Eesti koolinoorte XLVIII täppisteaduste olümpiaadi

lõppvoor MATEMAATIKAS

Tartus, 29. märtsil 2001. a.

IX klass

Lahendamisaega on 5 tundi.
Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti.
Taskuarvutit kasutada ei lubata.

1. Juku pidi klassi ees lahendama matemaatikaülesande. Eelmist ülesannet tahvlilt pühkides kustutas ta aga kogemata ka osa enda ülesandest: tahvlile jäänud tekst on $37 \cdot (72 + 3x) = 14{*}{*}45$, kus $*$ tähistab kustutatud numbrit. Näita, et Juku saab sellegipoolest oma ülesande lahendada (teades, et x peab olema täisarv).

2. Kolmekohalise arvu jagamisel sellest sajaliste ja üheliste numbri vahetamisel saadud arvuga saame jagatiseks 3 ja jäägiks selle kolmekohalise arvu numbrite summa. Leia kõik niisugused kolmekohalised arvud.

3. Ringjoon raadiusega 10 puutub ruudu kaht lähiskülge ning selle lõikepunktid ruudu kahe ülejäänud küljega on ringjoone mingi diameetri otspunktideks. Leia ruudu küljepikkus.

4. On teada, et võrrandil

$$|x-1| + |x-2| + \ldots + |x-2001| = a$$

on täpselt üks lahend. Leia a väärtus.

5. Tabel, mis koosneb 9 reast ja 2001 veerust, täidetakse naturaalarvudega 1, 2, ..., 2001 nii, et iga arv esineb tabelis täpselt 9 korda ning ühes ja samas veerus paiknevad arvud ei erine üksteisest rohkem kui 3 võrra. Leia vähima veerusumma (ühes veerus paiknevate arvude summa) suurim võimalik väärtus.

Eesti koolinoorte XLVIII täppisteaduste olümpiaadi

lõppvoor MATEMAATIKAS

Tartus, 29. märtsil 2001. a.

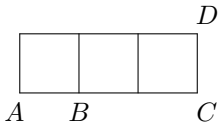
X klass

Lahendamisaega on 5 tundi.
Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti.
Taskuarvutit kasutada ei lubata.

1. Kumera n-nurga sisenurkade hulgas on täpselt kolm nürinurka. Leia n kõik võimalikud väärtused.

2. Leia vähim niisugune n, mille korral mistahes n täisarvu seas leidub kolm sellist, mille summa jagub 3-ga.

3. Joonisel on kujutatud kolm ruutu. Leia nurkade ADC ja BDC suuruste summa.



4. Nimetame positiivsete täisarvude kolmikut (a, b, c) *harmooniliseks*, kui $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{c}$. Tõesta, et mistahes fikseeritud positiivse täisarvu c korral on harmoonilisi kolmikuid (a, b, c) samapalju kui arvu c^2 positiivseid jagajaid.

5. Aafrikas elava Abababi hõimu naaberhõim kasutab tähestikust samuti ainult tähti A ja B. Sõnade moodustamisel kehtivad aga nende keeles järgmised ranged reeglid:
   (1) A on sõna;
   (2) kui w on sõna, siis ka ww ja $w\overline{w}$ on sõnad, kus $\overline{w}$ saadakse sõnast w kõigi tähtede A asendamisel tähtedega B ja kõigi tähtede B asendamisel tähtedega A (xy tähistab x ja y järjest kirjutamist);
   (3) kõik sõnad on konstrueeritavad reeglite (1) ja (2) põhjal.

   Tõesta, et mistahes kaks ühepikkust sõna selles keeles erinevad teineteisest täpselt poolte tähtede poolest.

Eesti koolinoorte XLVIII täppisteaduste olümpiaadi

lõppvoor MATEMAATIKAS

Tartus, 29. märtsil 2001. a.

XI klass

Lahendamisaega on 5 tundi.
Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti.
Taskuarvutit kasutada ei lubata.

1. Kumera n-nurga sisenurkade suurused on α, 2α, $\ldots$, $n\alpha$. Leia n kõik võimalikud väärtused ja α väärtus iga sellise n korral.

2. Õpilane kirjutas tahvlile õige liitmistehte

$$\frac{A}{B} + \frac{C}{D} = \frac{E}{F}\,,$$

kus mõlemad liidetavad on taandatud murrud ning summa nimetaja F on liidetavate nimetajate B ja D vähim ühiskordne. Seejärel taandas ta summaks saadud murru $\frac{E}{F}$ õigesti täisarvuga d. Tõesta, et d on liidetavate nimetajate B ja D ühine tegur.

3. Kolmnurga ABC külgedel BC, CA ja AB võetakse vastavalt punktid D, E ja F nii, et lõikudel AD, BE ja CF on ühine punkt O. Tõesta, et

$$\frac{|AO|}{|OD|} = \frac{|AE|}{|EC|} + \frac{|AF|}{|FB|}\,.$$

4. Olgu x ja y sellised mittenegatiivsed reaalarvud, et $x + y = 2$. Tõesta, et $x^2y^2(x^2 + y^2) \leqslant 2$.

5. Vaatleme koordinaattasandil kõikvõimalikke trapetseid, mille sisenurkade suurused on 90°, 90°, 45° ja 135° ning mille alused on paralleelsed ühe koordinaatteljega ja kõikide tippude koordinaadid on täisarvud. Nimetame sellise trapetsi *suuruseks* selle sisepiirkonnas ja rajajoonel paiknevate täisarvuliste koordinaatidega punktide koguarvu.
   a) Kui palju leidub paarikaupa mittekongruentseid (s.t. selliseid, mida ei saa nihutamise, pööramise ja peegeldamisega üksteiseks teisendada) kirjeldatud omadustega trapetseid suurusega 2001?
   b) Leia kõik 50-st väiksemad positiivsed täisarvud, mis ei ole ühegi niisuguse trapetsi suuruseks.

Eesti koolinoorte XLVIII täppisteaduste olümpiaadi

lõppvoor MATEMAATIKAS

Tartus, 29. märtsil 2001. a.

XII klass

Lahendamisaega on 5 tundi.
Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti.
Taskuarvutit kasutada ei lubata.

1. Lahenda võrrandisüsteem

$$\begin{cases} \sin x = y \\ \sin y = x \end{cases} .$$

2. Leia suurim niisugune k, mille korral saab naturaalarvude 1 kuni $2n$ hulgast valida välja k arvu nii, et ükski valitud arvudest ei jagu ühegi teise valitud arvuga.

3. Olgu I ja r vastavalt täisnurkse kolmnurga ABC siseringjoone keskpunkt ja raadius. Teravnurkade tippudest tõmmatud kiired AI ja BI lõikavad vastaskaateteid BC ja AC vastavalt punktides D ja E. Tõesta, et

$$\frac{1}{|AE|} + \frac{1}{|BD|} = \frac{1}{r} .$$

4. Tõesta, et iga täisarvu $a > 1$ jaoks leidub niisugune algarv p, et

$$1 + a + a^2 + \ldots + a^{p-1}$$

on kordarv.

5. Igasse 3×3 tabeli ruutu kirjutatakse üks reaalarv nii, et igas ruudus olev arv on võrdne selle rea arvude summa ja selle veeru arvude summa vahe absoluutväärtusega.
   a) Tõesta, et iga arv tabelis esitub mingi kahe tabelis oleva arvu summa või vahena.
   b) Näita, et tabeli saab ülesande tingimuste kohaselt täita nii, et sellesse kirjutatavad arvud ei ole kõik nullid.

XLVIII Олимпиада по точным наукам учащихся Эстонии

Заключительный тур по МАТЕМАТИКЕ

Тарту, 29 марта 2001 г.

IX класс

Время, отводимое для решения: 5 часов.
Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи дает 7 баллов.
Пользоваться калькулятором не разрешается.

1. Коля должен был решить у доски математическую задачу. Стирая с доски предыдущее задание, он случайно стер часть своей задачи: на доске остался текст $37 \cdot (72 + 3x) = 14{*}{*}45$, где $*$ обозначает стертую цифру. Показать, что Коля все равно сможет решить свою задачу (зная, что число x должно быть целым).

2. При делении трехзначного числа на число, полученное при перемене местами его цифры сотен и цифры единиц, в целой части получим 3, а в остатке сумму цифр этого трехзначного числа. Найти все такие трехзначные числа.

3. Окружность радиуса 10 касается двух соседних сторон квадрата, а точки пересечения окружности с двумя остальными сторонами квадрата являются концами некоторого ее диаметра. Найти длину стороны квадрата.

4. Известно, что уравнение

$$|x-1| + |x-2| + \ldots + |x-2001| = a$$

имеет ровно одно решение. Найти значение a.

5. Таблицу, состоящую из 9 строк и 2001 столбцов, заполняют натуральными числами $1, 2, \ldots, 2001$ так, что каждое число имеется в таблице ровно 9 раз и числа, расположенные в одном и том же столбце, отличаются друг от друга не более чем на 3. Найти наибольшее возможное значение наименьшей суммы столбца (суммы чисел, расположенных в одном столбце).

XLVIII Олимпиада по точным наукам учащихся Эстонии

Заключительный тур по МАТЕМАТИКЕ

Тарту, 29 марта 2001 г.

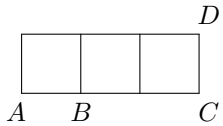
X класс

Время, отводимое для решения: 5 часов.
Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи дает 7 баллов.
Пользоваться калькулятором не разрешается.

1. Среди внутренних углов выпуклого n-угольника имеется ровно три тупых угла. Найти все возможные значения числа n.

2. Найти такое наименьшее n, для которого среди любых n целых чисел найдется три таких, сумма которых делится на 3.

3. На рисунке изображены три квадрата. Найти сумму величин углов ADC и BDC.



4. Назовем тройку положительных целых чисел (a, b, c) *гармонической*, если $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{c}$. Доказать, что для любого фиксированного положительного целого числа c существует столько же гармонических троек (a, b, c), сколько имеется положительных делителей числа c^2.

5. Соседское племя живущего в Африке племени Абабаб также использует в алфавите только буквы А и Б. При составлении слов в их языке действуют следующие строгие правила:
   (1) А — слово;
   (2) если w — слово, то тогда и ww, и $w\overline{w}$ слова, где $\overline{w}$ получают из слова w при замене всех букв А на буквы Б и всех букв Б на буквы А (xy означает последовательное написание x и y);
   (3) все слова конструируются по правилам (1) и (2).

   Доказать, что любые два слова одинаковой длины в этом языке отличаются друг от друга ровно на половину букв.

XLVIII Олимпиада по точным наукам учащихся Эстонии

Заключительный тур по МАТЕМАТИКЕ

Тарту, 29 марта 2001 г.

XI класс

Время, отводимое для решения: 5 часов.
Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи дает 7 баллов.
Пользоваться калькулятором не разрешается.

1. Величины внутренних углов выпуклого n-угольника равны $\alpha, 2\alpha, \ldots, n\alpha$. Найти все возможные значения числа n и значение α для каждого такого n.

2. Ученик написал на доске верное действие сложения

$$\frac{A}{B} + \frac{C}{D} = \frac{E}{F},$$

где оба слагаемых несократимые дроби, а знаменатель суммы F является наименьшим общим кратным знаменателей слагаемых B и D. Затем он правильно сократил полученную в сумме дробь $\frac{E}{F}$ на целое число d. Доказать, что d является общим делителем знаменателей слагаемых B и D.

3. На сторонах BC, CA и AB треугольника ABC берут соответственно точки D, E и F так, что у отрезков AD, BE и CF имеется общая точка O. Доказать, что

$$\frac{|AO|}{|OD|} = \frac{|AE|}{|EC|} + \frac{|AF|}{|FB|}.$$

4. Пусть x и y такие неотрицательные действительные числа, что $x + y = 2$. Доказать, что $x^2y^2(x^2 + y^2) \leqslant 2$.

5. Рассмотрим на координатной плоскости всевозможные трапеции, величины внутренних углов которых равны 90°, 90°, 45° и 135°, основания параллельны одной из координатных осей и координаты всех вершин целые числа. Назовем *величиной* такой трапеции число точек с целочисленными координатами, расположенных во внутренней области и на границе трапеции.
   а) Сколько найдется попарно неконгруэнтных (т.е. не преобразуемых одна в другую сдвигами, поворотами и отражениями) трапеций с описанными свойствами и величиной 2001?
   б) Найти все положительные целые числа меньше 50-ти, которые не являются величиной ни одной такой трапеции.

XLVIII Олимпиада по точным наукам учащихся Эстонии

Заключительный тур по МАТЕМАТИКЕ

Тарту, 29 марта 2001 г.

XII класс

Время, отводимое для решения: 5 часов.
Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи дает 7 баллов.
Пользоваться калькулятором не разрешается.

1. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \sin x = y \\ \sin y = x. \end{cases}$$

2. Найти наибольшее такое k, при котором из множества натуральных чисел от 1 до $2n$ можно выбрать k чисел так, что ни одно из выбранных чисел не делится ни на одно другое из выбранных чисел.

3. Пусть I и r соответственно центр и радиус вписанной в прямоугольный треугольник ABC окружности. Проведенные из вершин острых углов лучи AI и BI пересекают противолежащие катеты BC и AC соответственно в точках D и E. Доказать, что

$$\frac{1}{|AE|} + \frac{1}{|BD|} = \frac{1}{r}\ .$$

4. Доказать, что для любого целого числа $a > 1$ найдется такое простое число p, что

$$1 + a + a^2 + \ldots + a^{p-1}$$

является составным числом.

5. В каждую клетку таблицы 3×3 записывают одно действительное число так, что находящееся в каждой клетке число равно абсолютной величине разности суммы чисел этой строки и суммы чисел этого столбца.

   а) Доказать, что каждое число в таблице представимо в виде суммы или разности двух чисел таблицы.

   б) Показать, что в соответствии с условием задачи можно заполнить таблицу так, что не все записанные в нее числа нули.

Eesti koolinoorte XLVIII täppisteaduste olümpiaadi

lõppvoor MATEMAATIKAS

Tartus, 29. märtsil 2001. a.

Lahendused ja vastused

IX klass

1. *Vastus:* $x = 1271$.

   Teisendame võrrandi kujule $111(24 + x) = 14{*}{*}45$ ning leiame arvu $y = 24 + x$. Kõigepealt paneme tähele, et

   $$111 \cdot 1000 = 111000 < 14{*}{*}45 < 222000 = 111 \cdot 2000\,.$$

   Seega on arv y neljakohaline ning selle esimene number on 1. Ilmne on ka, et arvu y viimane number peab olema 5. Olgu siis $y = \overline{1ab5}$, kus $0 \leqslant a,\, b \leqslant 9$. Kirjutame vaadeldava korrutamistehte välja arvude kirjaliku korrutamise algoritmi järgi:

   $$\begin{array}{rrrrrr}
   & & 1 & a & b & 5 \\
   \times & & & 1 & 1 & 1 \\
   \hline
   & & 1 & a & b & 5 \\
   & 1 & a & b & 5 & \\
   1 & a & b & 5 & & \\
   \hline
   1 & 4 & * & * & 4 & 5
   \end{array}$$

   Näeme, et summa $b + 5$ lõpunumber on 4, millest $b = 9$. Vasakult teise positsiooni põhjal $a \leqslant 2$, sest vasakult esimesse positsiooni ülekannet ei tule ning vasakult kolmandast positsioonist saame $b = 9$ tõttu ülekandeks vähemalt 1. Kui saaksime sealt ülekandeks rohkem kui 1, peaks vasakult kolmanda positsiooni põhjal olema $a \geqslant 8$ — vastuolu. Niisiis $a = 2$ ja $y = 1295$ ning arvu x väärtuseks saame $1295 - 24 = 1271$.

2. *Vastus:* 441 ja 882.

   Olgu otsitav arv $\overline{abc}$, siis ülesande tingimuse kohaselt

   $$\overline{abc} = 3\overline{cba} + (a + b + c)\,,$$

millest järeldub, et $1 \leqslant c \leqslant 3$. Kirjutades võrrandi kujul

$$100a + 10b + c = 3(100c + 10b + a) + (a + b + c)$$

ja lihtsustades saame $32a = 100c + 7b$.

Vaatame nüüd läbi kõik võimalikud arvu c väärtused.

1) Kui $c = 1$, saame võrratused

$$100 \leqslant 32a = 100 + 7b \leqslant 163\ ,$$

millest järeldub, et $4 \leqslant a \leqslant 5$. Kui $a = 4$, siis $128 = 100 + 7b$, millest $b = 4$. Kui $a = 5$, siis $160 = 100 + 7b$ ning b ei ole täisarv. Üheks sobivaks arvuks saime niisiis 441.

2) Kui $c = 2$, saame võrratused

$$200 \leqslant 32a = 200 + 7b \leqslant 263\ ,$$

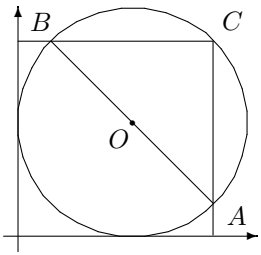
millest järeldub, et $7 \leqslant a \leqslant 8$. Kui $a = 7$, siis $224 = 200 + 7b$ ning b pole täisarv. Kui $a = 8$, siis $256 = 200 + 7b$, millest $b = 8$. Seega teiseks sobivaks arvuks on 882.

3) Kui $c = 3$, saame

$$300 \leqslant 32a = 200 + 7b \leqslant 363\ ,$$

kust $a \geqslant 10$, mis arvu numbriks ei sobi.

3. *Vastus:* $10 + 5\sqrt{2}$.



Joonis 1

Kasutame sellist ristkoordinaatide süsteemi, kus ruudu need kaks külge, mis ringjoont puutuvad, paiknevad koordinaattelgedel: siis ring-

joone keskpunkt on $O(10,10)$ (vt. joonist 1). Olgu ruudu küljepikkus a (ilmselt peab olema $a > 10$) ning olgu ringjoone lõikepunktid ruudu kahe ülejäänud küljega A ja B. Kuna AB on ringjoone diameeter, siis nende külgede ühine otspunkt $C(a,a)$ paikneb ringjoonel. Et CO on ringjoone raadius, saame $\sqrt{(a-10)^2+(a-10)^2} = 10$, kust $a - 10 = 5\sqrt{2}$ ja $a = 10 + 5\sqrt{2}$.

4. *Vastus:* 1001000.

Paneme tähele, et kui x on selle võrrandi lahend, siis ka $2002 - x$ on lahend. Et lahend oleks üksainus, peab seega olema $x = 2002 - x$ ehk $x = 1001$. Siis

$$\begin{aligned} a &= 1000 + 999 + \ldots + 2 + 1 + 0 + 1 + 2 + \ldots + 999 + 1000 = \\ &= (1000+1) + (999+2) + \ldots + (2+999) + (1+1000) = \\ &= 1000 \cdot 1001 = 1001000\,. \end{aligned}$$

Märkus. Veendume (kuigi ülesanne on sõnastatud nii, et seda ei nõuta), et sellise a korral on $x = 1001$ tõepoolest võrrandi ainus lahend. Olgu $y = 1001 + b$ selle võrrandi suvaline lahend, siis

$$\begin{aligned} &|y-1| + |y-2| + \ldots + |y-2001| = \\ &\quad = |1000+b| + \ldots + |1+b| + |b| + |1-b| + \ldots + |1000-b| = \\ &\quad = a = 1000 + \ldots + 1 + 0 + 1 + \ldots 1000\,. \end{aligned}$$

Nüüd piisab tähele panna, et $|b| \geqslant 0$ (kusjuures võrdus kehtib ainult $b = 0$ korral) ning mistahes $k = 1, \ldots, 1000$ korral

$$|k+b| + |k-b| \geqslant |k+b+k-b| = k + k\,.$$

5. *Vastus:* 24.

Uurime, kuidas saavad selles tabelis paikneda arvud 1. Ilmselt saavad arvud 1 olla samas veerus ainult arvudega 2, 3 ja 4. Kuna arve 1, 2, 3 ja 4 on tabelis kokku $4 \cdot 9$, siis saavad arvud 1 paikneda ülimalt neljas veerus. Kui kõik arvud 1 on samas veerus, siis on tabeli minimaalne veerusumma 9. Kui arvud 1 on kahes veerus, siis peab ühes neist olema vähemalt 5 arvu 1 ja selle veeru arvude summa on ülimalt $5 \cdot 1 + 4 \cdot 4 = 21$. Kui arvud 1 on neljas veerus, siis on neis veergudes olevate arvude summa $9 \cdot (1+2+3+4) = 90$ ja minimaalne veeru-

summa on seega ülimalt $\left[\frac{90}{4}\right] = 22$. Kui arvud 1 on kolmes veerus, on võimalikult suure veerusumma saamiseks otstarbekas paigutada nendega samadesse veergudesse arvud 3 ja 4. Sel juhul kolme veeru arvude summa on $9 \cdot (1+3+4) = 72$ ja minimaalne veerusumma saab olla ülimalt 24. Näitame nüüd, et leidub tabel, kus minimaalne veerusumma on 24:

1	1	1	2	2	6	7	...	2001
1	1	1	2	2	6	7	...	2001
1	1	1	2	2	6	7	...	2001
3	3	3	2	2	6	7	...	2001
3	3	3	2	5	6	7	...	2001
3	3	3	5	5	6	7	...	2001
4	4	4	5	5	6	7	...	2001
4	4	4	5	5	6	7	...	2001
4	4	4	5	5	6	7	...	2001

Seega vähima veerusumma suurim võimalik väärtus on 24.

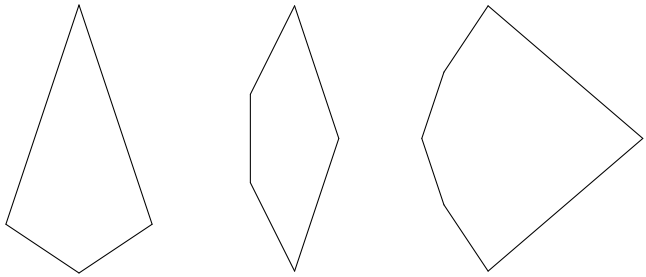
X klass

1. Vastus: n võimalikud väärtused on 4, 5 ja 6.

   Kumera n-nurga sisenurkade summa on $(n-2) \cdot \pi$. Selle hulknurga 3 sisenurga suurused on suuremad kui $\frac{\pi}{2}$ ja kumeruse tõttu väiksemad kui π; ülejäänud $n-3$ sisenurga suurused on suuremad kui 0 ja mitte suuremad kui $\frac{\pi}{2}$. Siit saame võrratused

   $$(n-3) \cdot 0 + 3 \cdot \frac{\pi}{2} < (n-2) \cdot \pi < (n-3) \cdot \frac{\pi}{2} + 3 \cdot \pi \ ,$$

   millest arvuga π läbi jagades ja teisendades saame $\frac{7}{2} < n < 7$ ehk n täisarvulisust arvestades $4 \leqslant n \leqslant 6$. Jääb üle veenduda, et tõesti leiduvad nelinurk, viisnurk ja kuusnurk, mille sisenurkade hulgas on täpselt kolm nürinurka (vt. joonist 2).



$n = 4$ $n = 5$ $n = 6$

Joonis 2

2. *Vastus:* $n = 5$.

   Kolme sellise täisarvu summa, mis annavad kolmega jagamisel erinevad jäägid (0, 1 ja 2), jagub kolmega. Samuti jagub kolmega mistahes kolme sellise arvu summa, mis annavad kolmega jagamisel kõik ühe ja sama jäägi. Seega juhul, kui n täisarvu seas ei leidu kolme sellist, mille summa jagub kolmega, saab nende arvude kolmega jagamisel esineda ülimalt kaks erinevat jääki ning kumbki neist ülimalt kahel korral, mistõttu neid arve on ülimalt neli. Seega $n \geqslant 5$ arvu seast saab kolm arvu, mille summa jagub kolmega, alati leida.

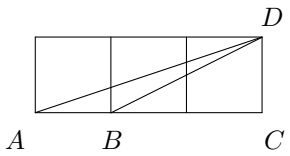
   Teisalt on lihtne veenduda, et näiteks arvudest 1, 3, 4, 6 ükski kolmik ei anna kolmega jaguvat summat.

3. *Vastus:* $\dfrac{3\pi}{4}$.

   Lahendus 1. Tähistame $\alpha = \angle ADC$ ja $\beta = \angle BDC$ (vt. joonist 3). Olgu ruudu küljepikkus a, siis kolmnurkadest ADC ja BDC saame $\tan\alpha = \dfrac{3a}{a} = 3$ ja $\tan\beta = \dfrac{2a}{a} = 2$. Seega

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha \cdot \tan\beta} = \frac{3+2}{1-3\cdot 2} = -1\ ,$$

   millest $\angle ADC + \angle BDC = \dfrac{3\pi}{4}$.



Joonis 3

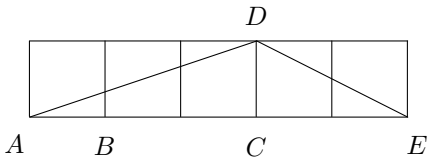
Lahendus 2. Olgu E punktiga B sirge CD suhtes sümmeetriline punkt (vt. joonist 4), siis

$$\angle ADC + \angle BDC = \angle ADC + \angle CDE = \angle ADE\ .$$

Olgu ruudu küljepikkus a. Avaldades $|AD| = \sqrt{a^2 + (3a)^2} = a\sqrt{10}$, $|ED| = \sqrt{a^2 + (2a)^2} = a\sqrt{5}$ ning kasutades koosinusteoreemi kolmnurgas ADE, saame

$$\begin{aligned} 25a^2 &= |AE|^2 = |AD|^2 + |ED|^2 - 2|AD| \cdot |ED| \cdot \cos\angle ADE = \\ &= 10a^2 + 5a^2 - 10a^2\sqrt{2} \cdot \cos\angle ADE\ , \end{aligned}$$

millest $\cos\angle ADE = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ning $\angle ADE = \dfrac{3\pi}{4}$.

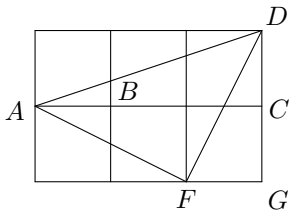


Joonis 4

Lahendus 3. Täiendame joonist ja valime punktid F ja G nii nagu näidatud joonisel 5. Kuna kolmnurgad BCD ja DGF on kongruentsed ja täisnurksed, siis

$$\begin{aligned} \angle ADF &= \angle ADC - \angle FDG = \angle ADC - \left(\frac{\pi}{2} - \angle DFG\right) = \\ &= \angle ADC - \left(\frac{\pi}{2} - \angle BDC\right)\ , \end{aligned}$$

kust $\angle ADC + \angle BDC = \frac{\pi}{2} + \angle ADF$. Et lõigud AF ja DF saadakse teineteisest pöördel täisnurga võrra ümber punkti F, siis kolmnurk AFD on võrdhaarne ja täisnurkne ning $\angle ADF = \frac{\pi}{4}$, kust $\angle ADC + \angle BDC = \frac{3\pi}{4}$.



Joonis 5

4. Paneme tähele, et mistahes nullist erinevate täisarvude a, b korral

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{c} \iff \frac{a+b}{ab} = \frac{1}{c} \iff ab = (a+b)c \iff$$
$$\iff ab - ac - bc = 0 \iff ab - ac - bc + c^2 = c^2 \iff$$
$$\iff (a-c)(b-c) = c^2.$$

Kui arvud a ja b on positiivsed ja $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{c}$, siis $\frac{1}{a} < \frac{1}{c}$ ja $\frac{1}{b} < \frac{1}{c}$, mistõttu $a > c$ ja $b > c$ ehk $a - c > 0$ ja $b - c > 0$. Teisest küljest, kui $a - c > 0$ ja $b - c > 0$, siis on ka arvud a ja b positiivsed. Seega (a, b, c) on harmooniline kolmik parajasti siis, kui arvud $a - c$ ja $b - c$ on positiivsed ning $(a-c)(b-c) = c^2$. Niisiis saame üksühese vastavuse harmooniliste kolmikute (a, b, c) ja positiivsete täisarvude paaride (r, s) vahel, kus $rs = c^2$. Arvu c^2 iga positiivne jagaja esineb täpselt ühes niisuguses paaris esimesel kohal. Seega neid paare ning ühtlasi ka harmoonilisi kolmikuid, mille kolmas komponent on c, on niisama palju kui arvu c^2 positiivseid jagajaid.

5. *Lahendus 1.* Teeme induktsiooni sõnade pikkuse järgi. Olgu u_1 ja u_2 mistahes erinevad ühepikkused sõnad ja eeldame, et kõigi lühemate sõnade paaride korral ülesande väide kehtib. Kuna ühetähelisi sõnu

on ainult üks, siis u_1 ja u_2 ei ole ühetähelised ning on seega konstrueeritud reegli (2) põhjal. Niisiis leiduvad mingid sõnad v_1 ja v_2, nii et $u_1 = v_1 v_1$ või $u_1 = v_1 \overline{v_1}$ ning $u_2 = v_2 v_2$ või $u_2 = v_2 \overline{v_2}$. Et igal juhul on v_1 kaks korda lühem u_1-st ja v_2 kaks korda lühem u_2-st, siis v_1 ja v_2 on ühepikkused. Kui $v_1 = v_2 = v$, siis sõnadest u_1 ja u_2 peab üks olema vv ja teine $v\overline{v}$. Sõnade vv ja $v\overline{v}$ esimesed pooled langevad kokku, teistes pooltes on aga kõik tähed erinevad, seega need sõnad erinevad teineteisest täpselt poolte tähtede poolest. Edasi vaatleme juhtu, kui $v_1 \neq v_2$. Et induktsiooni eelduse kohaselt v_1 ja v_2 erinevad teineteisest täpselt poolte tähtede poolest, siis piisab näidata, et sõnade u_1 ja u_2 teised pooled erinevad teineteisest täpselt poolte tähtede poolest. Kui need teised pooled on v_1 ja v_2, siis see väide ilmselt kehtib. Samuti on selge, et $\overline{v_1}$ ja $\overline{v_2}$ erinevad teineteisest poolte tähtede poolest (erinevused on täpselt samades kohtades kus sõnadel v_1 ja v_2). Sõnad v_1 ja $\overline{v_2}$ aga erinevad teineteisest parajasti nende tähtede poolest, mille poolest v_1 ja v_2 kokku langevad — seega ka v_1 ja $\overline{v_2}$ erinevad teineteisest poolte tähtede poolest; samuti on ka sõnadega $\overline{v_1}$ ja v_2. Seega erinevad sõnad u_1 ja u_2 igal juhul teineteisest täpselt poolte tähtede poolest.

Lahendus 2. Seame igale sõnale w vastavusse polünoomi P_w muutujatest $x_1, x_2, \ldots$ järgmiste reeglitega:

$$P_{\mathrm{A}} = 1 \text{ (ei sisalda ühtki muutujat);}$$

kui P_w sisaldab muutujaid $x_1, \ldots, x_n$, siis

$$P_{ww} = P_w \cdot (1 + x_{n+1})$$

ja

$$P_{w\overline{w}} = P_w \cdot (1 - x_{n+1}) \,.$$

Kui P_w avaldises sulud avada, tekib täpselt niipalju liikmeid, kuipalju on sõnas w tähti, sest polünoomis P_{A} on 1 liige ning iga korrutamine kaksliikmega suurendab liikmete arvu kaks korda. Seejuures ühepikkustele sõnadele vastavate (samu muutujaid sisaldavate) polünoomide lahtikirjutused erinevad üksteisest ainult liikmete ees olevate märkide poolest. Induktsiooniga w pikkuse järgi on lihtne veenduda, et need liikmed on võimalik panna niisugusesse järjekorda, et i-nda liikme ees olev märk on $+$ või $-$ vastavalt sellele, kas i-s täht sõnas

w on A või B. Tõepoolest, kui $w = \mathrm{A}$, siis see väide on ilmne. Olgu nüüd w jaoks P_w niisugune esitus olemas. Korrutamisel kaksliikmega $(1 + x_{n+1})$ või $(1 - x_{n+1})$ korjame järjekorda säilitades ette need liikmed, mis on saadud P_w korrutamisel 1-ga, ja nende järele kirjutame samuti järjekorda säilitades need liikmed, mis on saadud P_w korrutamisel x_{n+1}-ga (või $-x_{n+1}$-ga). Saadud liikmete jadas on i-nda liikme ees märk $+$ parajasti siis, kui sõnas ww (või vastavalt sõnas $w\overline{w}$) on i-ndaks täheks A.

Võtame nüüd kaks erinevat ühepikkust sõna u ja v. Eelnenud konstruktsioonist tuleneb muuhulgas, et $P_u \neq P_v$. Olgu

$$\begin{aligned} P_u &= (1 + (-1)^{i_1} x_1) \cdot \ldots \cdot (1 + (-1)^{i_n} x_n) \,, \\ P_v &= (1 + (-1)^{j_1} x_1) \cdot \ldots \cdot (1 + (-1)^{j_n} x_n) \,. \end{aligned}$$

Siis leidub indeks l, nii et $i_l \neq j_l$. Võtame

$$\alpha = ((-1)^{i_1}, (-1)^{i_2}, \ldots, (-1)^{i_n}) \,,$$

siis $P_u(\alpha) = 2 \cdot \ldots \cdot 2 = 2^n$, aga $P_v(\alpha) = 0$, sest l-nda teguri väärtus on 0. Vaadates neid polünoome lahtikorrutatuna näeme, et polünoomi P_u iga liikme (koos märgiga) väärtus väärtustusel α on 1, polünoomi P_v liikmetest on aga täpselt poolte väärtus 1 ja poolte väärtus -1. Et P_u ja P_v erinevad teineteisest ainult liikmete märkide poolest, siis täpselt pooltel liikmetel on polünoomis P_v teistsugune märk kui polünoomis P_u, mis tähendab eelneva põhjal, et sõnad u ja v erinevad teineteisest täpselt poolte tähtede poolest.

XI klass

1. *Vastus:* Arvu n võimalikud väärtused on $n = 3$ ja $n = 4$. Esimesel juhul $\alpha = \dfrac{\pi}{6}$, teisel juhul $\alpha = \dfrac{\pi}{5}$.

   Ilmselt peab olema $n \geqslant 3$, sest muidu ei teki üldse hulknurka. Et nurkade suurused moodustavad aritmeetilise jada, siis vaadeldava hulknurga sisenurkade summa on

$$n \cdot \frac{(\alpha + n\alpha)}{2} = \pi(n - 2) \,.$$

Avaldades saadud võrdusest α, saame

$$\alpha = \frac{2\pi(n-2)}{n(n+1)} \ .$$

Hulknurga kumeruse tõttu

$$n\alpha = \frac{2\pi(n-2)}{n+1} < \pi$$

(teised nurgad on kõik väiksemad) ehk $2n-4 < n+1$, millest $n < 5$. Seega on arvu n võimalikeks väärtusteks $n = 3$ ja $n = 4$.

Juhul $n = 3$ saame $\alpha = \dfrac{2\pi}{3 \cdot 4} = \dfrac{\pi}{6}$, juhul $n = 4$ aga $\alpha = \dfrac{2 \cdot 2\pi}{4 \cdot 5} = \dfrac{\pi}{5}$.

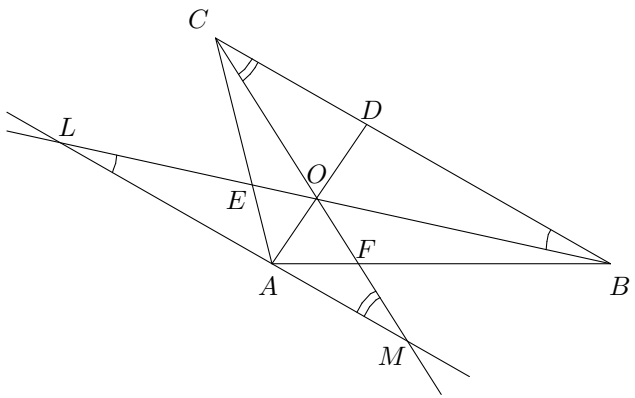
2. Olgu D' ja B' vastavalt vasaku ja parema murru laiendajad liitmisel. Siis $E = AD' + B'C$ ja $F = BD' = DB'$ ning kuna F on ülesande tingimuste põhjal nimetajate vähim ühiskordne, siis arvud B' ja D' on ühistegurita. Ülesande lahendamiseks piisab näidata, et d on arvude B ja D ühine jagaja. Selleks võtame arvu d suvalise algteguri p ja näitame, et arvud B ja D jaguvad arvu p kõigi nende astmetega, millega jagub arv d.

   Jagugu arv d arvuga p^k, $k > 0$. Siis nii arv E kui ka arv F jaguvad arvuga p^k. Oletame vastuväiteliselt, et arv B ei jagu arvuga p^k. Võrdusest $F = BD'$ saame siis, et arv D' jagub arvuga p. Siis jagub ka arv AD' arvuga p, mistõttu arv $B'C = E - AD'$ jagub arvuga p. Järelikult kas arv B' või arv C jagub arvuga p. Kuna aga arvud B' ja D' on ühistegurita, siis arv B' ei jagu arvuga p. See annab ühelt poolt, et arv C jagub arvuga p, võrduse $F = DB'$ abil aga teiselt poolt, et arv D jagub arvuga p^k. Nii on arv p arvude C ja D ühine algtegur, mis on vastuolus murru taandatusega. Vastuolu tekkis oletusest, et arv B ei jagu arvuga p^k. Analoogiliselt saame vastuolu ka oletusest, et arv D ei jagu arvuga p^k. Niisiis jaguvad arvud B ja D arvuga d.

3. Tõmbame küljega BC paralleelse sirge läbi tipu A ja olgu L ja M selle lõikepunktid vastavalt kiirtega BE ja CF (vt. joonist 6). Siis kolmnurgad AEL ja CEB on sarnased ning kolmnurgad AFM ja BFC on sarnased, millest saame vastavalt $\dfrac{|AE|}{|EC|} = \dfrac{|AL|}{|BC|}$ ja $\dfrac{|AF|}{|FB|} = \dfrac{|AM|}{|BC|}$.

Samuti on sarnased kolmnurgad AOL ja DOB ning AOM ja DOC, mis annab vastavalt $\dfrac{|AO|}{|OD|} = \dfrac{|AL|}{|BD|}$ ja $\dfrac{|AO|}{|OD|} = \dfrac{|AM|}{|DC|}$. Võrde omaduse põhjal

$$\begin{aligned}\frac{|AO|}{|OD|} &= \frac{|AL|+|AM|}{|BD|+|DC|} = \frac{|AL|+|AM|}{|BC|} = \\ &= \frac{|AL|}{|BC|} + \frac{|AM|}{|BC|} = \frac{|AE|}{|EC|} + \frac{|AF|}{|FB|}\,.\end{aligned}$$



Joonis 6

4. Tähistame $\alpha = 1 - x$, siis $x = 1 - \alpha$ ja tingimus $x + y = 2$ annab, et $y = 1 + \alpha$. Siis

$$\begin{aligned}x^2y^2(x^2+y^2) &= (1-\alpha)^2(1+\alpha)^2 \cdot ((1-\alpha)^2 + (1+\alpha)^2) = \\ &= ((1-\alpha)(1+\alpha))^2 \cdot (2+2\alpha^2) = \\ &= 2(1-\alpha^2)^2(1+\alpha^2) = 2(1-\alpha^4)(1-\alpha^2)\,.\end{aligned}$$

Et arvude x ja y mittenegatiivsuse tõttu $|\alpha| \leqslant 1$, siis $0 \leqslant \alpha^2 \leqslant 1$ ja $0 \leqslant \alpha^4 \leqslant 1$, mistõttu $0 \leqslant 1 - \alpha^2 \leqslant 1$ ja $0 \leqslant 1 - \alpha^4 \leqslant 1$ ning $2(1-\alpha^4)(1-\alpha^2) \leqslant 2$.

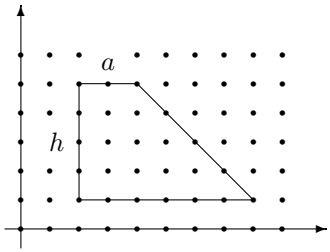
5. *Vastus:* a) 7; b) 1, 2, 3, 4, 6, 8, 10, 16, 28 ja 32.

Olgu vaadeldava trapetsi kõrgus h ning lühema aluse pikkus a (vt. joonist 7). Et trapets koosneb ristkülikust küljepikkustega a ja h ning

võrdhaarsest täisnurksest kolmnurgast kaatetite pikkusega h, siis selle pikem alus on pikkusega $a+h$ ning aritmeetilise jada summa valemist saame, et selle külgedel ja sisepiirkonnas on kokku

$$N(a,h) = (a+1) + (a+2) + \ldots + (a+h+1) = \frac{(2a+h+2)(h+1)}{2}$$

täisarvuliste koordinaatidega punkti.



Joonis 7

a) On ilmne, et kaks vaadeldavat trapetsit on kongruentsed siis ja ainult siis, kui neil on võrdne kõrgus h ja võrdne lühema aluse pikkus a. Seega on vaja leida erinevate paaride (a,h) arv, mille korral $N(a,h) = 2001$. Leiame arvu 2001 lahutuse algteguriteks: $2001 = 3 \cdot 23 \cdot 29$ ning vaatleme eraldi kahte juhtu.

1) Kui $h = 2k$ on paarisarv, siis

$$N(a,h) = (a+k+1) \cdot (2k+1) \ ,$$

kus $2k+1 \geqslant 3$ ning $a+k+1 > k+1 > \dfrac{2k+1}{2}$. Tegur $2k+1$ võib seega olla 3, 23 või 29, milles leiame vastavalt $a = 665$ ja $h = 2$, $a = 75$ ja $h = 22$ ning $a = 54$ ja $h = 28$.

2) Kui $h = 2k-1$ on paaritu arv, siis

$$N(a,h) = (2a+2k+1) \cdot k \ ,$$

kus $k \geqslant 1$ ning $2a+2k+1 \geqslant 2k+3$. Tegur k võib seega olla 1, 3, 23 või 29, milles leiame vastavalt $a = 999$ ja $h = 1$, $a = 330$ ja $h = 5$, $a = 20$ ja $h = 45$ ning $a = 5$ ja $h = 57$.

Vastavalt eespool tehtud tähelepanekule leidub niisiis 7 paarikaupa mittekongruentset ülesande tingimustele vastavat trapetsit suurusega 2001.

b) Võttes järjest $h = 1, 2, 3, \ldots$ leiame trapetsi suuruse sõltuvuse a väärtusest vastava h korral (kui $h > 7$, siis $N(a,h) > 50$ mistahes $a \geqslant 1$ korral):

h	$N(a,h)$
1	$2a+3$
2	$3a+6$
3	$4a+10$
4	$5a+15$
5	$6a+21$
6	$7a+28$
7	$8a+36$

Nüüd on lihtne kontrollida, et täisarvudest 1 kuni 49 ei esitu ühegi leitud valemiga arvud 1, 2, 3, 4, 6, 8, 10, 16, 28 ja 32.

XII klass

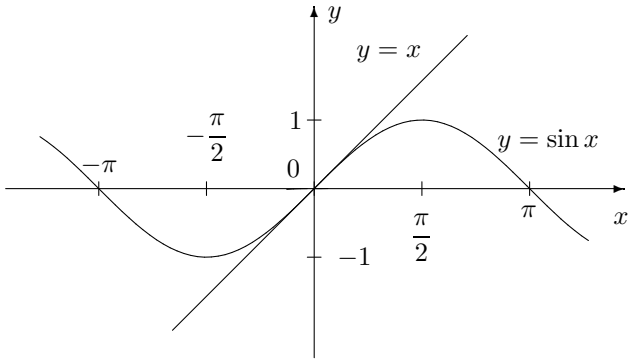
1. *Vastus:* $x = y = 0$ on ainus lahend.

Lahendus 1: Üheks lahendiks on ilmselt $x = y = 0$. Tõestamaks, et rohkem lahendeid ei ole, paneme tähele, et $|\sin x| \leqslant |x|$, kusjuures võrdus kehtib ainult $x = 0$ korral. See on ilmne siinusfunktsiooni graafikust (vt. joonist 8), kui arvestada, et $|\sin x| \leqslant 1$ ning $\sin x$ tuletis kohal $x = 0$ on $\cos 0 = 1$, s.t. sirge $y = x$ on siinusfunktsiooni graafiku puutujaks kohal $x = 0$.

Niisiis

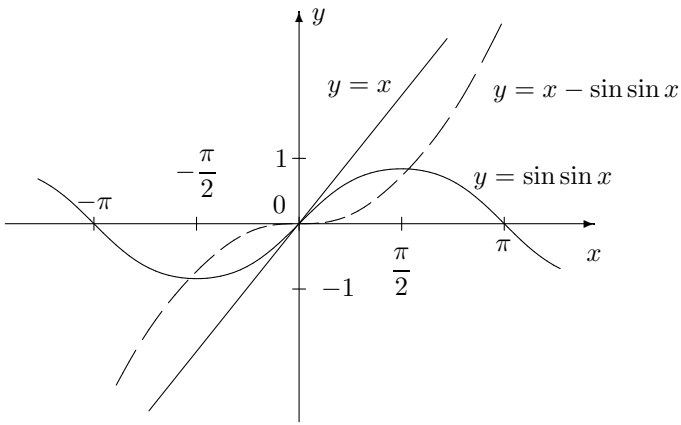
$$|x| \geqslant |\sin x| = |y| \geqslant |\sin y| = |x| \,,$$

kusjuures vähemalt üks võrratustest on range, kui x ja y ei ole mõlemad võrdsed nulliga. Seega on $x = y = 0$ süsteemi ainsaks lahendiks.



Joonis 8

Lahendus 2: Paneme tähele lahendi $x = y = 0$ olemasolu ning seda, et $|x| = |\sin y| \leqslant 1$. Asendades $y = \sin x$ teise võrrandisse saame $x = \sin\sin x$.



Joonis 9

Olgu $f(x) = x - \sin\sin x$, siis $f'(x) = 1 - \cos\sin x \cdot \cos x$. Kuna $-1 \leqslant x \leqslant 1$ ning ka $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$, siis vastavad koosinuse väärtused

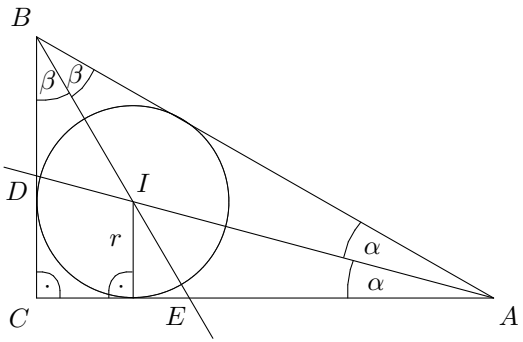
sisalduvad lõigul $[0,1]$, kusjuures need koosinuse väärtused on võrdsed arvuga 1 ainult juhul $x=0$. Niisiis $f'(x) \geqslant 0$ lõigul $x \in [-1,1]$, kusjuures on vaid üks punkt, kus $f'(x)=0$. Seetõttu on funktsioon $f(x)$ lõigul $[-1,1]$ rangelt kasvav, millest järeldub, et $x=0$ on funktsiooni $f(x)$ ainus nullkoht sellel lõigul (vt. joonist 9). Seega $x=0$ ja $y=\sin 0=0$ on süsteemi ainsaks lahendiks.

2. *Vastus:* n.

Olgu valitud arvud $a_1, \ldots, a_k$ ning olgu iga $i=1,\ldots,k$ korral n_i algarvu 2 astendaja arvu a_i algteguriteks lahutuses, s.t. $a_i = 2^{n_i} \cdot b_i$, kus b_i on paaritu arv. Et $1 \leqslant b_i \leqslant 2n-1$, siis on arvude b_i jaoks n erinevat võimalust ning $k \geqslant n+1$ korral leiduvad sellised indeksid i ja j, et $b_i = b_j = b$ ja $n_i > n_j$. Siis arv $a_i = 2^{n_i} \cdot b$ jagub arvuga $a_j = 2^{n_j} \cdot b$.
Kui $k \leqslant n$, siis valides suvalised k arvu alamhulgast $\{n+1, \ldots, 2n\}$, ei jagu ükski neist arvudest ühegi teisega, kuna $2n < 2 \cdot (n+1)$.

3. Olgu $\alpha = \angle IAE = \angle BAI$ ja $\beta = \angle DBI = \angle IBA$ (vt. joonist 10). Siis $\angle EIA = \angle BID = \alpha + \beta$ (kolmnurga ABI välisnurk). Kasutades siinusteoreemi kolmnurgas AEI ja võrdust $r = |AI| \sin\alpha$, saame

$$\frac{|AE|}{\sin(\alpha+\beta)} = \frac{|AI|}{\sin\angle AEI} = \frac{r}{\sin\alpha \sin\angle AEI}\,.$$



Joonis 10

Kolmnurgast BDI saame analoogiliselt

$$\frac{|BD|}{\sin(\alpha+\beta)} = \frac{|BI|}{\sin\angle IDB} = \frac{r}{\sin\beta\sin\angle IDB}\ .$$

Arvestades võrdusi $\sin\angle AEI = \cos\beta$ ja $\sin\angle IDB = \cos\alpha$ saame

$$\frac{1}{|AE|} + \frac{1}{|BD|} = \frac{\sin\alpha\cos\beta}{r\sin(\alpha+\beta)} + \frac{\sin\beta\cos\alpha}{r\sin(\alpha+\beta)} = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{r\sin(\alpha+\beta)} = \frac{1}{r}\ .$$

4. Kui $a = 2$, sobib näiteks $p = 11$, sest

$$1 + 2 + 4 + \ldots + 2^{10} = 2^{11} - 1 = 2047 = 23 \cdot 89\ .$$

Kui $a > 2$, siis $a - 1 > 1$ ning seega leidub algarv p, millega arv $a - 1$ jagub. Siis arv a annab arvuga p jagades jäägi 1, mistõttu arv $M_p = 1 + a + a^2 + \ldots + a^{p-1}$ jagub arvuga p (summas on p liidetavat, mis kõik annavad arvuga p jagades jäägi 1). Et $p > 1$, siis $M_p \geqslant 1 + a > p$ ning M_p on seega kordarv.

5. a) Olgu tabeli esimese, teise ja kolmanda rea arvude summad vastavalt r_1, r_2 ja r_3 ning esimese, teise ja kolmanda veeru arvude summad vastavalt v_1, v_2 ja v_3. Olgu a_{ij} tabeli i-nda rea ja j-nda veeru element. Paneme ka tähele, et vastavalt ülesande tingimustele on kõik arvud tabelis mittenegatiivsed.

Ilmselt $r_1 + r_2 + r_3 = v_1 + v_2 + v_3$. Siit

$$\begin{aligned} a_{11} &= |r_1 - v_1| = |(r_2 + r_3) - (v_2 + v_3)| = |(r_2 - v_2) + (r_3 - v_3)| = \\ &= \pm|r_2 - v_2| \pm |r_3 - v_3| = \pm a_{22} \pm a_{33}\ . \end{aligned}$$

Kuna kõik tabeli arvud on mittenegatiivsed, ei saa siin mõlema arvu ees olla miinusmärk ning seega on arv a_{11} tõepoolest võrdne kahe tabelis oleva arvu summa või vahega. Tõestus kõigi ülejäänud arvude jaoks on analoogiline.

b) Sobivad näiteks kõik tabelid (ning neist ridade ja veergude ümberpaigutamisel saadavad tabelid) kujul

0	x	0
x	0	x
0	x	0

ja

x	x	x
x	x	x
$2x$	$2x$	$2x$

,

kus x on positiivne reaalarv.

9. klass

Ülesanne 1 (Toomas Hinnosaar)

Vahemiku leidmine, kus asub (24+x) või mingi samaväärse vaaldise väärtus	1 p.
Arvu (24+x) esimese ja viimase numbri leidmine	2 p.
Kahe keskmise numbri leidmine	2 p.
Arvu 14**45 leidmine	1 p.
Arvu x väärtuse leidmine	1 p.
	7 p.

Ülesanne 2 (Tiit Lepmann)

Ülesandes antud arvude ja jagamistehte üldkujul kirjapanek	1 p.
Teisendustega jöudmine öige seoseni esialgse arvu numbrite vahel	2 p.
Tingimuste leidmine esialgse arvu sajaliste ja üheliste numbri kohta ja köigi vöimaluste läbivaatamine	2 p.
Eelneva põhjal mõlema sobiva arvu leidmine	2 p.
	7 p.

Ülesanne 3 (Elts Abel)

Põhjendus, miks üks ruudu tippudest on ringjoonel	1 p.
Õige joonis	1 p.
Põhjendus, miks vajalikud täisnurksed kolmnurgad on võrdhaarsed	1 p.
Ruudu diagonaali või külje sobivalt osalõikudeks jaotamine	2 p.
Ruudu külje pikkuse arvutamine	2 p.
	7 p.

Ülesanne 4 (Urmo Kaber)

Tõestus, et x peab olema 1001	5 p.
Lahendus korrektne lõpuleviimine	2 p.
	7 p.
Arvati ära, et x on 1001 ja saadi õige vastus	1 p.

Ülesanne 5 (Mart Abel)

Näitamine, et arvuga 1 võivad samas veerus olla vaid 2, 3 ja 4	1 p.
Järeldus, et 1 võib esineda maksimaalselt 4 veerus	1 p.
Näitamine, et kui 1 on vaid 1 veerus, ei saa minimaalne veerusumma olla suurem kui 9	1 p.
Näitamine, et kui 1 on 2 veerus, ei saa minimaalne veerusumma olla suurem kui 21	1 p.
Näitamine, et kui 1 on 3 veerus, ei saa minimaalne veerusumma olla suurem kui 24	1 p.
Näitamine, et kui 1 on 4 veerus, ei saa minimaalne veerusumma olla suurem kui 22	1 p.
Näide tabelist, kus minimaalne veerusumma on 24	1 p.
	7 p.
Leiti vähima veerusumma suurim võimalik väärtus ühel juhtudest, kus 1 oli kas 1, 2, 3 või 4 veerus ja toodi ära näide tabelist, kus see väärtus realiseerus	1 p.

10. klass

Ülesanne 1 (Toomas Paaver)

Põhimõtteliselt õige võrratus või arutlus	2 p.
Tõestus,et n>3	1 p.
Tõestus, et n<7	2 p.
Näitamine, et sellised 4-, 5- ja 6-nurgad on olemas	2 p.
	1 p.

Ülesanne 2 (Nikita Salnikov)

Näitamine, et n=4 ja n=3 ei sobi	2 p.
Tähelepanek, et kolme erinevate või kolme võrdsete jääkidega arvu summa jagub kolmega	2 p.
Tõestus, et 5 arvu seas leidub alati 3 arvu, mis annavad kas kõik samad või kõik erinevad jäägid 3-ga jagamisel	3 p.
	7 p.
Ainult õige vastuse eest	1 p.

Ülesanne 3 (Vladimir Kutšmei)

Õige lahendus, aga vale vastus	6 p.
Lahenduse idee on õige ning saadud õige vastus, aga mõned sammud ei ole piisavalt põhjendatud	5 p.
Vastus õige, aga lahenduses olulised sammud (mis ei ole ilmsed) ei ole põhjendatud	3 p.
Leitud nurkade ADC ja BDC siinused (või koosinused, tangensid).	2 p.
Leitud lõikude AD ja BD pikkused	1 p.

Ülesanne 4 (Kati Metsalu)

Täielik lahendus	7 p.
Tõestatud, et igale tegurile vastab harmooniline kolmik, vastupidine tõestamata	5 p.
Saadud kätte kasulik võrdus, näiteks b=c+c^2/(a-c), sellest ilma põhjendamata tehtud nõutud järeldus	3 p.
Pole tehtud midagi ülesande lahenduse jaoks kasulikku	0 p.

Ülesanne 5 (Meelis Kull)

Idee kasutada induktsiooni	2 p.
Tõestus, et iga sõna w korral ww ja w<u>w</u> erinevad poolte tähtede poolest	1 p.
Tõestus, et iga kaks sama pikka sõna v1v1 ja v2v2 erinevad poolte tähtede poolest	1 p.
Tõestus, et iga kaks sama pikka sõna v1<u>v1</u> ja v2<u>v2</u> erinevad poolte tähtede poolest	1 p.
Tõestus, et iga kaks sama pikka sõna v1v1 ja v2<u>v2</u> erinevad poolte tähtede poolest	1 p.
Tõestus, et iga kaks sama pikka sõna v1<u>v1</u> ja v2v2 erinevad poolte tähtede poolest	1 p.
	7 p.

11. klass

Ülesanne 1 (Mati Abel)

Mingi lahendi leidmine	1 p.
Arusaamine, et hulknurga sisenurkade summa on võrdne aritmeetilise progressiooni summaga	2 p.
Arusaamine, et suurim nurk on väiksem kui *pi* ja n on suurem kui 3	1 p.
Nurga arvutuseeskirja leidmine	1 p.
n väärtuste võimalike piiride leidmine	1 p.
n=3 ja n=4 korral sobivate nurga väärtuste leidmine	1 p.
	7 p.

Ülesanne 2 (Valdis Laan)

Lahendaja kasutab seda, et liidetavad on taandumatud murrud	1 p.
Lahendaja teab, mis on vähim ühiskordne	1 p.
Lahendaja oskab kasutada jaguvusseose omadusi	1 p.
Kõik muu on ka õigesti	4 p.
	7 p.

Ülesanne 3 (Härmel Nestra)

Tehtud ainult mediaanide jaoks	0 p.
Hinnatud võrratustega ühes suunas	0 p.
Nihutatud kuidagiviisi tippudest tömmatud löike	0 p.

Osas töödes oli hakatud mingil viisil arutlema ja polnud kuhugi jõutud. Ma panin ka sel juhul 0 p., kuid võib olla, et tegemist on mõistliku algusega, mille eest võiks ka punkte saada. Kui oskate näidata, et teie poolt kirjapandu tõepoolest on mingi korrektse lahenduse oluline osa, siis tulge apelleerima. Mõtet võib minu arvates olla töödel XI-04, XI-13 ja XI-17. Ülejäänutel ei näe ma mingit võimalust punkte juurde saada.

Ülesanne 4 (Ahti Peder)

Saadud tulemus,et xy pole suurem kui 1	2 p.
Idee teha asendus x=1-a, y=1+a	2 p.
Jõutud mingi 6.astme 1-muutujaga polünoomiga võrratuseni	1 p.
Jõutud võrratuseni (xy)(xy)(2-xy) väiksem võrdne kui 1,või sellega samaväärseni	1 p.

Ülesanne 5 (Uve Nummert)

a) osa eest kokku	4 p.
trapetsi suuruse jaoks õige lahendi leidmine	*1 p.*
nende 3 lahendi leidmine, mis tulenevad otse 2001 teguriteks lahutusest	*1 p.*
ülejäänud 4 lahendi leidmine	*2 p.*
b) osa eest kokku	3 p.
1,2,3,4 mittesobivus ja paaritute arvude sobivus alates 5-st	*1 p.*
ülejäänud mittesobivate arvude leidmine	*2 p.*
	7 p.

12. klass

Ülesanne 1 (Eno Tõnisson)

Tähelepanek, et x=0, y=0 on lahend	1 p.
Sirge y=x olulise rolli (või sümmeetrilisuse) äramärkimine	2 p.
Ammendavad põhjendused lahendi ainsuse kohta	4 p.
	7 p.

Ülesanne 2 (Kalle Kaarli)

Näitamine, et saab sobivalt valida *n* arvu.	3 p.
Näitamine, et rohkem arve nõutud viisil valida ei saa.	4 p.
	7 p.

Punkte on maha võetud, kui seletustes on lünki, ebakorrektsusi.

Lahendusi, mis ei mahtunud ülaltoodud skaala alla, on hinnatud individuaalselt.

Ülesanne 3 (Jan Villemson)

Nurgapoolitaja omaduse kasutamine	1 p.
Lõikude AE ja BD pikkuste avaldamine kolmnurga külgede, siseringjoone raadiuse ja/või nurkade kaudu	3 p.
Avaldise 1/|AE|+1/|BD| teisendamine kujule 1/r	3 p.
	7 p.

Ülesanne 4 (Indrek Zolk)

Juhul a=2 sobiva algarvu p väärtuse leidmine	1 p.
Tõestus, et ka muude a väärtuste korral leidub sobiv algarvu p väärtus	6 p.
Sealhulgas:	
Tõestus, et paaritute arvude a korral leidub sobiv algarvu p väärtus	*1 p.*
Tõestus, et arvude a=2 (mod 3) korral leidub sobiv algarvu p väärtus	*1 p.*
Tõestus, et arvude a=1 (mod 3) korral leidub sobiv algarvu p väärtus	*1 p.*
	7 p.

Ülesanne 5 (Emilia Käsper)

Idee kasutada võrdust s_1+s_2+s_3=v_1+v_2+v_3 (kus s_i ja v_i on vastavalt i-nda rea ja veeru arvude summa)	1 p.
Tabeli mingi arvu avaldamine kahe teise arvu kaudu (nt. a_11 = +/- a_22 +/- a_33)	3 p.
Tähelepanek, et tabeli arvude mittenegatiivsuse tõttu on saadud võrduse paremal pool kahe arvu summa või vahe	1 p.
Sobiva tabeli leidmine	2 p.
	7 p.