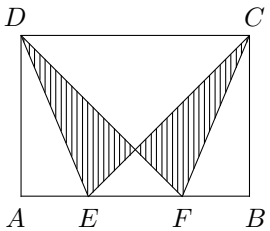
27. jaanuaril 2001. a.

VII klass

II osa: Lahendamiseks on aega 2 tundi.
Ülesannete lahendused kirjuta eraldi lehele.
Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti. Ainult vastusest ei piisa!
Taskuarvutit kasutada ei lubata.

1. Isa andis oma kolmele pojale hulga münte, nii et vanim poeg sai noorimast 15 münti rohkem. Pärast seda, kui vanim poeg loovutas oma osast 30 münti keskmisele pojale, oli noorimal ja keskmisel pojal münte võrdselt ja vanimale pojale jäi veel 45 münti. Mitu münti andis isa kõigile poegadele kokku?

2. Lõigud CE ja DF poolitavad vastavalt ristküliku $ABCD$ nurgad BCD ja CDA. Leia joonisel viirutatud kujundi pindala, kui ristküliku külgede pikkused on 10 cm ja 7 cm.



3. On teada, et a, b ja $10a + b$ on algarvud ning $a \leqslant b < 10$. Leia korrutise $ab \cdot (10a + b)$ kõik võimalikud väärtused.

Eesti koolinoorte XLVIII täppisteaduste olümpiaad

MATEMAATIKA PIIRKONDLIK VOOR

27. jaanuaril 2001. a.

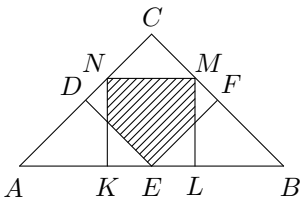
VIII klass

II osa: Lahendamiseks on aega 2 tundi.
Ülesannete lahendused kirjuta eraldi lehele.
Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti. Ainult vastusest ei piisa!
Taskuarvutit kasutada ei lubata.

1. Kui Meelise arvutisse sisestada mingi naturaalarv n, siis arvuti korrutab kõik naturaalarvud 1 kuni n ja näitab tulemuse ekraanil. Näiteks sisestades arvu 6, leiab arvuti korrutise $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6$ ja näitab ekraanil arvu 720. Kui aga leitud korrutis jagub arvuga 2001, mängib arvuti lisaks rõõmsat muusikat. Millise vähima naturaalarvu võiks Meelis arvutisse sisestada, nii et see mängiks talle muusikat?

2. Suvevaheajal töötas Taavi ajalehepoisina. Teenitud rahast kulutas Taavi 25% diskettide ostmiseks, ülejäänud summast 25% tuli maksta bussiekskursiooni eest. Jõulukinkide ostmiseks sõpradele kulutas Taavi ühe kolmandiku võrra vähem kui oli maksnud ekskursiooni eest. Pärast seda oli Taavil teenitud rahast alles 80 krooni vähem kui oli juba kulutatud. Kui palju teenis Taavi vaheajal?

3. Võrdhaarse täisnurkse kolmnurga ABC külgedel võetakse punktid D, E, F, K, L, M, N nagu joonisel näidatud, nii et $CDEF$ ja $KLMN$ on ruudud. Kui suure osa moodustab nende ruutude ühise osa (joonisel viirutatud) pindala kolmnurga ABC pindalast?



Eesti koolinoorte XLVIII täppisteaduste olümpiaad

MATEMAATIKA PIIRKONDLIK VOOR

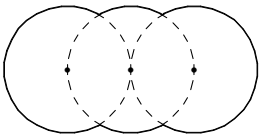
27. jaanuaril 2001. a.

IX klass

II osa: Lahendamiseks on aega 4 tundi.
Ülesannete lahendused kirjuta eraldi lehele.
Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti. Ainult vastusest ei piisa!
Taskuarvutit kasutada ei lubata.

1. Arveametnik Julius pani tähele, et 2001. aastal saab tema vanus võrdseks tema sünniaasta numbrite kahekordse summaga. Edasi mõtiskledes tõdes ta üllatusega, et täpselt sama lugu on ka tema mõned aastad noorema õe Juuliga. Kui vanaks saab sel aastal Julius ja kui vanaks Juuli?

2. Joonisel kujutatud kolm ringjoont on võrdse raadiusega r, nende keskpunktid paiknevad ühel sirgel ja kaks äärmist ringjoont läbivad keskmise ringjoone keskpunkti. Leia neist ringjoontest moodustuva kujundi ümbermõõt.



3. Olgu k täisarv. Tõesta, et kui arv $k^2 - k$ ei jagu 6-ga, siis arv $k^2 - k - 2$ jagub 18-ga.

4. Neli õpilast ostis poest raamatuid. On teada, et
   a) igaüks neist ostis täpselt kolm erinevat raamatut;
   b) iga õpilaste paar ostis täpselt ühe ühesuguse raamatu.

   Mitu erinevat raamatut õpilased kokku ostsid? Leia kõik võimalused.

Eesti koolinoorte XLVIII täppisteaduste olümpiaad

MATEMAATIKA PIIRKONDLIK VOOR

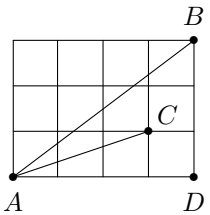
27. jaanuaril 2001. a.

X klass

Lahendamiseks on aega 5 tundi.
Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti.
Taskuarvutit kasutada ei lubata.

1. Võrrandil $\sqrt{x+a}+x+b=0$ leidub reaalarvuline lahend x. Leia vahe $b-a$ suurim võimalik väärtus.

2. Ruudulisel paberil võetakse punktid A, B, C ja D nii, nagu joonisel näidatud. Tõesta, et nurgad BAC ja CAD on võrdse suurusega.



3. Leia kõik sellised positiivsete täisarvude paarid (a,b), mille korral

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{1}{ab}=\frac{2}{5}\,.$$

4. Ristküliku $ABCD$ küljel AB võetakse punktid E ja F nii, et $|AE|=|BF|$ ning lõigud CE ja DF lõikuvad punktis P. Tõesta, et kolmnurga CDP pindala on võrdne kolmnurkade ADE, BCF ja EFP pindalade summaga.

5. Aafrikas elav Abababi hõim kasutab tähestikku, milles on ainult tähed A ja B. Ükski Abababi keele sõna pole ühegi teise sõna alguseks. Kas Abababi keeles võib olla kolm 4-tähelist, kümme 5-tähelist, kolmkümmend 6-tähelist ja viis 7-tähelist sõna?

Eesti koolinoorte XLVIII täppisteaduste olümpiaad

MATEMAATIKA PIIRKONDLIK VOOR

27. jaanuaril 2001. a.

XI klass

Lahendamiseks on aega 5 tundi.
Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti.
Taskuarvutit kasutada ei lubata.

1. Kisanea Vabariigi valitsus esitas parlamendile seaduseelnõu, mille kohaselt iga valitsuse liikme palga ja kõigi töötavate Kisanea kodanike keskmise palga suhe peab võrduma seitsmekordse Kisanea töötavate kodanike koguarvu ja valitsuse liikmete arvu suhtega. On teada, et Kisanea Vabariigis on N töötavat kodanikku, kellest M on valitsuse liikmed, ning valitsusse mittekuuluvate töötavate kodanike keskmine palk on $c > 0$ sõltumata sellest, kas uus seadus rakendub või mitte.

   Parlamendi opositsioon on aga oma valijatele lubanud, et ei lase tõsta valitsuse liikmete palka suuremaks ülejäänud Kisanea töötavate kodanike keskmisest palgast. Kas opositsioon peaks püüdma esitatud seaduseelnõu vastuvõtmist takistada?

2. Olgu a, b ja c sellised positiivsed täisarvud, et

   $$abc + ab + bc + ca + a + b + c = 2000\ .$$

   Leia summa $a + b + c$ kõik võimalikud väärtused.

3. Olgu D kolmnurga ABC külje AB keskpunkt ja E selline punkt küljel BC, et $|BE| = 2 \cdot |EC|$, kusjuures $\angle ADC = \angle BAE$. Tõesta, et kolmnurk ABC on täisnurkne.

4. Tõesta, et mistahes 10 järjestikuse positiivse täisarvu hulgas leidub arv, mis on ülejäänutega ühistegurita.

5. Ringjoonel järjestikku paiknevad $2n + 1$ punkti A_0, A_1, $\ldots$, A_{2n} jaotavad ringjoone võrdseteks kaarteks. Kuidas tuleb need punktid sirglõikudega ühendada, et tekkiva $2n+1$ lüliga kinnise murdjoone pikkus oleks maksimaalne?

Eesti koolinoorte XLVIII täppisteaduste olümpiaad

MATEMAATIKA PIIRKONDLIK VOOR

27. jaanuaril 2001. a.

XII klass

Lahendamiseks on aega 5 tundi.
Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti.
Taskuarvutit kasutada ei lubata.

1. Olgu a, b positiivsed täisarvud.
   a) Tõesta, et kui arvud a ja b on ühistegurita, siis ka ab ja $a+b$ on ühistegurita.
   b) Kas kehtib ka selle lause pöördlause?

2. Tähistagu a_n arvude 1, 2, 3, ..., n ruutude vahelduvate märkidega summat: $a_1 = 1^2$, $a_2 = 1^2 - 2^2$, $a_3 = 1^2 - 2^2 + 3^2$, $a_4 = 1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2$, jne. Tõesta, et mistahes positiivse täisarvu n korral kehtib võrdus

$$|a_n| = 1 + 2 + 3 + \ldots + n\ .$$

3. Lõigule AB selle sisepunktist C tõmmatud ristsirgel punktist C ühel ja samal pool valitakse punktid D ja E nii, et $|AC| = |DC|$ ja $|BC| = |EC|$. Olgu P, Q, R ja S vastavalt lõikude AB, BE, DE ja AD keskpunktid. Tõesta, et nelinurk $PQRS$ on ruut.

4. Reaalarvude a, b ja c korrutis on 1 ning nende arvude summa on võrdne nende pöördarvude summaga. Tõesta, et vähemalt üks arvudest a, b ja c on 1.

5. Leia vähim n väärtus, mille korral on võimalik katta $n \times n$ ruut 1×2 dominokividega nii, et mistahes seda ruutu kaheks osaks jaotav sirge jaotaks kaheks osaks ka vähemalt ühe dominokivi.

XLVIII Олимпиада по точным наукам учащихся Эстонии

МАТЕМАТИКА, РЕГИОНАЛЬНЫЙ ТУР

27 января 2001 г.

VII класс

I часть: Время, отводимое для решения: 40 минут.
На этом листке написать только ответы, для решения можно использовать дополнительную бумагу.
Верный ответ каждой задачи дает 2 балла.
Пользоваться калькулятором не разрешается.

1. Абсолютная величина числа a на 2,5 больше числа 7,3. Найти все возможные значения числа a.

   .....

2. Сейчас 22.45. Сколько времени будет через 2001 час?

   .....

3. Найти наибольшее простое число, на которое делится число 364.

   .....

4. Натуральные числа, начиная с 1, располагают в треугольную таблицу, первые четыре строки которой показаны на рисунке. Каковы первое и последнее числа десятой строки этой таблицы?

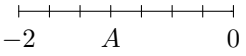
   1
   2 3
   4 5 6
   7 8 9 10
   . . . . . .

   .....

5. В кружке Марины молока на 60% меньше чем в кружке у Юры. Во сколько раз молока в Юриной кружке больше чем в Марининой?

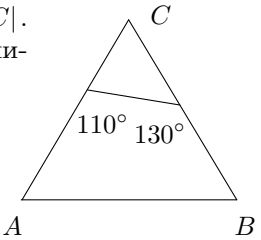
   .....

6. Отрезок числовой прямой, концы которого соответствуют числам -2 и 0, поделен на семь равных частей. Какое число соответствует букве A?



. . . . . .

7. В треугольнике ABC имеем $|AC| = |BC|$. Найти величины углов этого треугольника.



. . . . . .

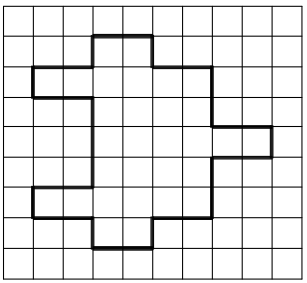
8. Площадь круга $9\pi\,\text{см}^2$. Найти точную длину окружности этого круга.

. . . . . .

9. Найти объем такого прямоугольного параллелепипеда, у которого две третих ребер имеют длину 5 см и две третих граней имеют площадь $40\,\text{см}^2$.

. . . . . .

10. Разделить нарисованную на клетчатой бумаге фигуру на части, равные изображенной сбоку фигуре T (фигуру T можно поворачивать).



T

XLVIII Олимпиада по точным наукам учащихся Эстонии

МАТЕМАТИКА, РЕГИОНАЛЬНЫЙ ТУР

27 января 2001 г.

VIII класс

I часть: Время, отводимое для решения: 40 минут.
На этом листке написать только ответы, для решения можно использовать дополнительную бумагу.
Верный ответ каждой задачи дает 2 балла.
Пользоваться калькулятором не разрешается.

1. Найти натуральные числа m и n, которые меньше 30 и для которых $m : n = 3{,}125$.

   $m =$ ..... $n =$ .....

2. Число a уменьшили на 40%, затем увеличили результат на 20% и получили число 18. Найти число a.

   .....

3. Написать в местах, отмеченных пунктиром, выражения $(2^3)^4$, $(3^2)^4$ и $(4^3)^2$, а в квадратах подходящие знаки $<$ или $=$ так, чтобы записанные соотношения выполнялись.

   ..... $\square$ ..... $\square$ .....

4. Абсолютная величина числа $a + 1{,}3$ равно 9. Найти все возможные значения числа a.

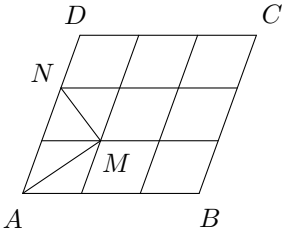
   .....

5. Натуральные числа, начиная с 1, располагаются в треугольную таблицу, первые четыре строки которой показаны на рисунке. На сколько самое левое число 17-ой строки этой таблицы меньше самого правого числа 19-ой строки?

   1
   2 3
   4 5 6
   7 8 9 10
   . . . . . .

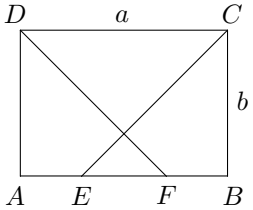
   .....

6. Ромб $ABCD$ разделен на девять равных ромбов. Найти площадь ромба $ABCD$, если $|AM| = 5$ см и $|NM| = 3$ см.



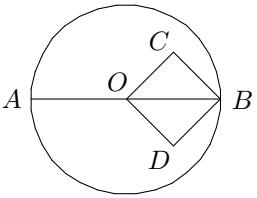
. . . . . .

7. Отрезки DF и CE являются биссектрисами прямоугольника $ABCD$. Найти длину отрезка EF, если длины сторон прямоугольника равны a и b.



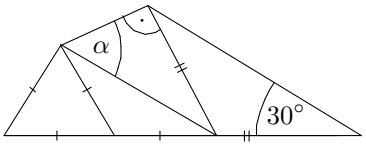
. . . . . .

8. Вершина O квадрата $BCOD$ является центром, а AB диаметром круга. Найти отношение площадей круга и квадрата.



. . . . . .

9. Найти величину угла α, если длины одинаково обозначенных на рисунке отрезков равны.



. . . . . .

10. Даны 27 белых кубиков единичного размера. Некоторые их грани красят в желтый, а некоторые в зеленый цвет так, чтобы из них можно было бы собрать желтый куб размера $3\times3\times3$ и зеленый куб размера $3\times3\times3$. Найти наибольшее возможное число граней, окрашенных в зеленый цвет.

. . . . . .

XLVIII Олимпиада по точным наукам учащихся Эстонии

МАТЕМАТИКА, РЕГИОНАЛЬНЫЙ ТУР

27 января 2001 г.

IX класс

I часть: Время, отводимое для решения: 40 минут.
На этом листке написать только ответы, для решения можно использовать дополнительную бумагу.
Верный ответ каждой задачи дает 2 балла.
Пользоваться калькулятором не разрешается.

1. Найти наименьшее простое число, на которое делится сумма $3^4 + 5^3 + 7^2 + 11$.

   .....

2. Зарплата редактора и корректора вместе составляет 5% от денег, полученных в результате продажи книг. Автор получает 10% от двух третих денег, полученных с продажи книг. Сколько получил автор, если редактор и корректор получили по 3000 крон каждый?

   .....

3. Двузначное число a равно сумме своего числа десятков и удвоенного числа единиц. Найти число a.

   .....

4. В турнире каждая команда сыграла с каждой из остальных команд один раз. Всего сыграли 105 игр. Сколько команд участвовало в турнире?

   .....

5. Натуральные числа от 1 до 2001 пишут в таблицу, состоящую из семи столбцов, показанным на рисунке способом. В столбец обозначенный какой буквой напишут число 2001?

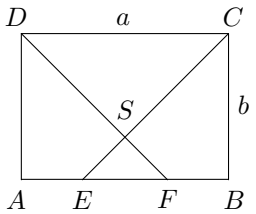
A	B	C	D	E	F	G
1		2		3		4
	5		6		7	
8		9		10		11
	12		13		14	

   .....

6. Для составления трех квадратов с различными длинами сторон использовалось всего 49 единичных квадратов. Найти длину стороны наименьшего из трех квадратов.

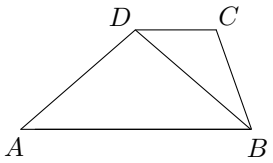
. . . . . .

7. Биссектрисы DF и CE прямоугольника $ABCD$ пересекаются в точке S. Найти площадь треугольника ESF, если длины сторон прямоугольника равны a и b.



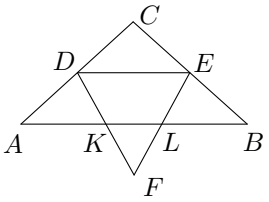
. . . . . .

8. AB и CD основания трапеции $ABCD$. Найти величину угла ADB, если $|AD| = |DB|$, $\angle BCD = 110^\circ$ и $\angle CBD = 30^\circ$.



. . . . . .

9. Треугольники ABC и DEF равнобедренные, D и E середины равных сторон AC и BC треугольника ABC, а K и L середины равных сторон DF и EF треугольника DEF. Найти отношение $|AB| : |KL|$.



. . . . . .

10. Даны 27 белых кубиков единичного размера. Некоторые их грани красят в желтый, а некоторые в зеленый цвет так, чтобы из них можно было бы собрать желтый куб размера $3\times3\times3$ и зеленый куб размера $3\times3\times3$. Найти наибольшее возможное число граней, оставшихся белыми.

. . . . . .

XLVIII Олимпиада по точным наукам учащихся Эстонии

МАТЕМАТИКА, РЕГИОНАЛЬНЫЙ ТУР

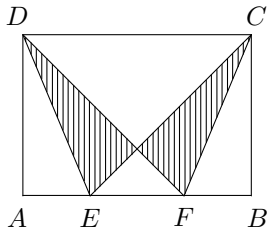
27 января 2001 г.

VII класс

II часть: Время, отводимое для решения: 2 часа.
Решения задач написать на отдельном листе.
Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи дает 7 баллов. Написать только ответ недостаточно!
Пользоваться калькулятором не разрешается.

1. Отец дал своим трем сыновьям некоторое количество монет так, что старший сын получил на 15 монет больше младшего. После того, как старший сын отдал из своей доли 30 монет среднему сыну, у среднего и младшего сыновей стало монет поровну, а у старшего осталось еще 45 монет. Сколько всего монет дал отец своим сыновьям?

2. Отрезки CE и DF делят пополам соответственно углы BCD и CDA прямоугольника $ABCD$. Найти площадь заштрихованной на рисунке фигуры, если длины сторон прямоугольника равны 10 см и 7 см.



3. Известно, что a, b и $10a+b$ простые числа и $a \leqslant b < 10$. Найти все возможные значения произведения $ab \cdot (10a+b)$.

XLVIII Олимпиада по точным наукам учащихся Эстонии

МАТЕМАТИКА, РЕГИОНАЛЬНЫЙ ТУР

27 января 2001 г.

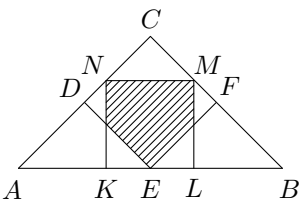
VIII класс

II часть: Время, отводимое для решения: 2 часа.
Решения задач написать на отдельном листе.
Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи дает 7 баллов. Написать только ответ недостаточно!
Пользоваться калькулятором не разрешается.

1. Если в компьютер Миши ввести натуральное число n, то компьютер умножит все натуральные числа от 1 до n и покажет результат на экране. Например, при вводе числа 6, компьютер найдет произведение $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6$ и покажет на экране число 720. Но если найденное произведение делится на 2001, то компьютер сыграет вдобавок веселую мелодию. Какое наименьшее натуральное число должен ввести Миша, чтобы компьютер исполнил ему музыку?

2. На летних каникулах Толик работал продавцом газет. На покупку дискет Толик потратил 25% из заработанных денег, 25% оставшихся денег он заплатил за автобусную экскурсию. На покупку рождественских подарков друзьям Толик потратил на треть меньше чем заплатил за экскурсию. После этого из заработанных Толиком денег у него осталось на 80 крон меньше, чем было уже потрачено. Сколько заработал Толик за каникулы?

3. На сторонах равнобедренного прямоугольного треугольника ABC взяты точки D, E, F, K, L, M, N, как показано на рисунке, так что $CDEF$ и $KLMN$ квадраты. Какую часть площади треугольника ABC составляет площадь общей части этих квадратов (которая на рисунке заштрихована)?



XLVIII Олимпиада по точным наукам учащихся Эстонии

МАТЕМАТИКА, РЕГИОНАЛЬНЫЙ ТУР

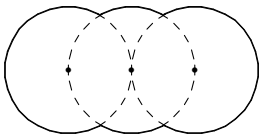
27 января 2001 г.

IX класс

II часть: Время, отводимое для решения: 4 часа.
Решения задач написать на отдельном листе.
Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи дает 7 баллов. Написать только ответ недостаточно!
Пользоваться калькулятором не разрешается.

1. Счетовод Юрий заметил, что в 2001 году его возраст станет равен удвоенной сумме цифр его года рождения. Размышляя дальше, он с удивлением обнаружил, что точно такая же история с его сестрой Юлией, которая младше его на несколько лет. Сколько лет исполнится в этом году Юрию и Юлии?

2. Три окружности, изображенные на рисунке, имеют одинаковый радиус r, их центры расположены на одной прямой и две крайние окружности проходят через центр третьей. Найти периметр фигуры, образованной этими тремя окружностями.



3. Пусть k целое число. Доказать, что если число $k^2 - k$ не делится на 6, то число $k^2 - k - 2$ делится на 18.

4. Четыре ученика купили в магазине книги. Известно, что
   а) каждый из них купил ровно три разные книги;
   б) каждая пара учеников купила ровно одну одинаковую книгу.

   Сколько всего разных книг купили ученики? Найти все возможные варианты.

XLVIII Олимпиада по точным наукам учащихся Эстонии

МАТЕМАТИКА, РЕГИОНАЛЬНЫЙ ТУР

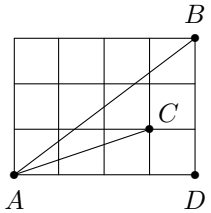
27 января 2001 г.

X класс

Время, отводимое для решения: 5 часов.
Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи дает 7 баллов.
Пользоваться калькулятором не разрешается.

1. Уравнение $\sqrt{x+a}+x+b=0$ имеет действительное решение x. Найти наибольшее возможное значение разности $b-a$.

2. На клетчатой бумаге взяты точки A, B, C и D так, как показано на рисунке. Доказать, что углы BAC и CAD равны.



3. Найти все такие пары положительных целых чисел (a,b), для которых

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{1}{ab}=\frac{2}{5}\ .$$

4. На стороне AB прямоугольника $ABCD$ взяты точки E и F так, что $|AE|=|BF|$ и отрезки CE и DF пересекаются в точке P. Доказать, что площадь треугольника CDP равна сумме площадей треугольников ADE, BCF и EFP.

5. Живущее в Африке племя Абабабов использует алфавит в котором есть только буквы А и Б. Ни одно слово абабабского языка не является началом другого слова. Может ли в абабабском языке быть три четырехбуквенных, десять пятибуквенных, тридцать шестибуквенных и пять семибуквенных слов?

XLVIII Олимпиада по точным наукам учащихся Эстонии

МАТЕМАТИКА, РЕГИОНАЛЬНЫЙ ТУР

27 января 2001 г.

XI класс

Время, отводимое для решения: 5 часов.
Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи дает 7 баллов.
Пользоваться калькулятором не разрешается.

1. Правительство Республики Кизанеи представило в парламент проект закона, согласно которому отношение зарплаты каждого члена правительства к средней зарплате всех работающих граждан Кизанеи должно равняться семикратному отношению числа работающих граждан Кизанеи к числу членов правительства. Известно, что в Республике Кизанеи N работающих граждан, из которых M являются членами правительства, и средняя зарплата работающих граждан, не входящих в правительство, равна $c > 0$ независимо от того, примут ли новый закон или нет.

   Парламентская оппозиция обещала своим избирателям, что не даст поднять зарплату членов правительства выше средней зарплаты остальных работающих граждан Кизанеи. Должна ли оппозиция препятствовать принятию представленного проекта закона?

2. Пусть a, b и c такие положительные целые числа, что

   $$abc + ab + bc + ca + a + b + c = 2000\,.$$

   Найти все возможные значения суммы $a + b + c$.

3. Пусть D середина стороны AB треугольника ABC, а E такая точка на стороне BC, что $|BE| = 2 \cdot |EC|$, причем $\angle ADC = \angle BAE$. Доказать, что треугольник ABC прямоугольный.

4. Доказать, что среди любых 10 последовательных положительных целых чисел найдется число, являющееся взаимно простым с остальными.

5. Последовательно размещенные на окружности $2n + 1$ точек $A_0, A_1, \ldots, A_{2n}$ делят окружность на равные дуги. Как надо соединить эти точки отрезками, чтобы длина полученной замкнутой ломаной, состоящей из $2n + 1$ звеньев, была максимальной?

XLVIII Олимпиада по точным наукам учащихся Эстонии

МАТЕМАТИКА, РЕГИОНАЛЬНЫЙ ТУР

27 января 2001 г.

XII класс

Время, отводимое для решения: 5 часов.
Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи дает 7 баллов.
Пользоваться калькулятором не разрешается.

1. Пусть a, b положительные целые числа.
   а) Доказать, что если числа a и b взаимно просты, то числа ab и $a+b$ также взаимно просты.
   б) Выполняется ли обратное утверждение?

2. Обозначим через a_n знакопеременную сумму квадратов чисел $1, 2, 3, \ldots, n$: $a_1 = 1^2$, $a_2 = 1^2 - 2^2$, $a_3 = 1^2 - 2^2 + 3^2$, $a_4 = 1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2$, и т.д. Доказать, что для любого целого положительного n выполняется равенство

$$|a_n| = 1 + 2 + 3 + \ldots + n\,.$$

3. На прямой, проведенной перпендикулярно отрезку AB через его внутреннюю точку C, взяты лежащие по одну сторону от отрезка AB точки D и E так, что $|AC| = |DC|$ и $|BC| = |EC|$. Пусть P, Q, R и S середины отрезков AB, BE, DE и AD соответственно. Доказать, что четырехугольник $PQRS$ квадрат.

4. Произведение действительных чисел a, b и c равно 1 и сумма этих чисел равна сумме их обратных чисел. Доказать, что по крайней мере одно из чисел a, b и c равно 1.

5. Найти наименьшее значение n, при котором возможно покрыть квадрат $n \times n$ доминошками размера 1×2 так, что любая прямая, делящая этот квадрат на две части, делит на две части хотя бы одну доминошку.

Eesti koolinoorte XLVIII täppisteaduste olümpiaad

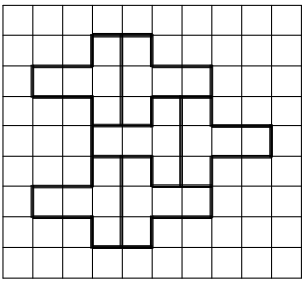
MATEMAATIKA PIIRKONDLIK VOOR

27. jaanuaril 2001. a.

Lahendused ja vastused

VII klass, I osa

1. 9,8 ja $-9{,}8$. 2. 7.45. 3. 13. 4. 46 ja 55. 5. 2,5 korda. 6. $-1\frac{1}{7}$. 7. 60°, 60°, 60°. 8. 6π cm. 9. $200\,\mathrm{cm}^3$. 10. vt. joonist 1.



Joonis 1

VII klass, II osa

1. *Vastus:* 165.

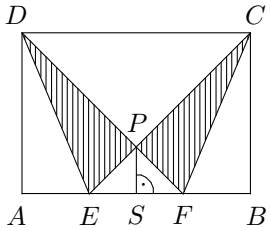
   Olgu müntide arvud, mis isa andis noorimale, keskmisele ja vanimale pojale, vastavalt N, K ja V. Ülesande tingimustest saame võrdused $V = N + 15$, $K + 30 = N$ ja $V - 30 = 45$, kust $V = 75$, $N = 60$ ja $K = 30$ ning müntide koguarv $N + K + V = 165$.

2. *Vastus:* $20\,\mathrm{cm}^2$.

   Olgu P ristküliku nurgapoolitajate CE ja DF lõikepunkt ning S punktist P ristküliku küljele AB tõmmatud ristlõigu alus-punkt (vt. joonist 2). Viirutatud kujund koosneb kolmnurkadest

DEP ja CFP, mis sümmeetria tõttu on ilmselt võrdsed. Kuna $\angle ADF = \angle BCE = 45^\circ$, siis täisnurksed kolmnurgad DAF, CBE, ESP ja FSP on võrdhaarsed ning $|AF| = |AD| = 7\,\text{cm}$ ja $|BF| = |AB| - |AF| = 3\,\text{cm}$. Samuti $|AE| = 3\,\text{cm}$ ning seega $|EF| = 4\,\text{cm}$ ja $|ES| = |FS| = |PS| = 2\,\text{cm}$. Viirutatud osa pindalaks saame niisiis

$$2 \cdot (S_{EDF} - S_{EPF}) = 2 \cdot \left(\frac{4 \cdot 7}{2} - \frac{4 \cdot 2}{2}\right) = 20\,\text{cm}^2\,.$$



Joonis 2

3. *Vastus:* 138 ja 777.

   Ainsad 10-st väiksemad algarvud on 2, 3, 5 ja 7. Et ka $10a + b$ oleks algarv, ei tohi b olla 2 ega 5. Kui $b = 3$, siis sobib ainsana $a = 2$; kui $b = 7$, siis sobib ainult $a = 3$. Korrutise $ab \cdot (10a + b)$ võimalikud väärtused on niisiis $2 \cdot 3 \cdot 23 = 138$ ja $3 \cdot 7 \cdot 37 = 777$.

VIII klass, I osa

1. $m = 25$, $n = 8$. 2. 25. 3. $(2^3)^4 = (4^3)^2 < (3^2)^4$; võib kirjutada ka $(4^3)^2 = (2^3)^4 < (3^2)^4$. 4. 7,7 ja $-10{,}3$. 5. 53 võrra. 6. $67{,}5\,\text{cm}^2$. 7. $2b - a$. 8. 2π. 9. 60°. 10. 108.

VIII klass, II osa

1. *Vastus:* 29.

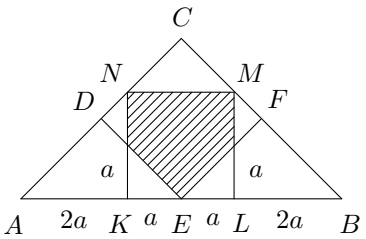
   Paneme tähele, et $2001 = 3 \cdot 23 \cdot 29$, kus 3, 23 ja 29 on kõik algarvud. Et Meelise arvuti mängiks arvu n sisestamisel muusikat, peab korrutis $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$ sisaldama teguritena kõiki neid kolme algarvu: vähim sobiv n on seega 29.

2. *Vastus:* 640 krooni.

Olgu Taavi teenitud rahasumma x krooni, siis diskettide ostuks kulus tal $\frac{1}{4}x$ krooni, bussiekskursioonile $\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}x = \frac{3}{16}x$ krooni ning jõulukinkide ostmiseks $\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{16}x = \frac{1}{8}x$ krooni. Kõige selle peale kokku kulus Taavil seega $\frac{1}{4}x + \frac{3}{16}x + \frac{1}{8}x = \frac{9}{16}x$ krooni ja alles jäi veel $x - \frac{9}{16}x = \frac{7}{16}x$ krooni. Võrrandist

$$\frac{9}{16}x - \frac{7}{16}x = 80$$

leiame $x = 8 \cdot 80 = 640$ krooni.



Joonis 3

3. *Vastus:* $\frac{1}{3}$.

Olgu ruudu $KLMN$ küljepikkus $2a$. Et täisnurksed kolmnurgad AKN ja BLM on võrdhaarsed ning $KLMN$ on ruut, siis $|AK| = |KN| = |KL| = 2a$ ning samuti $|BL| = 2a$ (vt. joonist 3). Seega $|AB| = 6a$ ning $|AE| = |EB| = 3a$. Et $CDEF$ on ruut, siis $\angle KED = \angle LEF = 45^\circ$ ning ruudu $KLMN$ viirutamata osa koosneb kahest võrdhaarsest täisnurksest kolmnurgast kaatetite pikkusega $|KE| = |EL| = a$. Viirutatud osa pindala on seega $(2a)^2 - 2\cdot\frac{a^2}{2} = 3a^2$. Võrdhaarse täisnurkse kolmnurga ABC kogupindala on $\frac{|AB|\cdot|EC|}{2} = \frac{6a\cdot 3a}{2} = 9a^2$ ning viirutatud osa moodustab sellest ühe kolmandiku.

IX klass, I osa

1. 2. 2. 8000 kr. 3. 19. 4. 15. 5. D. 6. 2. 7. $\dfrac{(2b-a)^2}{4}$. 8. 100°. 9. $4:1$. 10. 54.

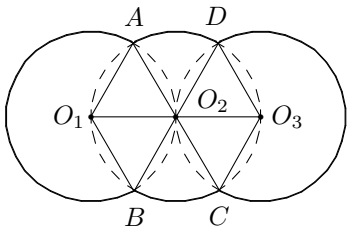
IX klass, II osa

1. *Vastus:* Julius saab 44 ja Juuli 38 aastat vanaks.

   Olgu otsitav sünniaasta number $\overline{abcd} = 1000a + 100b + 10c + d$, siis ülesande tingimustest saame

   $$2001 - (1000a + 100b + 10c + d) = 2 \cdot (a + b + c + d)$$

   ehk $1002a+102b+12c+3d = 2001$. Arvestades, et $0 \leqslant a, b, c, d \leqslant 9$ leiame kergesti, et $a = 1$ ja $b = 9$ ning $12c + 3d = 81$ ehk $4c + d = 27$. Et $0 \leqslant d \leqslant 9$, siis $18 \leqslant 4c \leqslant 27$, kust $c = 5$ või $c = 6$ ning vastavalt $d = 7$ või $d = 3$. Seega peab Juliuse sünniaasta olema 1957 ja Juulil 1963 ning 2001. aastal saavad nad vastavalt $2001 - 1957 = 44$ ja $2001 - 1963 = 38$ aastat vanaks.



Joonis 4

2. *Vastus:* $\dfrac{10\pi r}{3}$.

   Olgu vaadeldavate ringjoonte keskpunktid O_1, O_2 ja O_3 ja lõikepunktid A, B, C ja D, nagu joonisel 4 näidatud. Moodustuva kujundi rajajoon koosneb neljast ringjoone kaarest $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{BC}$, $\overset{\frown}{CD}$ ja $\overset{\frown}{DA}$. Et kolmnurgad O_1AO_2, O_1BO_2, O_2CO_3 ja O_2DO_3 on võrdkülgsed (nende kõik küljed on pikkusega r), siis on kaarte $\overset{\frown}{BC}$

ja $\overset{\frown}{DA}$ pikkus $\frac{1}{6}$ ringjoone ümbermõõdust ning kaarte $\overset{\frown}{AB}$ ja $\overset{\frown}{BC}$ pikkus $\frac{2}{3}$ ringjoone ümbermõõdust. Kujundi ümbermõõt on seega

$$\left(2 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{2}{3}\right) \cdot 2\pi r = \frac{10\pi r}{3} .$$

3. Arv $k^2 - k = k(k-1)$ kui kahe erineva paarsusega täisarvu korrutis on alati paarisarv. Kui k või $k-1$ jagub 3-ga, siis $k(k-1)$ jagub 3-ga ning järelikult ka 6-ga. Seega sobivad ülesande tingimustega ainult sellised täisarvud k, mis annavad 3-ga jagamisel jäägi 2. Olgu nüüd $k = 3a + 2$, siis

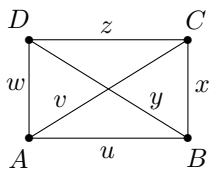
$$k^2 - k - 2 = (9a^2 + 12a + 4) - (3a + 2) - 2 = 9(a^2 + a)$$

jagub 18-ga, sest $a^2 + a = a(a+1)$ on paarisarv.

4. *Vastus:* 6, 7 või 9 raamatut.

Tähistame õpilased tähtedega A, B, C ja D ning vaatleme kolme võimalikku juhtu.

a) Ühegi õpilaste paari ostetud ühesugune raamat ei lange kokku ühegi teise paari ostetud ühesuguse raamatuga. Sel juhul on iga õpilase ostetud kolmest raamatust igaüks tema ühiseks raamatuks ühega ülejäänud kolmest õpilasest, s.t. rohkem raamatuid peale nende keegi õpilastest ei ostnud. Kuna neljast õpilasest moodustub kokku 6 erinevat paari, ostsid õpilased sel juhul kokku 6 erinevat raamatut. (nt. A ostis raamatud u, v, w, B ostis raamatud u, x, y, C ostis raamatud v, x, z ning D ostis raamatud w, y, z: vt. joonist 5).



Joonis 5

b) Kolm õpilast (näiteks A, B ja C) ostsid ühesuguse raamatu, mida neljas õpilane (sel juhul D) ei ostnud. Õpilaste A ja D,

B ja D ning C ja D ostetud ühised raamatud erinevad siis sellest raamatust ning on erinevad ka omavahel (sest vastasel korral ostnuks mõni paar õpilastest A, B ja C rohkem kui ühe ühise raamatu). Et igaüks õpilastest A, B ja C pidi ostma veel ühe raamatu ning need peavad olema erinevad nii omavahel kui ka eespool mainitutest, D aga rohkem raamatuid ei ostnud, siis osteti sel juhul 7 erinevat raamatut.

c) Kõik neli õpilast ostsid ühe ja sama raamatu. Siis on lihtne veenduda, et ülejäänud $4 \cdot 2$ ostetud raamatut on kõik erinevad ning järelikult osteti sel juhul kokku 9 erinevat raamatut.

X klass

1. *Vastus:* 0.

Lahendus 1. Teisendame võrrandi kujule

$$\sqrt{x+a} + (x+a) + (b-a) = 0$$

ning paneme tähele, et kui see võrdus kehtib mingi reaalarvu x jaoks, siis $x + a \geqslant 0$ ja $\sqrt{x+a} \geqslant 0$. Seega $b - a \leqslant 0$. Teisalt on $b - a = 0$ korral võrrandil ilmselt olemas reaalarvuline lahend $x = -a$.

Lahendus 2. Teisendame võrrandi kujule

$$\sqrt{x+a} + (x+a) + (b-a) = 0$$

ning tähistame $y = \sqrt{x+a}$ ja $c = b - a$. Saadud ruutvõrrandi $y^2 + y + c = 0$ suurem lahend on $y = \dfrac{-1+\sqrt{1-4c}}{2}$, mis on mittenegatiivne, kui $c \leqslant 0$. Mistahes mittenegatiivse y väärtuse korral saame seosest $y = \sqrt{x+a}$ leida ka sobiva x väärtuse, mis on esialgse võrrandi lahendiks.

Lahendus 3. Viies antud võrrandis $x + b$ teisele poole ning tõstes saadud võrduse mõlemad pooled ruutu, saame

$$x + a = (x+b)^2 \ .$$

Teisendamisel saame siit ruutvõrrandi $x^2 + (2b-1)x + (b^2 - a) = 0$,

mille diskriminant on $D = (2b-1)^2 - 4(b^2 - a) = 1 - 4(b-a)$. Saadud ruutvõrrandil on olemas reaalarvulised lahendid

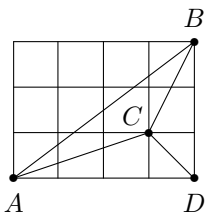
$$x = \frac{(1-2b) \pm \sqrt{D}}{2} \ ,$$

kui $D \geqslant 0$ ehk $b - a \leqslant \frac{1}{4}$. Selleks aga, et x oleks ka esialgse võrrandi lahend, peavad täiendavalt olema täidetud tingimused $x + a \geqslant 0$ ja $x + b \leqslant 0$. Asendades siin $x = \dfrac{(1-2b) - \sqrt{1-4(b-a)}}{2}$ näeme, et esimene neist tingimustest on täidetud alati ning teine parajasti siis, kui $b - a \leqslant 0$.

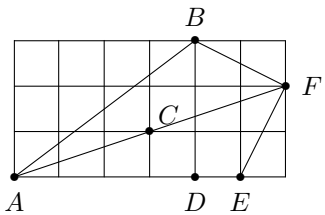
2. *Lahendus 1.* Näitame, et punkt C on võrdsel kaugusel sirgetest AB ja AD. Selleks lisame lõigud BC ja CD (vt. joonist 6) ning näitame, et kolmnurga ABC tipust C tõmmatud kõrgus on 1. Tõepoolest, kolmnurga ABC pindala on

$$S_{ABC} = S_{ABD} - S_{ACD} - S_{BCD} = \frac{4 \cdot 3}{2} - \frac{4 \cdot 1}{2} - \frac{3 \cdot 1}{2} = \frac{5}{2}$$

ning Pythagorase teoreemist saame $|AB| = 5$, mistõttu tipust C tõmmatud kõrgus on 1.



Joonis 6



Joonis 7

Lahendus 2. Lisame punktid E ja F nii, nagu näidatud joonisel 7. Siis Pythagorase teoreemist saame $|AB| = 5 = |AE|$. Et ka $|BF| = |FE|$, siis kolmnurgad ABF ja AEF on võrdsed, mistõttu $\angle BAC = \angle BAF = \angle EAF = \angle CAD$.

Lahendus 3. Leiame $\tan\angle CAD = \dfrac{1}{3}$ ja $\tan\angle BAD = \dfrac{3}{4}$. Et

$$\tan 2\angle CAD = \frac{2\tan\angle CAD}{1-\tan^2\angle CAD} = \frac{3}{4} = \tan\angle BAD$$

ning $\angle BAD$ ja $2\angle CAD$ on mõlemad teravnurgad, siis peab olema $\angle BAD = 2\angle CAD$ ehk $\angle BAC = \angle CAD$.

Lahendus 4. Näitame jällegi, et punkt C on võrdsel kaugusel sirgetest AB ja AD. Võtame kasutusele ristkoordinaatide süsteemi, mille koordinaatide alguspunkt on punkt A ning koordinaattelgedeks on seda läbivad ruudustiku jooned — siis $C(3,1)$, sirge AB võrrand on $3x-4y=0$ ning sellele punktist C tõmmatud ristsirge võrrand on $4x+3y=15$. Nende sirgete lõikepunkti koordinaatideks saame $(2{,}4; 1{,}8)$ ning punkti C kaugus sirgest AB on seega $\sqrt{0{,}6^2+0{,}8^2}=1$.

3. *Vastus:* $(4,5)$, $(5,4)$, $(3,10)$ ja $(10,3)$.

Lahendus 1. Üldisust kitsendamata eeldame, et $a \geqslant b$. Siis

$$\frac{2}{5} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{1}{ab} \leqslant \frac{2}{b} - \frac{1}{ab} < \frac{2}{b}\,,$$

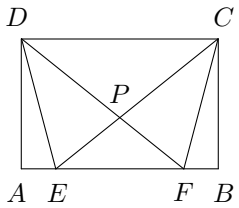
mistõttu $b<5$. Avaldades ülesandes antud võrdusest a, saame $a = \dfrac{5b-5}{2b-5}$, kust a positiivsuse tõttu $b>2$. Järelejäänud võimalused $b=3$ ja $b=4$ annavad vastavalt $a=10$ ja $a=5$; ülejäänud kaks sobivat arvupaari saame a ja b väärtuste vahetamisel.

Lahendus 2. Kirjutame võrduse $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}-\dfrac{1}{ab}=\dfrac{2}{5}$ ümber kujul $\dfrac{a-1}{a}\cdot\dfrac{b-1}{b}=\dfrac{3}{5}$ ning paneme tähele, et avaldise $\dfrac{x-1}{x}=1-\dfrac{1}{x}$ väärtus kasvab x kasvades. Seetõttu $a\geqslant 5$ ja $b\geqslant 5$ korral on $\dfrac{a-1}{a}\cdot\dfrac{b-1}{b} \geqslant \dfrac{4}{5}\cdot\dfrac{4}{5} = \dfrac{16}{25} > \dfrac{3}{5}$. Kui aga $a\leqslant 2$ või $b\leqslant 2$, siis $\dfrac{a-1}{a}\cdot\dfrac{b-1}{b} < 1\cdot\dfrac{1}{2} < \dfrac{3}{5}$. Seega üks arvudest a ja b peab olema 3 või 4. Neid võimalusi läbi vaadates leiamegi sobivad neli arvupaari.

4. Kolmnurga CDE pindala moodustab poole ristküliku $ABCD$ pindalast, sest selle alus CD ja sellele tõmmatud kõrgus on ühtlasi ristküliku aluseks ja kõrguseks (vt. joonist 8). Seega

$$S_{CDP} + S_{DPE} = S_{ADE} + S_{BCF} + S_{EFP} + S_{CPF} \ ,$$

millest järeldub nõutav võrdus $S_{CDP} = S_{ADE} + S_{BCF} + S_{EFP}$, kuna sümmeetria tõttu $S_{DPE} = S_{CPF}$.



Joonis 8

5. *Vastus:* Ei või.

Näitame, et kui Abababi keeles on kolm 4-tähelist, kümme 5-tähelist ja kolmkümmend 6-tähelist sõna, siis ei saa selles keeles olla rohkem kui neli 7-tähelist sõna.

Kuna Abababi keeles on ainult kaks tähte A ja B, siis erinevaid 4-tähelisi sõnu saab selles keeles olla ülimalt $2^4 = 16$. Kui selles keeles on kolm 4-tähelist sõna, siis need ei saa enam olla pikemate sõnade alguseks, s.t. 4-tähelisi järjendeid, millega saavad alata 5-tähelised sõnad, on ülimalt $16 - 3 = 13$. Kuna igale sellisele järjendile saab lõppu lisada kas A või B, siis 5-tähelisi sõnu ei saa olla rohkem kui $2 \cdot 13 = 26$. Kui tegelikult on kümme 5-tähelist sõna, siis üle jääb ülimalt $26 - 10 = 16$ sellist 5-tähelist järjendit, millega saavad alata 6-tähelised sõnad, ning 6-tähelisi sõnu ei saa seega olla rohkem kui $2 \cdot 16 = 32$. Kui nüüd kuuetähelisi sõnu on tegelikult kolmkümmend, siis 7-täheliste sõnade võimalikeks algusteks jääb 6-tähelisi järjendeid järele ülimalt $32 - 30 = 2$ ning 7-tähelisi sõnu võib seega olla ülimalt $2 \cdot 2 = 4$.

XI klass

1. *Vastus:* ei, sest valitsuse liikmete palk saab seaduse rakendumisel olema negatiivne ja seega väiksem lihtkodanike keskmisest palgast.

Olgu Kisanea valitsuse liikme palk uue seaduse rakendumisel b ning valitsusse mittekuuluvate palgasaajate arv $K = N - M$ (kuna ülesande tingimuste kohaselt on valitsusse mittekuuluvate palgasaajate keskmine palk $c > 0$, siis ilmselt kõik Kisanea palgasaajad ei kuulu valitsusse, s.t. $K > 0$). Siis kehtib võrdus

$$b : \frac{Mb + Kc}{N} = 7 \cdot (N : M) \ ,$$

ehk $7 \cdot (Mb + Kc) = Mb$, kust $7Kc = -6Mb$. Siit $b < 0$ ning seega $b < c$.

2. *Vastus:* ainus võimalik väärtus on $a + b + c = 52$.

   Ülesandes antud võrdusest saame

$$(a{+}1)(b{+}1)(c{+}1) = abc + ab + bc + ca + a + b + c + 1 = 2001 \, .$$

   Et $2001 = 3 \cdot 23 \cdot 29$, kus kõik tegurid on algarvud, ning arvude a, b, c positiivsuse tõttu on tegurid $a{+}1$, $b{+}1$ ja $c{+}1$ kõik ühest suuremad, siis peab olema $\{\, a{+}1,\ b{+}1,\ c{+}1 \,\} = \{\, 3,\ 23,\ 29 \,\}$, kust $a + b + c = 52$.

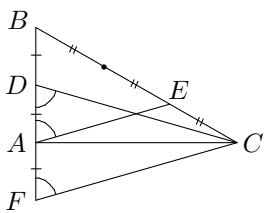
3. *Lahendus 1.* Olgu F selline punkt kolmnurga külje AB pikendusel üle tipu A, et $|FA| = |AD|$ (vt. joonist 9). Et

$$|BA| : |AF| = 2 : 1 = |BE| : |EC| \ ,$$

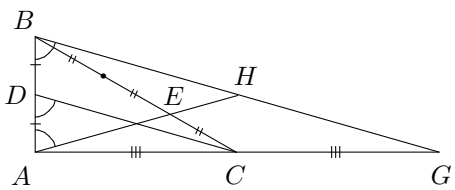
   siis lõigud AE ja FC on paralleelsed ning

$$\angle DFC = \angle BFC = \angle BAE = \angle ADC = \angle FDC \ .$$

   Seega on kolmnurk DCF võrdhaarne ning selle alusele DF tõmmatud mediaan CA on ühtlasi kõrguseks, s.t. $\angle CAB = 90^\circ$.



Joonis 9



Joonis 10

Lahendus 2. Olgu G selline punkt kolmnurga külje AC pikendusel üle tipu C, et $|AC| = |GC|$, ning olgu H lõigu AE pikenduse lõikepunkt sirgega BG (vt. joonist 10). Et lõik BC on kolmnurga ABG mediaan, mille punkt E jaotab suhtes $2:1$, siis ka lõik AH on kolmnurga ABG mediaan ehk $|BH| = |GH|$. Kuna CD on kolmnurga ABG kesklõik, siis $\angle HBA = \angle CDA = \angle BAH$, s.t. kolmnurk AHB on võrdhaarne ning $|AH| = |BH| = |GH|$. Seega H on kolmnurga ABG ümberringjoone keskpunkt ja BG selle diameeter ning nurk BAG on diameetrile toetuv piirdenurk, mistõttu $\angle BAC = \angle BAG = 90^\circ$.

4. Vaadeldavate arvude võimalikud ühised algtegurid on ainult 2, 3, 5 ja 7, sest suuremate algarvudega saab jaguda ülimalt üks mistahes 10-st järjestikusest naturaalarvust. Nende 10 järjestikuse arvu viimased numbrid on kõik erinevad, s.t. igaüks numbritest 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 on viimaseks numbriks täpselt ühele neist arvudest. Arvud, mille viimane number on 1, 3, 7 ja 9, ei jagu 2-ga ega 5-ga ning ülimalt kaks neist võivad jaguda 3-ga ja ülimalt üks võib jaguda 7-ga (sest nende hulgas ei ole kolme arvu, mille vahed jaguksid 3-ga, ega kaht arvu, mille vahe jaguks 7-ga). Seega leidub vaadeldava 10 arvu hulgas vähemalt üks selline, mille algtegurite hulgas pole 2, 3, 5 ega 7 ning mis vastavalt lahenduse algul tehtud tähelepanekule on seega ülejäänutega ühistegurita.

5. *Vastus:* A_0, A_{n+1}, A_1, A_{n+2}, A_2, $\ldots$, A_{n-1}, A_{2n}, A_n, A_0 või sellele vastupidises järjekorras.

   Tõlgendame vaadeldava $(2n+1)$-nurga tippude indekseid "*modulo* $2n+1$" (s.t. loeme $A_{2n+1} = A_0$, $A_{2n+2} = A_1$ jne.) ning maksimaalse pikkusega murdjoone saamiseks püüame selle lülidena kasutada ainult $(2n+1)$-nurga maksimaalse pikkusega diagonaale, s.t. selliseid, mille otstippude indeksite vahe on n või $n+1$. Et vaadeldava hulknurga igal tipul on selliseid naabertippe täpselt kaks, siis olles valinud algustipu ja sellele järgneva tipu, on edasine tippude valik üheselt määratud. Näiteks, alustades tipust A_0 ja tõmmates sealt esimese lõigu tippu A_{n+1}, on järgmistena läbitavad tipud A_1, A_{n+2}, A_2, A_{n+3}, A_3, $\ldots$. Jääb veel tõestada, et saadav murdjoon on tõepoolest $2n+1$ lüliga, s.t. tippu A_0 jõuame tagasi alles pärast kõigi ülejäänud tippude läbimist. Selleks paneme tähele, et saadava murdjoone tippudeks "üle ühe" on A_0, A_1, A_2, $\ldots$ ning

nende vahel läbitavateks tippudeks A_{n+1}, A_{n+2}, A_{n+3}, ... Näeme, et tippu $A_0 = A_{2n+1}$ jõuame tagasi tõepoolest alles pärast tippude A_0, A_1, A_2, ..., A_n ja A_{n+1}, A_{n+2}, ..., A_{2n-1} läbimist ning vahepeal läbime kõik ülejäänud tipud täpselt üks kord.

XII klass

1. *Vastus:* b) ka pöördlause (kui ab ja $a+b$ on ühistegurita, siis a ja b on samuti ühistegurita) kehtib.

   Oletame vastuväiteliselt, et arvudel ab ja $a+b$ leidub ühine algtegur p. Et algarv p on korrutise ab jagaja, peab ta olema a või b jagaja — oletame üldisust kitsendamata, et p on a jagaja. Kuna aga p on ka $a+b$ jagaja, siis on ta samuti arvu $b = (a+b) - a$ jagaja, mis on vastuolus eeldusega, et arvud a ja b on ühistegurita. Saadud vastuolu näitab, et ükski algarv ei saa olla ab ja $a+b$ ühiseks teguriks, s.t. need arvud on samuti ühistegurita.

   Näitame nüüd, et kehtib ka tõestatud lause pöördlause. Tõepoolest, arvude a ja b mistahes ühine tegur d on ühiseks teguriks ka arvudele ab ja $a+b$ — seega juhul, kui ab ja $a+b$ on ühistegurita, on ka a ja b ühistegurita.

2. *Lahendus 1.* Paarisarvulise n korral

$$\begin{aligned} a_n &= (1^2 - 2^2) + (3^2 - 4^2) + \ldots + \big((n-1)^2 - n^2\big) = \\ &= (1-2)\cdot(1+2) + (3-4)\cdot(3+4) + \ldots + \\ &\qquad + \big((n-1) - n\big)\cdot\big((n-1) + n\big) = \\ &= -\big(1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + (n-1) + n\big)\,. \end{aligned}$$

   Paarituarvulise n korral

$$\begin{aligned} a_n &= 1^2 - (2^2 - 3^2) - (4^2 - 5^2) - \ldots - \big((n-1)^2 - n^2\big) = \\ &= 1^2 - (2-3)\cdot(2+3) - (4-5)\cdot(4+5) - \ldots - \\ &\qquad - \big((n-1) - n\big)\cdot\big((n-1) + n\big) = \\ &= 1 + \big(2 + 3 + 4 + 5 + \ldots + (n-1) + n\big)\,. \end{aligned}$$

   Lahendus 2. Tõestame induktsiooniga n järgi, et

$$a_n = (-1)^{n-1}\cdot(1 + 2 + \ldots + n)\,.$$

Ilmselt kehtib see $n = 1$ korral, kus $a_1 = 1 = (-1)^0 \cdot 1$. Eeldame nüüd, et

$$a_n = (-1)^{n-1} \cdot (1 + 2 + \ldots + n) = (-1)^{n-1} \cdot \frac{n(n+1)}{2} ,$$

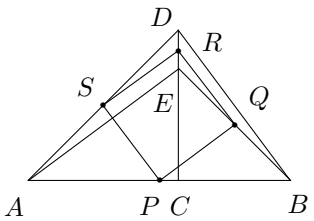
ning leiame

$$a_{n+1} = a_n + (-1)^n \cdot (n+1)^2 = (-1)^n \cdot \Big((n+1)^2 - \frac{n(n+1)}{2}\Big) =$$

$$= (-1)^n \cdot \frac{(n+1)(n+2)}{2} = (-1)^n \cdot \big(1 + 2 + \ldots + (n+1)\big) .$$

Seega kehtib võrdus $a_n = (-1)^{n-1} \cdot (1 + 2 + \ldots + n)$ iga n korral, ning $|a_n| = 1 + 2 + \ldots + n$.

3. *Lahendus 1.* Kui C ei ole lõigu AB keskpunkt, siis punktid D ja E on erinevad ning PQ, QR, RS ja SP on vastavalt kolmnurkade ABE, DEB, ADE ja DAB kesklõigud (vt. joonist 11), mistõttu lõigud PQ ja RS on paralleelsed lõiguga AE, lõigud QR ja SP on paralleelsed lõiguga DB ning $|PQ| = |RS| = \frac{1}{2}|AE|$ ja $|QR| = |SP| = \frac{1}{2}|DB|$. Seega on $PQRS$ rööpkülik. Et täisnurksed kolmnurgad ACE ja DCB on teineteisest saadavad pöördega $90°$ võrra, siis on nende hüpotenuusid AE ja DB võrdse pikkusega ja risti, mistõttu $PQRS$ on ruut.



Joonis 11

Kui C on lõigu AB keskpunkt, siis $R = D = E$ on võrdhaarse täisnurkse kolmnurga ADB täisnurga tipp ning $P = C$, Q ja S

on selle kolmnurga külgede keskpunktid — edasine arutlus jääb samaks.

Lahendus 2. Kasutame ristkoordinaatide süsteemi, kus koordinaatide alguspunkt on C ning koordinaattelgedeks on sirged AB ja CD. Olgu $|AC| = |DC| = 2a$ ja $|BC| = |EC| = 2b$, siis $A(-2a, 0)$, $B(2b, 0)$, $D(0, 2a)$ ja $E(0, 2b)$ ning $P(b-a, 0)$, $Q(b, b)$, $R(0, a+b)$ ja $S(-a, a)$. Nüüd on lihtne kontrollida, et

$$|PQ| = |QR| = |RS| = |SP| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

ning

$$|PR| = |QS| = \sqrt{2a^2 + 2b^2}\ ,$$

mistõttu $PQRS$ on ruut.

4. Ülesande tingimustest saame

$$a + b + c = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{bc + ca + ab}{abc} = bc + ca + ab\ .$$

Seega

$$(a-1)(b-1)(c-1) = abc - (ab + bc + ca) + (a + b + c) - 1 = 0,$$

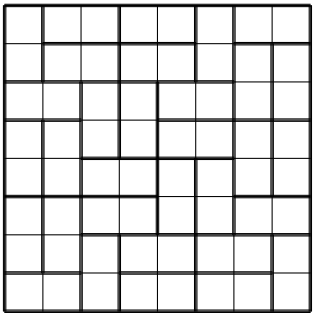
s.t. vähemalt üks arvudest a, b ja c on 1.

5. *Vastus:* $n = 8$.

Ilmselt saab $n \times n$ ruutu katta 1×2 doominokividega ainult paarisarvulise n korral. Kui mistahes seda ruutu kaheks osaks jaotav sirge jaotab kaheks osaks ka vähemalt ühe kivi, siis peab ruudustiku iga horisontaaljoon ja iga vertikaaljoon lõikama vähemalt üht kivi. Kui selline joon lõikaks aga ainult üht kivi, siis jääks kummalgi pool seda joont üle paaritu arv ruute, mida ei saaks katta ülejäänud kividega. Seega peab ruudustiku iga horisontaaljoon ja iga vertikaaljoon lõikama vähemalt kaht kivi. Kivide koguarv $\dfrac{n^2}{2}$ ei saa seetõttu olla väiksem kui $4\cdot(n-1)$. Võrratuse $\dfrac{n^2}{2} \geqslant 4\cdot(n-1)$

saame teisendada kujule $(n-4)^2 \geqslant 8$, mida vähima positiivse paarisarvuna rahuldab $n = 8$.

Sobiv kivide paigutus $n = 8$ korral, mille korral mistahes ruutu kaheks osaks jaotav sirge lõikab vähemalt ühte kivi, on näidatud joonisel 12.



Joonis 12

Eesti koolinoorte XLVIII täppisteaduste olümpiaad

MATEMAATIKA PIIRKONDLIK VOOR

27. jaanuaril 2001. a.

Juhised lahenduste hindamiseks

Lp. hindaja!

1. Juhime Teie tähelepanu sellele, et alljärgnevas on 7.–9. klasside olümpiaadi I osa (testi) ning kõikide ülejäänud ülesannete hindamisjuhised esitatud erinevalt. Testide iga küsimuse jaoks on eraldi loetletud või kirjeldatud vastused, mille eest tuleks anda vastavalt kaks punkti või üks punkt (s.t. vastavaid punkte ühe küsimuse piires *ei tule* liita). Seevastu kõigi teiste ülesannete lahendused on jaotatud võimalust mööda osadeks (etappideks) ning näidatud lahenduse iga osa eest antav punktide arv (s.t. ühe ülesande eest antava punktisumma saamiseks *tuleb* lahenduse erinevate osade eest antud punktid liita).

2. Enamiku ülesannete korral (v.a. testid ja tõestusülesanded) on hindamisjuhiste lõpus näidatud, mitu punkti anda ainult õige vastuse eest. See hinne on mõeldud juhuks, kui puhtandis on antud ainult ülesande vastus ning mustand (üldse või selle ülesande kohta) *puudub*. Mustandi olemasolul tuleks hindamisel arvestada ka seal kirjapandut.

3. Kahtlemata esineb õpilaste töödes ka mõttekäike, mis ei mahu meie poolt pakutud skeemidesse. Selliste lahenduste hindamisel tuleb lähtuda eeskätt sellest, *kui suur osa* antud ülesandest on õpilasel lahendatud (arvestades seejuures lahenduse üksikute elementide erinevat raskusastet).

4. *Mistahes* täieliku ja matemaatiliselt korrektse lahenduse eest tuleb igal juhul anda maksimumpunktid, sõltumata selle lahenduse pikkusest või otstarbekusest võrreldes teiste lahendusviisidega.

VII klass, I osa.

1. Antud vastuseks õiged arvud 9,8 ja −9,8 ükskõik kummas järjekorras (või samad arvud harilike murdude või segaarvudena): 2 p.

   Antud vastuseks ainult 9,8 või ainult −9,8: 1 p.

2. Antud õige vastus 7.45: 2 p.

3. Antud õige vastus 13: 2 p.

   Antud vastuseks 7: 1 p.

4. Antud vastuseks õiged arvud 46 ja 55 ükskõik kummas järjekorras: 2 p.

   Antud vastuseks arvud, mille vahe on 9 ning mis erinevad õigetest kuni 2 võrra (44 ja 53, 45 ja 54, 47 ja 56 või 48 ja 57): 1 p.

5. Antud õige vastus 2,5 (või $2\frac{1}{2}$ või $\frac{5}{2}$): 2 p.

6. Antud õige vastus $-1\frac{1}{7}$ (või $-\frac{8}{7}$): 2 p.

   Antud vastuseks $1\frac{1}{7}$ või $\frac{8}{7}$: 1 p.

7. Antud õige vastus $60°$, $60°$, $60°$ (või $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{3}$): 2 p.

   Antud vastuseks ainult üks väärtus $60°$ või $\frac{\pi}{3}$ koos sobiva selgitusega (nt. „kõik $60°$“): 2 p.

   Antud vastuseks ainult üks väärtus $60°$ või $\frac{\pi}{3}$ ilma selgituseta: 1 p.

   Antud vastuseks arvud 60, 60, 60 või ainult arv 60 ilma kraadimärgita: 1 p.

8. Antud õige vastus 6π cm: 2 p.

   Antud vastuseks 6π ilma ühikuta või vale ühikuga: 1 p.

   Antud vastuseks ümardatud väärtus *koos õige ühikuga* (18,84 cm või täpsem): 1 p.

9. Antud õige vastus $200\,\mathrm{cm}^3$: 2 p.

   Antud vastuseks arv 200 ilma ühikuta või vale ühikuga: 1 p.

10. Näidatud joonisel õige jaotus: 2 p.

VII klass, II osa.

1. Ülesande tingimuste kirjapaneku eest sobivate võrranditena: 3 p.

   Kolmele pojale antud müntide arvude leidmise eest: 3 p.

   Õige lõppvastuse (müntide koguarvu) leidmise eest: 1 p.

   Ainult õige vastuse eest ilma selgitusteta anda 2 punkti.

   Kui lahenduses on poegadele antud müntide arvud leitud korrektse sõnalise arutluse abil ilma võrrandeid koostamata, anda selle osa eest ikkagi kokku 6 punkti (ning lõppvastuse eest, kui see on olemas, lisaks 1 punkt).

2. Viirutatud osa pindala avaldamise eest selliste kujundite pindalade kaudu, mida saab kergesti arvutada: 2 p.

   Lõigu EF (või poole sellest) pikkuse leidmise eest: 2 p.

   Lõikude CE ja DF lõikepunkti kauguse leidmise eest ristküliku küljest AB või CD: 1 p.

   Lahenduse lõpuleviimise eest: 2 p.

   Ainult õige vastuse eest ilma selgitusteta anda 2 punkti.

   Tähelepaneku eest, et viirutatud osa koosneb kahest *võrdsest* kolmnurgast, anda 1 punkt, kui lahenduses ei ole muud ülaltoodud skeemi järgi hinnatavat tehtud.

3. Arvust 10 väiksemate algarvude leidmise eest: 1 p.

   Tähelepaneku eest, et $10a + b$ saab olla algarv ainult $b = 3$ ja $b = 7$ korral: 2 p.

   Sobivate a väärtuste leidmise eest $b = 3$ ja $b = 7$ jaoks: 3 p.

   Lõppvastuse (korrutise $ab \cdot (10a+b)$ võimalike väärtuste) leidmise eest: 1 p.

   Kui on õigesti analüüsitud ainult üks juhtudest $b = 3$ ja $b = 7$, anda kahe viimase osa eest kokku 2 punkti (s.t. lahenduse eest tervikuna mitte üle 5 punkti).

   Ainult õige vastuse eest ilma selgitusteta anda 2 punkti.

VIII klass, I osa.

1. Antud õige vastus $m = 25$, $n = 8$: 2 p.

   Antud vastuseks $m = 8$, $n = 25$: 1 p.

2. Antud õige vastus 25 (või „$a = 25$“): 2 p.

3. Antud õige vastus $(2^3)^4 = (4^3)^2 < (3^2)^4$ või $(4^3)^2 = (2^3)^4 < (3^2)^4$: 2 p.

   Antud vastuseks $8^4 = 64^2 < 9^4$ või $64^2 = 8^4 < 9^4$: 2 p.

   Antud vastuseks $4096 = 4096 < 6561$: 1 p.

   Vastuses on ühte ruutu kirjutatud märk õige (väljendab õigesti suurussuhet temast kahele poole kirjutatud avaldiste vahel): 1 p.

4. Antud vastuseks õiged arvud 7,7 ja −10,3 ükskõik kummas järjekorras (või samad arvud harilike murdude või segaarvudena): 2 p.

   Antud vastuseks −7,7 ja 10,3: 1 p.

   Antud vastuseks ainult üks õige arv (7,7 või −10,3) või üks õige ja teine vale arv: 1 p.

5. Antud õige vastus 53 (või „53 võrra“): 2 p.

   Antud vastuseks 52 või 54: 1 p.

   Antud vastuseks arvud 137 ja 190 ükskõik kummas järjekorras: 1 p.

6. Antud õige vastus $67{,}5\,\mathrm{cm}^2$ (või $67\frac{1}{2}\,\mathrm{cm}^2$ või $\frac{135}{2}\,\mathrm{cm}^2$): 2 p.

   Antud vastuseks arv 67,5, $67\frac{1}{2}$ või $\frac{135}{2}$ ilma ühikuta või vale ühikuga: 1 p.

7. Antud õige vastus $2b - a$ (või sellega võrdne avaldis): 2 p.

   Antud vastuseks $a - 2b$ või $2a - b$: 1 p.

8. Antud õige vastus 2π: 2 p.

   Antud vastuseks ümardatud väärtus (6,28 või täpsem): 1 p.

   Antud vastuseks π või $\frac{1}{2\pi}$: 1 p.

9. Antud õige vastus 60° (või $\frac{\pi}{3}$): 2 p.

   Antud vastuseks arv 60 ilma kraadimärgita: 1 p.

10. Antud õige vastus 108: 2 p.

VIII klass, II osa.

1. Arvu 2001 algteguriteks lahutamise eest: 2 p.

   Tähelepaneku eest, et korrutis $1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$ peab teguritena sisaldama arvu 2001 kõiki algtegureid: 3 p.

   Selle tähelepaneku ning arvu 2001 algteguriteks lahutuse põhjal järelduse tegemise eest, et vähim sobiv arv on 29: 2 p.

   Ainult õige vastuse eest ilma selgitusteta anda 2 punkti.

   Kui on ilma selgitusteta antud vastuseks 2001 või mõni muu sobiv, kuid mitte vähim võimalik arv, anda 0 punkti.

2. Üksikute kulutatud summade avaldamise eest teenitud rahasumma kaudu: 3 p.

   Kulutatud raha kogusumma ja allesjäänud summa avaldamise eest: 2 p.

   Teenitud rahasumma leidmiseks sobiva võrrandi koostamise ja lahendamise eest: 2 p.

   Ainult õige vastuse eest ilma selgitusteta anda 2 punkti.

   Kui lahenduses on ainult avaldatud diskettide ostmiseks ja bussiekskursiooniks kulutatud summad teenitud rahasumma kaudu, anda 1 punkt.

3. Viirutatud kujundi või sellest ülejääva viirutamata osa pindala avaldamise eest mingi ühe lõigu pikkuse või ühe kujundi pindala kaudu: 4 p.

   Terve kolmnurga ABC pindala avaldamise eest sama lõigu pikkuse või sama kujundi pindala kaudu: 2 p.

   Vastuse (pindalade suhte) leidmise eest: 1 p.

   Õigeks vastuseks lugeda ka "$33\frac{1}{3}$ protsenti".

Kui lahenduses on avaldatud ainult terve kolmnurga ABC pindala mingi lõigu pikkuse või osakujundi pindala kaudu, kuid viirutatud kujundi pindala avaldamiseks sama lõigu pikkuse või sama kujundi pindala kaudu pole midagi olulist tehtud, anda mitte üle 1 punkti.

Ainult õige vastuse eest ilma selgitusteta anda 1 punkt.

IX klass, I osa.

1. Antud õige vastus 2: 2 p.
   Antud vastuseks 7 või 19: 1 p.

2. Antud õige vastus 8000 kr (või 8000 EEK): 2 p.
   Antud vastuseks arv 8000 ilma ühikuta: 1 p.

3. Antud õige vastus 19 (või $a = 19$): 2 p.

4. Antud õige vastus 15: 2 p.
   Antud vastuseks 14 või 16: 1 p.

5. Antud õige vastus D: 2 p.
   Antud vastuseks B või F: 1 p.

6. Antud õige vastus 2 (või arv 2 koos mingi pikkusühikuga): 2 p.
   Antud vastuseks 3 või 6 (või üks neist arvudest koos mingi pikkusühikuga): 1 p.

7. Antud õige vastus $\frac{(2b-a)^2}{4}$ või $\frac{(a-2b)^2}{4}$ (või sellega võrdne avaldis): 2 p.
   Antud vastuseks $\frac{(2a-b)^2}{4}$, $\frac{(b-2a)^2}{4}$, $\frac{(2b-a)^2}{2}$ või $\frac{(a-2b)^2}{2}$: 1 p.

8. Antud õige vastus 100°: 2 p.
   Antud vastuseks arv 100 ilma kraadimärgita: 1 p.

9. Antud õige vastus $4:1$ või 4: 2 p.
   Antud vastuseks $1:4$ või $\frac{1}{4}$: 1 p.

10. Antud õige vastus 54: 2 p.

IX klass, II osa.

1. Sobiva võrrandi koostamise eest: 2 p.

   Sünniaasta tuhandeliste ja sajaliste numbri leidmise eest: 1 p.

   Sünniaasta kümneliste ja üheliste numbri võimalike väärtuste leidmise eest: 3 p.

   Õige lõppvastuse leidmise eest: 1 p.

   Tuhandeliste ja sajaliste numbri leidmise eest anda 1 punkt ka siis, kui seda on põhjendatud sisuliste kaalutlustega (nt. "et Julius töötab 2001.a. arveametnikuna, peab tema sünniaasta olema 20. sajandil").

   Kui kümneliste ja üheliste numbri jaoks on leitud ainult üks võimalik väärtuste paar, siis anda selle osa eest 1 punkt (ning kui sellest on tuletatud ühe tegelase õige vanus, siis lisaks ka lõppvastuse eest ettenähtud 1 punkt).

   Ainult õige vastuse eest ilma selgitusteta anda 2 punkti (ühe õige vanuse eest 1 punkt).

2. Kujundi ümbermõõdu avaldamise eest ringjoonte kaarte pikkuste kaudu: 2 p.

   Vajalike kaarte pikkuste arvutamise eest: 4 p.

   Õige lõppvastuse leidmise eest: 1 p.

   Ainult õige vastuse eest ilma selgitusteta anda 2 punkti.

3. Idee eest vaadelda erinevaid jääke 3 või 6 järgi: 1 p.

   Näitamise eest, et $k = 3m$ ja $k = 3m + 1$ korral $k^2 - k$ jagub 6-ga: 3 p.

   Näitamise eest, et $k = 3m + 2$ korral $k^2 - k - 2$ jagub 18-ga: 3 p.

4. Ühe lahendi (6, 7 või 9) leidmise eest: 1 p.

   Teise lahendi leidmise eest: 1 p.

   Kolmanda lahendi leidmise eest: 2 p.

   Arutluse täielikkuse eest (s.t. näitamise eest, et rohkem lahendeid ei ole): 3 p.

Tõestus, et peale 6, 7 ja 9 rohkem lahendeid ei ole, ei tarvitse olla (ja enamikus lahendustes ilmselt ei ole) tehtud eraldi, vaid tuleneb sellest, et lahendite otsimisel on kõik võimalikud juhud ammendavalt läbi vaadatud. Hindamisskeemis selle eest ette nähtud 3 punkti andmisel tuleb seega hinnata esitatud loogilise arutluse täielikkust; 1 või 2 punkti tuleb anda selle osa eest ka siis, kui arutlusvea tõttu on mõni lahend leidmata jäänud, kuid võimalikeks juhtudeks jaotus on põhimõtteliselt õigesti tehtud.

Ainult õige vastuse eest (kõik kolm lahendit) *ilma selgitusteta* anda 2 punkti, kahe lahendi korral 1 punkt ja 1 lahendi korral 0 punkti.

X klass

1. Selle ülesande lahendamisel on oluline teisendada etteantud võrrandit nii, et oleks võimalik hinnata saadava võrduse osade märke. Vastasel korral (viies kohe $x+b$ teisele poole ning tõstes saadava võrduse pooled ruutu) on vaja hiljem hinnata saadud ruutvõrrandi lahendite sobivust esialgsesse võrrandisse, mis on üsna tülikas. Alljärgnevalt anname eraldi hindamisskeemid juhu jaoks, kus selline teisendamine on tehtud, ning juhu jaoks, kus seda tehtud ei ole.

   Lahendus esialgse võrrandi teisendamisega kujule, mille osade märke saab hinnata (žürii lahendused 1 ja 2):

Ülesandes antud võrrandi sobiva teisendamise eest:	2 p.
Saadud võrrandi osade märkide hindamise eest:	2 p.
Lahenduse lõpuleviimise eest:	3 p.

   Žürii lahendusele 2 sarnases lahenduses jaotada lahenduse lõpuleviimise eest antavad 3 punkti järgmiselt:
   • ruutvõrrandi koostamise eest sobiva muutuja (nt. $\sqrt{x+a}$) suhtes 1 punkt;
   • koostatud võrrandil vajalike omadustega lahendite olemasolu tingimuse leidmise eest 2 punkti.

   Lahendus esialgse võrrandi kohese teisendamisega ruutvõrrandiks (žürii lahendus 3):

Ülesandes antud võrrandi õige teisendamise eest ruutvõrrandiks:	1 p.

Selle ruutvõrrandi lahendite leidmise eest: 3 p.

Lahendite esialgsesse võrrandisse sobivuseks vajaliku tingimuse $b - a \leqslant 0$ leidmise eest: 3 p.

Ainult õige vastuse 0 eest ilma selgitusteta anda 1 punkt.

2. Sellele ülesandele anname eraldi hindamisskeemid žürii lahendustele 1 (ruudustiku laiendamiseta) ja 2 (ruudustiku laiendamisega) sarnaste lahenduste jaoks. Žürii lahendustele 3 ja 4 sarnaste mittetäielike lahenduste esinemise tõenäosus on ilmselt väike ning kui neid siiski esineb, siis tuleb õiglase punktisumma leidmisel lähtuda hindamisjuhiste alguses antud üldistest näpunäidetest.

Lahendus punkti C kauguse kaudu sirgest AB (žürii lahendus 1):

Idee eest näidata, et punkti C kauguse sirgest AB on 1 (koos mainimisega, et punkti C kaugus sirgest AD on 1): 2 p.

Kolmnurga ABC pindala leidmise eest: 3 p.

Kolmnurga külje AB pikkuse leidmise eest: 1 p.

Punkti C kauguse leidmise eest sirgest AB eespool leitu kaudu: 1 p.

Lahendus võrdsete kolmnurkade kaudu (žürii lahendus 2):

Sobiva lisakonstruktsiooni tegemise eest: 4 p.

Saadud kolmnurkade võrdsuse põhjendamise eest: 3 p.

3. Selle ülesande lahendamisel on oluline leida a ja b võimalikele väärtustele sobiv *ülemine* tõke, et jääks läbivaatamiseks lõplik hulk võimalusi. *Alumise* tõkke leidmine, nagu seda tehakse mõlemas žürii lahenduses, vähendab läbivaatamist vajavate juhtude arvu, kuid ei ole ilmtingimata vajalik, kuna ülesande tingimuste kohaselt a, $b > 0$.

Ülemise tõkke $\min(a, b) < 5$ leidmise eest: 3 p.

Alumise tõkke $\min(a, b) > 2$ leidmise (või juhtude $a, b \leqslant 2$ läbivaatamise) eest: 1 p.

Juhtude $\min(a, b) = 3$ ja $\min(a, b) = 4$ läbivaatamise ja lahendite leidmise eest: 3 p.

Kui lahenduses on leitud mingi suurem ülemine tõke a ja b võima-

likele väärtustele, siis anda selle eest 2 punkti ning täiendavalt 1 punkt anda vaid juhul, kui võimaluste läbivaatamise teel on veendutud, et tegelikult peab olema $\min(a, b) < 5$.

Kui lahenduses on jäänud leidmata lahend(id), mis on leitud lahenditest saadavad a ja b väärtuste vahetamisel, anda viimase osa eest 1 punkt vähem; kui leidmata on jäänud ühe sümmeetrilise lahendite paari mõlemad lahendid, siis 2 punkti vähem.

Ainult õige vastuse (kõik 4 lahendit) eest ilma selgitusteta anda 2 punkti; 2 või 3 lahendi eest anda 1 punkt, ühe lahendi eest 0 punkti.

4. Tähelepaneku eest, et kolmnurga CDE (või CDF) pindala on võrdne poolega ristküliku pindalast, koos põhjendusega: 2 p.

   Selle alusel ristküliku osade pindalade jaoks sobiva seose kirjapaneku eest: 2 p.

   Tähelepaneku eest, et kolmnurkade DPE ja CPF pindalad on võrdsed: 1 p.

   Tõestuse lõpuleviimise eest: 2 p.

5. Tähelepaneku eest, et k-täheliste sõnade maksimaalne võimalik arv on võrdne selliste $(k-1)$-täheliste järjendite, mis ise ega mille ükski algusosa ei ole Abababi keele sõna, kahekordse arvuga: 3 p.

   Lahenduse lõpuleviimise eest: 4 p.

   Ainult õige vastuse ("ei ole võimalik") eest anda 0 punkti.

XI klass

1. Õige võrduse kirjapaneku eest, mis seob antud suurusi M, N, c ning valitsuse liikme palka b: 2 p.

   Selle võrduse teisendamise eest kujule, kust b negatiivsus on ilmne: 3 p.

   Lõppjärelduse tegemise eest: 2 p.

   Ainult õige vastuse "ei" eest anda 0 punkti.

2. Võrduse teisendamise eest kujule $(a+1)(b+1)(c+1) = 2001$: 3 p.

   Arvu 2001 algteguriteks lahutamise eest: 1 p.

Järelduse tegemise eest, et $\{a+1, b+1, c+1\} = \{3, 23, 29\}$: 2 p.

Lõppvastuse leidmise eest: 1 p.

Ainult õige vastuse eest anda 1 punkt.

3. Sellele ülesandele anname eraldi hindamisskeemid kahe žüriile teadaoleva erinevate lisakonstruktsioonidega lahenduse jaoks. Kui õpilastel esineb lõpuleviimata lahendusi, mis kasutavad teistsuguseid lisakonstruktsioone, siis tuleb hinnata, kas need võimaldavad lahenduse lõpule viia ning kui suur osa selleks vajalikust arutlusest on lahenduses olemas.

Lahendus külje BA pikendamise abil (žürii lahendus 1):

Lisakonstruktsiooni (külje BA pikendamine punktini F ja lõik FC) eest: 2 p.

Lõikude AE ja FC paralleelsuse näitamise eest: 2 p.

Kolmnurga DCF võrdhaarsuse näitamise eest: 2 p.

Tõestuse lõpuleviimise eest: 1 p.

Lahendus külje AC pikendamise abil (žürii lahendus 2):

Lisakonstruktsiooni (külje AC pikendamine punktini G, lõik BG ning selle lõikepunkt H kiirega AE) eest: 2 p.

Lõikude AH, BH ja GH pikkuste võrdsuse näitamise eest: 3 p.

Tõestuse lõpuleviimise eest: 2 p.

4. Tähelepaneku eest, et vaadeldavate arvude ühised algtegurid võivad olla ainult 2, 3, 5 ja 7: 2 p.

Tähelepaneku eest, et vaadeldavatest arvudest neli ei jagu 2-ga ega 5-ga: 2 p.

Tõestuse lõpuleviimise eest: 3 p.

5. Tippude ühendamiseks õige reegli leidmise eest: 3 p.

Põhjendamise eest, et kasutatav ühendusviis annab tõesti kinnise murdjoone, mis läbib iga antud punkti üks kord: 2 p.

Põhjendamise eest, et saadav murdjoon on maksimaalse võimaliku pikkusega: 2 p.

Viimasena mainitud 2 punkti saamiseks piisab, kui lahenduses on öeldud, et murdjoone iga lüli on hulknurga maksimaalse pikkusega diagonaal.

Selgitusteta joonise eest anda 2 punkti juhul, kui sealt on selgesti näha, et lahendaja on leidnud tippude ühendamiseks õige viisi.

XII klass

1. Osa a) lahenduse eest kokku: 5 p.

   Idee eest vaadelda arvude ab ja $a + b$ algtegureid: *2* p.

   Tõestuse lõpuleviimise eest: *3* p.

   Osa b) lahenduse eest: 2 p.

   Ülesande b) osas anda ainult õige vastuse ("pöördlause kehtib") eest ilma selgitusteta 0 punkti.

2. Sellele ülesandele anname eraldi hindamisskeemid otsese (žürii lahendus 1) ning induktsiooniga lahenduse (žürii lahendus 2) jaoks.

   Lahendus summa otsese teisendamise abil:

   Ühe juhu (paaris või paaritu) läbivaatamise eest: 4 p.

   Teise juhu läbivaatamise eest: 3 p.

   Kummalgi juhul anda 2 punkti liidetavate sobiva rühmitamise eest ning ülejäänud punktid (vastavalt 2 või 1) tõestuse lõpuleviimise eest.

   Lahendus induktsiooni abil:

   Induktsiooniga tõestatava väite korrektse sõnastamise eest (arvestades summa märgi sõltuvust n paarsusest): 3 p.

   Induktsiooni baasi äramärkimise eest: 1 p.

   Induktsiooni sammu tegemise eest: 3 p.

3. Sellele ülesandele anname eraldi hindamisskeemid geomeetrilise (žürii lahendus 1) ning koordinaatides lahenduse (žürii lahendus 2) jaoks.

Geomeetriline lahendus (kolmnurkade kesklõikude abil):

Tähelepaneku eest, et nelinurga $PQRS$ küljed on antud punktidest moodustuvate kolmnurkade kesklõikudeks: 3 p.

Järeldamise eest, et nelinurga $PQRS$ vastasküljed on paralleelsed ($PQRS$ on rööpkülik): 2 p.

Tõestuse lõpuleviimise eest: 2 p.

Lahendus koordinaatide abil:

Koordinaatide süsteemi valiku ning punktide P, Q, R ja S koordinaatide leidmise eest valitud süsteemis: 3 p.

Näitamise eest, et nelinurga $PQRS$ küljed on ühepikkused ($PQRS$ on romb): 2 p.

Tõestuse lõpuleviimise eest: 2 p.

4. Idee eest tõestada, et $(a-1)(b-1)(c-1)=0$: 2 p.

   Näitamise eest, et $ab+bc+ca=a+b+c$: 3 p.

   Tõestuse lõpuleviimise eest: 2 p.

5. Tähelepaneku eest, et ruudu katmiseks dominokividega peab n olema paarisarv: 1 p.

   Tõestuse eest, et $n \leqslant 6$ korral ülesandes nõutud omadusega kivide paigutust ei leidu: 3 p.

   Näite eest, et $n=8$ korral leidub ülesandes nõutud omadusega kivide paigutus: 3 p.

   Kui lahenduses on näidatud, et $n \leqslant 4$ korral ülesandes nõutud omadusega kivide paigutust ei leidu, anda selle osa eest 1 punkt.

   Ainult õige vastuse eest ilma põhjenduse ja näiteta anda 0 punkti.