Eesti koolinoorte XLIX täppisteaduste olümpiaadi

lõppvoor MATEMAATIKAS

Tartus, 7. märtsil 2002. a.

IX klass

Lahendamisaega on 5 tundi.
Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti.
Taskuarvutit kasutada ei lubata.

1. Ruudu $ABCD$ külgedel BC ja CD võetakse vastavalt punktid K ja L nii, et $\angle AKB = \angle AKL$. Leia nurga KAL suurus.

2. Tähistagu $\overline{xy}$ kahekohalist arvu numbritega x ja y. Kas leiduvad sellised erinevad numbrid a, b ja c, millest ükski ei ole 0, et arv $\overline{ab}$ jagub c-ga, arv $\overline{bc}$ jagub a-ga ning arv $\overline{ca}$ jagub b-ga?

3. Olgu $a_1, a_2, \ldots, a_n$ erinevad reaalarvud ning olgu nende kõigi paarikaupa võetud summade $a_i + a_j$ $(i \neq j)$ hulgas m erinevat arvu. Leia m vähim võimalik väärtus.

4. Mari kirjutab tahvlile 5 arvu. Seejärel võib Jüri neid arve sammhaaval muuta, kustutades igal sammul ühe arvu ja kirjutades selle asemele arvu $x+y-z$, kus x, y ja z on mingid kolm ülejäänud neljast tahvlil olevast arvust. Kas Jüri saab Mari kirjutatud mistahes arvude korral toimida nii, et lõpliku arvu kirjeldatud sammude järel on tahvlil viis võrdset arvu?

5. Saarel elas $n > 1$ pärismaalast, kellest igaüks rääkis kas ainult tõtt või ainult valet, kusjuures igal pärismaalasel oli ülejäänute seas vähemalt üks sõber. Saarele saabunud uus kuberner korraldas küsitluse, kus iga pärismaalane pidi vastama, kas tema sõprade seas on rohkem valetajaid või tõerääkijaid, või on neid ühepalju. Küsitlusel vastasid kõik pärismaalased, et nende sõprade seas on valetajaid rohkem kui tõerääkijaid. Seejärel lasi kuberner ühe pärismaalase valetamises kahtlustatuna hukata ja korraldas siis uue küsitluse, kus pärismaalased pidid veelkord vastama samale küsimusele. Seekord vastasid kõik pärismaalased, et nende sõprade seas on tõerääkijaid rohkem kui valetajaid.

   Kas hukatud pärismaalane oli valetaja või tõerääkija ja kas järelejäänud pärismaalaste seas on rohkem valetajaid või tõerääkijaid (eeldame, et pärismaalaste tõe- või valerääkimine ja sõprussuhted nende vahel kahe küsitluse vahepeal ei muutunud)?

Eesti koolinoorte XLIX täppisteaduste olümpiaadi

lõppvoor MATEMAATIKAS

Tartus, 7. märtsil 2002. a.

X klass

Lahendamisaega on 5 tundi.
Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti.
Taskuarvutit kasutada ei lubata.

1. Positiivsete täisarvude m ja n suurim ühistegur d ja vähim ühiskordne v rahuldavad tingimust $3m + n = 3v + d$. Tõesta, et arv m jagub arvuga n.

2. Olgu ABC mittetäisnurkne kolmnurk ja H selle kõrguste lõikepunkt. Tõesta, et kolmnurk ABH on teravnurkne siis ja ainult siis, kui $\angle ACB$ on nürinurk.

3. Juku leiab positiivsete täisarvude $a_1, a_2, \ldots, a_7$ kõikvõimalikud paarikaupa korrutised $a_i a_j$, summad $a_i + a_j$ ja vahede absoluutväärtused $|a_i - a_j|$, kus $i \neq j$. Kui palju erinevaid paarituid arve võib maksimaalselt olla Juku leitud arvude hulgas?

4. Leia sellise murdjoone maksimaalne pikkus, mille otspunktideks on ühikkuubi kaks vastastippu, lülideks on selle kuubi servad ja tahkude diagonaalid ning mis ei lõika iseennast ega läbi kuubi ühtegi tippu rohkem kui üks kord.

5. Õpetaja kirjutab tahvli kumbagi serva arvu 1. Esimene õpilane kirjutab nende vahele lisaks arvu 2; iga järgmine õpilane kirjutab iga kahe tahvlil kõrvuti oleva arvu vahele lisaks nende summa (pärast teise õpilase tahvli juures käimist on tahvlil arvud 1, 3, 2, 3, 1, pärast kolmandat õpilast arvud 1, 4, 3, 5, 2, 5, 3, 4, 1, jne.) Leia kõigi tahvlil olevate arvude summa pärast seda, kui n õpilast on käinud sinna arve juurde kirjutamas.

Eesti koolinoorte XLIX täppisteaduste olümpiaadi

lõppvoor MATEMAATIKAS

Tartus, 7. märtsil 2002. a.

XI klass

Lahendamisaega on 5 tundi.
Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti.
Taskuarvutit kasutada ei lubata.

1. Milliste reaalarvude a korral on võrrandil $x^8 + ax^4 + 1 = 0$ neli reaalarvulist lahendit, mis on mingi aritmeetilise jada järjestikusteks liikmeteks?

2. Leia võrdkülgse kolmnurga pindala, kui selle sisepiirkonnas leidub punkt, mille kaugused kolmnurga tippudest on 3, 4 ja 5.

3. Õpetaja kirjutab tahvlile 2002-kohalise arvu $999\ldots9$. Esimene õpilane lahutab selle arvu kahe 1-st suurema teguri a ja b korrutiseks ning kustutab siis tahvlil oleva arvu ja kirjutab selle asemele kaks sellist arvu a' ja b', et $|a-a'| = 2$ ja $|b-b'| = 2$. Teine õpilane valib ühe tahvlil olevatest arvudest, lahutab selle arvu kahe 1-st suurema teguri c ja d korrutiseks ning kustutab siis valitud arvu tahvlilt ja kirjutab selle asemele kaks sellist arvu c' ja d', et $|c-c'| = 2$ ja $|d-d'| = 2$. Kolmas õpilane valib omakorda ühe tahvlil olevatest arvudest ning asendab selle sama reegli kohaselt kahe uue arvuga, jne. Kas on võimalik, et pärast seda, kui mingi arv õpilasi on käinud tahvli juures, on kõik tahvlil olevad arvud võrdsed 9-ga?

4. Olgu a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 sellised reaalarvud, et nende paarikaupa võetud summadest $a_i + a_j$, kus $i < j$, vähemalt N on täisarvud. Leia suurim arv N, mille korral on võimalik, et need summad $a_i + a_j$ ei ole kõik täisarvud.

5. Juku ehitas roboti, mis liigub mööda korrapärase kaheksanurga kujulist rada, läbides kaheksanurga ühe külje täpselt 1 minutiga. Robot alustab liikumist kaheksanurga tipust A ning edaspidi võib ta mistahes tippu jõudes kas samas suunas liikumist jätkata või ümber pöörata ja jätkata liikumist vastassuunas. Kui mitmel erineval viisil võib robot liikuda, nii et ta n minuti pärast on tipu A vastastipus B?

Eesti koolinoorte XLIX täppisteaduste olümpiaadi

lõppvoor MATEMAATIKAS

Tartus, 7. märtsil 2002. a.

XII klass

Lahendamisaega on 5 tundi.
Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti.
Taskuarvutit kasutada ei lubata.

1. Peeter, Jüri, Kati ja Mari seisavad pimeda tunneli sissepääsu juures. Neil on kasutada nelja peale üks tõrvik, milleta keegi neist ei julge tunnelis viibida, ning tunnel on nii kitsas, et üle kahe inimese seal koos liikuda ei saa. Peetril kulub tunneli läbimiseks 1 minut, Jüril 2 minutit, Katil 5 minutit ja Maril 10 minutit. Leia vähim võimalik aeg, mille jooksul kõik pääsevad läbi tunneli.

2. Kas arv, mis koosneb ainult numbritest 2 ja 0, võib olla mingi positiivse täisarvu k-s aste, kus $k \geqslant 2$?

3. Tõesta, et positiivsed reaalarvud a, b ja c rahuldavad võrratust

   $$2(a^4 + b^4 + c^4) < (a^2 + b^2 + c^2)^2$$

   siis ja ainult siis, kui leidub kolmnurk küljepikkustega a, b ja c.

4. Kumera nelinurga $ABCD$ kõik tipud paiknevad ringjoonel ω. Kiired AD ja BC lõikuvad punktis K ning kiired AB ja DC lõikuvad punktis L. Tõesta, et kolmnurga AKL ümberringjoon puutub ringjoont ω siis ja ainult siis, kui kolmnurga CKL ümberringjoon puutub ringjoont ω.

5. Juku sünnipäeval loositakse külaliste vahel välja teatud arv ühesuguseid võite selliselt, et iga külaline võib saada ülimalt ühe võidu. On teada, et kui võite oleks tegelikust ühe võrra vähem, siis oleks võitude võimalikke jaotumisi külaliste vahel tegelikust 50% võrra vähem; kui aga võite oleks tegelikust ühe võrra rohkem, siis oleks võitude võimalikke jaotumisi tegelikust 50% võrra rohkem. Leia võitude võimalike jaotumiste arv.

XLIX Олимпиада по точным наукам учащихся Эстонии

Заключительный тур по МАТЕМАТИКЕ

Тарту, 7 марта 2002 г.

IX класс

Время, отводимое для решения: 5 часов.
Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи дает 7 баллов.
Пользоваться калькулятором не разрешается.

1. На сторонах BC и CD квадрата $ABCD$ берут соответственно точки K и L так, что $\angle AKB = \angle AKL$. Найти величину угла KAL.

2. Пусть $\overline{xy}$ обозначает двузначное число с цифрами x и y. Найдутся ли такие различные цифры a, b и c, все отличны от 0, что число $\overline{ab}$ делится на c, число $\overline{bc}$ делится на a и число $\overline{ca}$ делится на b?

3. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n$ различные действительные числа и пусть среди всех взятых попарно сумм $a_i + a_j$ $(i \neq j)$ есть m различных чисел. Найти наименьшее возможное значение для m.

4. Маша пишет на доске 5 чисел. Затем Юра может ход за ходом изменять эти числа, стирая за один ход одно число и записывая вместо него число $x+y-z$, где x, y и z некоторые три из четырех оставшихся чисел на доске. Сможет ли Юра при любых написанныш Машей числах действовать так, что после конечного числа описанных выше ходов на доске будет пять одинаковых чисел?

5. На острове жили $n > 1$ аборигенов, каждый из которых говорил либо только правду, либо только ложь, причем у каждого аборигена был среди остальных аборигенов по крайней мере один друг. Прибывший на остров новый губернатор организовал опрос, в котором каждый абориген должен был ответить на вопрос, кого больше среди его друзей: лгунов или правдивых, или тех и других поровну. Все аборигены на этот вопрос ответили, что среди их друзей больше лгунов, чем правдивых. После этого губернатор приказал казнить одного аборигена, заподозренного во лжи, и провел новый опрос, в котором аборигены должны были снова ответить на тот же вопрос. На этот раз все аборигены ответили, что среди их друзей правдивых больше, чем лгунов.

   Был ли казненный абориген лгуном или правдивым, и кого больше среди оставшихся аборигенов: лгунов или правдивых (предполагаем, что правдивость аборигенов и дружеские отношения между ними не изменились между двумя опросами)?

XLIX Олимпиада по точным наукам учащихся Эстонии

Заключительный тур по МАТЕМАТИКЕ

Тарту, 7 марта 2002 г.

X класс

Время, отводимое для решения: 5 часов.
Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи дает 7 баллов.
Пользоваться калькулятором не разрешается.

1. Наибольший общий делитель d и наименьшее общее кратное v положительных целых чисел m и n удовлетворяют условию $3m + n = 3v + d$. Доказать, что число m делится на число n.

2. Пусть ABC непрямоугольный треугольник и H точка пересечения его высот. Доказать, что треугольник ABH является остроугольным тогда и только тогда, когда $\angle ACB$ тупой.

3. Коля находит для положительных целых чисел $a_1, a_2, \ldots, a_7$ всевозможные попарные произведения $a_i a_j$, суммы $a_i + a_j$ и модули разностей $|a_i - a_j|$, где $i \neq j$. Сколько различных нечетных чисел может быть максимально среди найденных Колей чисел?

4. Найти максимальную длину такой ломаной, концами которой являются две противоположные вершины единичного куба, а звеньями — ребра и диагонали граней этого куба, причем ломанаja не пересекает самого себя и не проходит ни через одну вершину куба более одного раза.

5. Учитель пишет у каждого бокового ребра доски число 1. Первый ученик пишет между ними дополнительно число 2; каждый следующий ученик пишет дополнительно между каждыми двумя находящимися рядом на доске числами их сумму (после второго ученика на доске окажутся числа 1, 3, 2, 3, 1, после третьего ученика числа 1, 4, 3, 5, 2, 5, 3, 4, 1, и т.д.) Найти сумму всех чисел на доске после того, как n учеников дописали на доску числа.

XLIX Олимпиада по точным наукам учащихся Эстонии

Заключительный тур по МАТЕМАТИКЕ

Тарту, 7 марта 2002 г.

XI класс

Время, отводимое для решения: 5 часов.
Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи дает 7 баллов.
Пользоваться калькулятором не разрешается.

1. Для каких действительных чисел a уравнение $x^8 + ax^4 + 1 = 0$ имеет четыре действительных решения, которые являются последовательными членами некоторой арифметической прогрессии?

2. Найти площадь равностороннего треугольника, если в его внутренней области находится точка, расстояния от которой до вершин треугольника равны 3, 4 и 5.

3. Учитель пишет на доске 2002-значное число $999\ldots9$. Первый ученик раскладывает это число на произведение двух, больших 1, множителей a и b, стирает затем число на доске и пишет вместо него два таких числа a' и b', что $|a - a'| = 2$ и $|b - b'| = 2$. Второй ученик выбирает одно из чисел на доске, раскладывает это число на произведение двух, больших 1, множителей c и d, стирает с доски выбранное число и пишет вместо него два таких числа c' и d', что $|c - c'| = 2$ и $|d - d'| = 2$. Третий ученик выбирает в свою очередь одно из чисел на доске и заменяет его на два новых числа, полученных по тому же правилу, и т.д. Возможно ли, что после того, как некоторое число учеников побывает у доски, все находящиеся на доске числа будут равны 9?

4. Пусть a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 такие действительные числа, что не менее чем N из попарно взятых сумм $a_i + a_j$, где $i < j$, являются целыми числами. Найти наибольшее число N, для которого возможно, что не все такие суммы $a_i + a_j$ являются целыми числами.

5. Коля построил робота, который двигается вдоль дорожки, имеющей форму правильного восьмиугольника, и проходит одну сторону восьмиугольника ровно за 1 минуту. Робот начинает движение из вершины A восьмиугольника и далее, достигнув любую из вершин, может либо двигаться дальше в том же направлении, либо развернуться и двигаться в обратном направлении. Сколькими различными способами может двигаться робот, так чтобы через n минут он оказался в вершине B, противоположной вершине A?

XLIX Олимпиада по точным наукам учащихся Эстонии

Заключительный тур по МАТЕМАТИКЕ

Тарту, 7 марта 2002 г.

XII класс

Время, отводимое для решения: 5 часов.
Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи дает 7 баллов.
Пользоваться калькулятором не разрешается.

1. Петя, Юра, Катя и Маша стоят перед входом в темный туннель. На четверых у них имеется один факел, без которого ни один из них не решается находиться в туннеле, кроме того туннель такой узкий, что вместе там могут двигаться не более двух человек. Петя может проходить туннель за 1 минуту, Юра за 2 минуты, Катя за 5 минут и Маша за 10 минут. Найти наименьшее возможное время, за которое все пройдут через туннель.

2. Может ли число, состоящее только из цифр 2 и 0, быть k-ой степенью некоторого положительного целого числа, где $k \geqslant 2$?

3. Доказать, что положительные действительные числа a, b и c удовлетворяют неравенству

$$2(a^4 + b^4 + c^4) < (a^2 + b^2 + c^2)^2$$

тогда и только тогда, когда найдется треугольник с длинами сторон a, b и c.

4. Все вершины выпуклого четырехугольника $ABCD$ находятся на окружности ω. Лучи AD и BC пересекаются в точке K, а лучи AB и DC пересекаются в точке L. Доказать, что описанная около треугольника AKL окружность касается окружности ω тогда и только тогда, когда описанная около треугольника CKL окружность касается окружности ω.

5. На дне рождения Коли между гостями разыгрывают некоторое число одинаковых призов так, чтобы каждый гость может получить не более чем один приз. Известно, что если призов было бы на один меньше чем в действительности, то возможных распределений призов среди гостей было бы на 50% меньше чем в действительности; если же призов было бы на один больше чем в действительности, то возможных распределений призов среди гостей было бы на 50% больше чем в действительности. Найти число возможных распределений призов.

Eesti koolinoorte XLIX täppisteaduste olümpiaadi

lõppvoor MATEMAATIKAS

Tartus, 7. märtsil 2002. a.

Lahendused ja vastused

IX klass

1. *Vastus:* 45°.

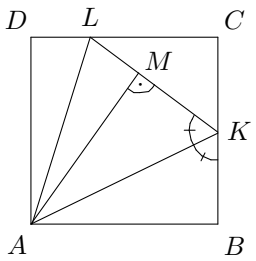
   Olgu M tipust A lõigule KL tõmmatud ristlõigu aluspunkt (vt. joonist 1). Täisnurksed kolmnurgad ABK ja AMK on kongruentsed, sest neil on ühine hüpotenuus AK ja üks paar võrdse suurusega teravnurki. Seega $|AM| = |AB| = |AD|$, s.t. täisnurksed kolmnurgad AML ja ADL on samuti kongruentsed ning

   $$\angle KAL = \angle KAM + \angle LAM = \angle KAB + \angle LAD\,,$$

   kust

   $$2\angle KAL = \angle KAM + \angle LAM + \angle KAB + \angle LAD = 90^\circ$$

   ning $\angle KAL = 45^\circ$.



Joonis 1

2. *Vastus:* ei.

   Kui üks ülesande tingimusi rahuldavatest numbritest a, b ja c on paaris, siis peavad need numbrid kõik olema paaris (tõepoolest, kui näiteks c on paaris, siis peab $\overline{ab}$ olema paaris, kust b on paaris; nüüd

peab ka $\overline{ca}$ olema paaris, kust a on samuti paaris). Siis aga on ka $\frac{a}{2}$, $\frac{b}{2}$ ja $\frac{c}{2}$ ülesande tingimusi rahuldavad numbrid. Seega võime üldisust kitsendamata eeldada, et need numbrid on kõik paaritud. Paneme ka tähele, et ükski neist numbritest ei saa olla 5, sest siis peaksid ka kaks ülejäänut olema 5. Niisiis piisab vaadelda numbreid 1, 3, 7 ja 9 ning üks numbritest a, b ja c peab olema 3 või 9. Ülejäänud kahest numbrist moodustatud arv peab seega jaguma 3-ga, mis aga on võimalik ainult juhul, kui need kaks numbrit on 3 ja 9. Saadud vastuolu näitab, et ülesande tingimustele vastavaid numbreid a, b ja c ei leidu.

3. *Vastus:* $2n-3$.

   Üldisust kitsendamata võime eeldada, et $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$. Siis

   $$a_1 + a_2 < a_1 + a_3 < \ldots < a_1 + a_n < a_2 + a_n < \ldots < a_{n-1} + a_n \ ,$$

   s.t. erinevaid summasid on igal juhul vähemalt $2n-3$. Võttes arvudeks a_i arvud $1, 2, \ldots, n$ näeme, et minimaalne summa on $1+2=3$ ja maksimaalne $(n-1)+n = 2n-1$, s.t. erinevaid summasid on sel juhul täpselt $2n-3$.

4. *Vastus:* jah.

   Olgu Mari kirjutatud arvud a, b, c, d ja e (need ei tarvitse olla kõik erinevad). Kõigepealt saab Jüri arvud a ja b asendada võrdsete arvudega $x = c + d - e$. Seejärel saab ta arvud c ja d asendada arvudega $e + x - x = e$ ning lõpuks arvud x asendada arvudega $e + e - e = e$:

   $$(a, b, c, d, e) \to (x, x, c, d, e) \to (x, x, e, e, e) \to (e, e, e, e, e) \ .$$

5. *Vastus:* hukati tõerääkija ja seejärel jäid saarele ainult valetajad, s.t. valetajaid on pärast hukkamist rohkem kui tõerääkijaid.

   Kui alguses oleksid saarel olnud ainult valetajad, oleksid ka nende sõbrad olnud kõik valetajad, s.t. nende ütlused esimesel küsitlusel oleksid olnud tõesed — vastuolu.

   Kui aga pärast hukkamist oleks saarel mõni tõerääkija, siis pidanuks tema ütlused nii esimesel kui ka teisel küsitlusel olema tõesed — see pole aga võimalik, sest ühe pärismaalase hukkamise tulemusena ei saa kellegi valetajatest ja tõerääkijatest sõprade arvude vahe muuta märki.

X klass

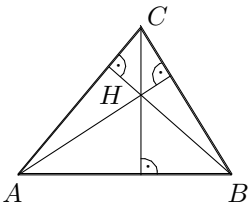
1. Olgu $m = dm'$ ja $n = dn'$, kus SÜT$(m', n') = 1$. Siis $v = m'n'd$ ning ülesande tingimusest saame $3m'd + n'd = 3m'n'd + d$, kust $3m' + n' = 3m'n' + 1$ ehk $(3m' - 1)(n' - 1) = 0$. Et $3m' - 1 \neq 0$, siis $n' - 1 = 0$ ning seega $n = d$ on arvu m jagaja.

2. Kui H on kolmnurga ABC kõrguste lõikepunkt, siis $AC \perp BH$ ja $BC \perp AH$, s.t. C on kolmnurga ABH kõrguste lõikepunkt. Vaatleme nüüd kolme võimalikku juhtu.

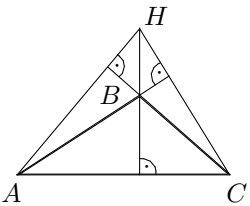
   (1) Kolmnurk ABC on teravnurkne (vt. joonist 2). Siis punkt H asub kolmnurga ABC sees ning seega punkt C asub kolmnurgast ABH väljaspool, mistõttu kolmnurk ABH on nürinurkne.

   (2) Kolmnurk ABC on nürinurkne ja $\angle ACB$ on teravnurk. Üldisust kitsendamata eeldame, et nürinurk on tipu B juures (vt. joonist 3). Et punkt H asub kolmnurga ABC pikimale küljele AC tõmmatud kõrguse pikendusel üle tipu B, siis punktid C ja H asuvad sirgest AB erineval pool. Seega punkt C asub kolmnurgast ABH väljaspool, mistõttu kolmnurk ABH on nürinurkne.

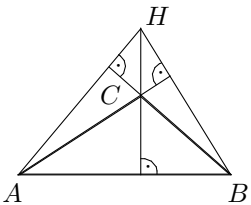
   (3) Kolmnurk ABC on nürinurkne ja $\angle ACB$ on nürinurk (vt. joonist 4). Siis punkt H asub kolmnurga ABC küljele AB tõmmatud kõrguse pikendusel üle tipu C. Seega punkt C asub kolmnurga ABH sees, mistõttu kolmnurk ABH on teravnurkne.



Joonis 2



Joonis 3



Joonis 4

3. *Vastus:* 30.

   Kui arvude a_i hulgas on m paaritut arvu, siis Juku leitud paarituid arve on maksimaalselt

$$f(m) = \frac{m(m-1)}{2} + 2 \cdot m(7-m) = \frac{1}{2}(m^2 - m + 28m - 4m^2) =$$

$$= \frac{3}{2}m(9-m) = \frac{3}{2}\cdot\left(\frac{81}{4} - \left(\frac{9}{2}-m\right)^2\right)$$

ning $f(m)$ maksimaalne väärtus on $f(4) = f(5) = 30$.

Jääb üle näidata, et need paaritud arvud võivad olla kõik erinevad. Selleks võime võtta näiteks $a_1 = 2$, $a_2 = 4$ ja $a_3 = 6$ ning $a_4 = 25 = 5^2$, $a_5 = 125 = 5^3$, $a_6 = 15625 = 5^6$ ja $a_7 = 9765625 = 5^{10}$. Siis nende arvude paaritud vahed on

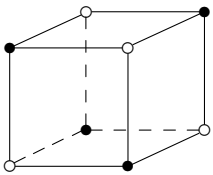
19, 21, 23, 119, 121, 123, 15619, 15621, 15623,
9765619, 9765621, 9765623;

nende arvude paaritud summad on

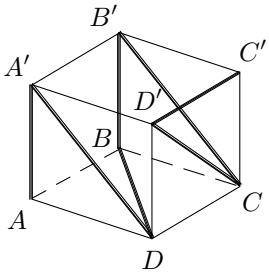
27, 29, 31, 127, 129, 131, 15627, 15629, 15631,
9765627, 9765629, 9765631

ning nende arvude paaritud korrutised on

5^5, 5^8, 5^9, 5^{12}, 5^{13}, 5^{16}.



Joonis 5



Joonis 6

4. *Vastus:* $3 + 4\sqrt{2}$.

Vaadeldava murdjoone lülideks on kuubi servad pikkusega 1 ja kuubi tahkude diagonaalid pikkusega $\sqrt{2}$. Et kuubil on 8 tippu ning murdjoon ei läbi ühtegi tippu rohkem kui üks kord, siis saab tal olla ülimalt 7 lüli. Värvides kuubi tipud kahe värviga nii, et naabertipud oleksid erinevat värvi (vt. joonist 5), näeme, et kuubi vastastipud on erinevat värvi ning mistahes tahu vastastipud on sama värvi — seega peab

murdjoon sisaldama paaritu arvu kuubi servi. Ülaltoodud värvimisest järeldub ka, et murdjoon ei saa sisaldada järjest üle kolme lüli, mis on kuubi tahkude diagonaalid (kuna nende otspunktid oleksid siis kõik ühte värvi ja kuubil on ainult 4 üht värvi tippu). Kui nüüd murdjoon sisaldaks ühe kuubi serva ja kuus tahkude diagonaali, siis peaks selle kummaski otsas olema kolm lüli, mis on kuubi tahkude diagonaalid — on lihtne kontrollida, et nende lülide paigutamiseks on sümmeetria täpsusega üksainus võimalus ning saadavad murdjoone osad ei ole ühendatavad kuubi servaga. Seega ei saa vaadeldav murdjoon olla pikem kui $3+4\sqrt{2}$; sellise pikkusega sobiv murdjoon on näidatud joonisel 6.

5. *Vastus:* 3^n+1.

   Olgu S_n pärast n-ndat õpilast tahvlil olevate arvude summa. Tõestame induktsiooniga, et $S_n = 3^n+1$. Kui $n=0$, siis $S_0 = 2 = 3^0+1$. Eeldame nüüd, et k õpilase järel on tahvlil olevate arvude summa 3^k+1. Siis $k+1$ õpilase järel on tahvlil kõik k õpilase järel tahvlil olnud arvud ning lisaks $(k+1)$. õpilase kirjutatud summad — seejuures iga k õpilase järel tahvlil olnud arv kuulub täpselt kahe sellise summa koosseisu, välja arvatud kaks äärmist arvu 1, mis kuuluvad ainult ühe sellise summa koosseisu. Seega

$$S_{k+1} = S_k + 2S_k - 2 = 3(3^k+1) - 2 = 3^{k+1}+1\ .$$

XI klass

1. *Vastus:* $a = -\dfrac{82}{9}$.

   Paneme tähele, et muutuja vahetusega $t = x^4$ saame ruutvõrrandi t suhtes, ning võrrandil $x^4 = t_0$ on ülimalt kaks lahendit, mis on sel juhul teineteise vastandarvud. Seega juhul, kui võrrandil $x^8+ax^4+1=0$ on neli lahendit, peavad need olema kujul $\pm x_0$ ja $\pm x_1$. Eeldades üldisust kitsendamata, et $x_1 > x_0$, näeme, et need lahendid on aritmeetilise jada järjestikusteks liikmeteks siis ja ainult siis, kui $x_1 = 3x_0$. Võrrandi t^2+at+1 lahenditeks on siis x_0^4 ja $81x_0^4$ ning Viete'i valemitest saame, et $81x_0^8 = 1$, kust $x_0^4 = \dfrac{1}{9}$, ning $a = -82x_0^4 = -\dfrac{82}{9}$.

2. *Vastus:* $\dfrac{36+25\sqrt{3}}{4}$.

Olgu vaatluse all kolmnurk ABC ja punkt P ning olgu $|PA| = 3$, $|PB| = 4$ ja $|PC| = 5$. Pöörame kolmnurka 60° võrra ümber tipu C, nii et tipp A asetub tipu B kohale ja tipp B kujutub punktiks B' (vt. joonist 7). Punkt P kujutub siis punktiks P', kusjuures $|P'B| = |PA| = 3$, $|P'B'| = |PB| = 4$ ja $|P'C| = |PC| = 5$. Et lõikude CP ja CP' vaheline nurk on 60°, siis on kolmnurk CPP' võrdkülgne, s.t. $|PP'| = 5$. Nüüd

$$|PB|^2 + |P'B|^2 = 4^2 + 3^2 = 5^2 = |PP'|^2 \ ,$$

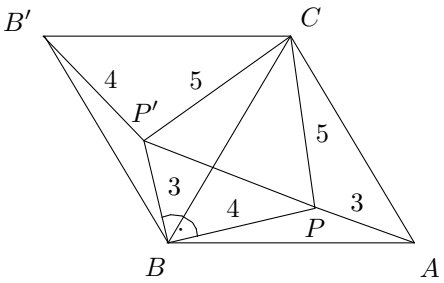
mistõttu $\angle PBP' = 90^\circ$. Et kolmnurgad APB ja $BP'B'$ on kongruentsed, siis

$$\angle ABP + \angle BAP = \angle ABP + \angle B'BP' = 120^\circ - 90^\circ = 30^\circ$$

ning $\angle APB = 180^\circ - 30^\circ = 150^\circ$. Koosinusteoreemist kolmnurgas APB saame nüüd

$$\begin{aligned} |AB|^2 &= |AP|^2 + |BP|^2 - 2 \cdot |AP| \cdot |BP| \cdot \cos \angle APB = \\ &= 9 + 16 + 24 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 25 + 12\sqrt{3} \end{aligned}$$

ning otsitav pindala on $S = \dfrac{\sqrt{3}}{4} \cdot |AB|^2 = \dfrac{36 + 25\sqrt{3}}{4}$.



Joonis 7

3. *Vastus:* ei.

Alguses tahvlile kirjutatud 2002-kohaline arv $999\ldots9$ annab 4-ga jagamisel jäägi 3, arv 9 aga jäägi 1. Kui $N = ab$ ning N annab 4-ga

jagamisel jäägi 3, siis üks arvudest a ja b annab 4-ga jagamisel jäägi 1 ja teine jäägi 3 ning arvu N asemele tahvlile kirjutatavatest arvudest a' ja b' (kus $|a-a'|=2$ ja $|b-b'|=2$) annab samuti üks 4-ga jagamisel jäägi 1 ja teine jäägi 3. Seega on iga sammu järel tahvlil vähemalt üks arv, mis annab 4-ga jagamisel jäägi 3, mistõttu ei ole võimalik, et mingi arvu sammude järel oleksid seal ainult arvud 9.

4. *Vastus:* 6.

Võttes arvudeks a_i neli täisarvu ja ühe mitte-täisarvu, saame 6 täisarvulist ja 4 mitte-täisarvulist summat. Tähistagu edaspidi $\{c\}$ arvu c murdosa, s.t. $c=c-[c]$, kus c on arvu c täisosa, ning $0 \leqslant \{c\} < 1$. Et tõestada $N=6$ maksimaalsust, paneme tähele, et:

(a) kui $\{a\} \neq \{b\}$ ja c on suvaline reaalarv, siis summadest $c+a$ ja $c+b$ ülimalt üks võib olla täisarv;

(b) kui $a=b$, siis $a+b$ on täisarv siis ja ainult siis, kui $\{a\}=0$ või $\{a\}=0{,}5$;

(c) kui $\{a\} \neq \{b\}$ ja $a+b$ on täisarv, siis $\{a\}$ ja $\{b\}$ ei ole 0 ega $0{,}5$.

Vaatleme nüüd 5-elemendilise hulga erinevaid võimalikke tükeldusi alamhulkadeks, kus ühte alamhulka kuuluvad sama murdosaga arvud.

(1) Kui $\{a_1\}=\{a_2\}=\{a_3\}=\{a_4\}=\{a_5\}$ ning summade a_i+a_j hulgas on täisarve, siis vastavalt punktile (b) on need summad kõik täisarvud.

(2) Kui $\{a_1\}=\{a_2\}=\{a_3\}=\{a_4\}=x$ ning $\{a_5\} \neq x$, siis juhul, kui x ei ole 0 ega $0{,}5$, on meil vastavalt punktile (b) ülimalt 4 täisarvulist summat, vastasel juhul aga vastavalt punktile (c) ülimalt $\dfrac{4\cdot 3}{2}=6$ täisarvulist summat.

(3) Kui $\{a_1\}=\{a_2\}=\{a_3\}=x$ ning $\{a_4\}=\{a_5\}=y \neq x$, siis juhul, kui x ega y ei ole 0 ega $0{,}5$, on meil vastavalt punktile (b) ülimalt $2\cdot 3=6$ täisarvulist summat, vastasel juhul aga vastavalt punktile (c) ülimalt $2+3=5$ täisarvulist summat.

(4) Kui $\{a_1\}=\{a_2\}=\{a_3\}=x$ ning $\{a_4\}=y$ ja $\{a_5\}=z$ (kus x, y ja z on kõik erinevad), siis juhul, kui x ei ole 0 ega $0{,}5$, on meil vastavalt punktidele (a) ja (b) ülimalt 3 täisarvulist summat, vastasel juhul aga vastavalt punktile (c) ülimalt $1+3=4$ täisarvulist summat.

(5) Kui $\{a_1\}=\{a_2\}=x$ ning $\{a_3\}=\{a_4\}=y$ ja $\{a_5\}=z$ (kus x, y ja z on kõik erinevad), siis juhul, kui x ega y ei ole 0 ega $0{,}5$,

on meil vastavalt punktidele (a) ja (b) ülimalt $2 \cdot 2 = 4$ täisarvulist summat, vastasel juhul aga vastavalt punktile (c) ülimalt $2 + 2 = 4$ täisarvulist summat.

(6) Kui $\{a_1\} = \{a_2\} = x$ ning $\{a_3\} = y$, $\{a_4\} = z$ ja $\{a_5\} = t$ (kus x, y, z ja t on kõik erinevad), siis juhul, kui x ei ole 0 ega 0,5, on meil vastavalt punktidele (a) ja (b) ülimalt $2 + 1 = 3$ täisarvulist summat, vastasel juhul aga vastavalt punktidele (a) ja (c) ülimalt $1 + 1 = 2$ täisarvulist summat.

(7) Kui arvud a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 on kõik erineva murdosaga, siis on meil vastavalt punktile (a) ülimalt 2 täisarvulist summat.

Kokkuvõttes nägime, et rohkem kui 6 täisarvulist summat $a_i + a_j$ saab olla ainult juhul (1), ning sel juhul on kõik summad $a_i + a_j$ täisarvud.

5. *Vastus:* kui $n = 2k$, siis $2^{k-1}(2^{k-1} - 1)$; kui $n = 2k + 1$, siis 0.

Lahendus 1. Värvime kaheksanurga tipud vaheldumisi mustaks ja valgeks. Kuna tipud A ja B on ühte värvi ning iga minutiga liigub robot üht värvi tipust teist värvi tippu, siis peab roboti teekond tipust A tippu B kestma paarisarvu minuteid.

Nummerdame tipud päripäeva 1-st 8-ni, alustades tipust A (tippu B tähistab siis arv 5), ja märgime järjendina $a^{(k)} = (a_1^{(k)}, a_2^{(k)}, \ldots, a_8^{(k)})$ võimaluste arvud, kuidas robot võib k minutiga jõuda tippudesse $1, 2, \ldots, 8$. Tõestame induktsiooniga m järgi, et iga $m \geqslant 1$ korral

$$a^{(2m)} = (2^{2m-2} + 2^{m-1},\ 0,\ 2^{2m-2},\ 0,\ 2^{2m-2} - 2^{m-1},\ 0,\ 2^{2m-2},\ 0)\ .$$

Kui $m = 1$, siis on robot läbinud 2 lõiku. Ta võib läbida need kaks lõiku ühes suunas või alustada ükskõik kummas suunas ning pöörata vahepeal ümber ja jõuda tippu 1 tagasi. Järelikult

$$a^{(2)} = (2, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0)\ ,$$

mis on kooskõlas tõestatava väitega.

Eeldame nüüd, et väide kehtib juhul $m = k$. Tähistame lühiduse mõttes $2^{k-1} = s$, siis

$$a^{(2k)} = (s^2 + s,\ 0,\ s^2,\ 0,\ s^2 - s,\ 0,\ s^2,\ 0)\ .$$

Järgmisele minutile vastava võimaluste järjendi leidmiseks tuleb iga tipu M puhul liita tema naabertippudele vastavad arvud eelmisel mi-

nutil, sest tippu M võib robot liikuda ainult kummmagi naabertipu kaudu. Järelikult

$$a^{(2k+1)} = (0,\, 2s^2+s,\, 0,\, 2s^2-s,\, 0,\, 2s^2-s,\, 0,\, 2s^2+s)$$

ning analoogiliselt

$$a^{(2k+2)} = (4s^2+2s,\, 0,\, 4s^2,\, 0,\, 4s^2-2s,\, 0,\, 4s^2,\, 0)\,.$$

Kuna $4s^2 = 2^{2k}$ ja $2s = 2^k$, siis oleme tõestanud, et väide kehtib ka juhul $m = k+1$. Võimaluste arv, kuidas robot võib jõuda $n = 2k$ minutiga tippu $B = 5$, on niisiis $2^{2k-2} - 2^{k-1} = 2^{k-1}(2^{k-1}-1)$.

Lahendus 2. Nummerdame kaheksanurga tipud päripäeva 0-st 7-ni, nii et tipu A juures on 0 ja tipu B juures 4 (edaspidi vaatleme tippude numbreid igal pool *modulo* 8). Paneme tähele, et kui robot asub k. minutil tipus T_k, siis $(k+1)$. minutil asub ta tipus T_k+1 või T_k-1 *modulo* 8 — niisiis iga minutiga liitub tipu numbrile, kus robot parajasti on, kas 1 või -1 *modulo* 8. Seame roboti igale n minutit kestvale liikumisele vastavusse summa S, mis koosneb n liidetavast 1 või -1. Näiteks $S = 1+1-1+1$ tähendab, et robot liikus kaks minutit päripäeva, siis ühe minuti vastupäeva ja seejärel uuesti ühe minuti päripäeva. Seejuures n minuti järel asub robot tipus S *modulo* 8 ning roboti erinevate liikumiste ja summade S vahel on üksühene vastavus. Robot jõuab n minutiga tipust $A = 0$ tippu $B = 4$ parajasti siis, kui vastav summa S koosneb n liidetavast ning $S \equiv 4 \pmod 8$.

Olgu S_n kõigi n liidetavaga summade S hulk, siis $|S_n| = 2^n$. Olgu $S_n^{(i)}$ selliste n liidetavaga summade hulk, mis annavad 8-ga jagamisel jäägi i $(i = 0, 1, \ldots, 7)$. Uurime, kuidas sõltub $|S_n^{(4)}|$ arvust n.

Ilmselt $|S_n^{(4)}| = 0$, kui n on paaritu (üldisemalt $|S_m^{(k)}| = 0$, kui m ja k on erineva paarsusega, sest kõik summad hulgas S_m on sama paarsusega nagu arv m). Ilmselt $|S_4^{(4)}| = 2 = 2\cdot 1$ ja $|S_6^{(4)}| = 6\cdot 2 = 12 = 4\cdot 3$ (esimesel juhul on sobivas summas kõik liidetavad samamärgilised; teisel juhul peame valima ühe, mis on teistest erineva märgiga: selle liidetava valikuks on 6 võimalust ja tema märgi valikuks 2 võimalust). Tõestame induktsiooniga, et $|S_{2k}^{(4)}| = 2^{k-1}(2^{k-1}-1)$.

Paneme tähele, et igast summast hulgas $S_n^{(i)}$ saame kahe liidetava lõppu lisamisel täpselt kaks erinevat summat hulgast $S_{n+2}^{(i)}$ — jääk ei muutu, kui lisame $+1-1$ või $-1+1$. Igast summast hulgas $S_n^{(i)}$ saame

ka täpselt ühe summa hulgas $S_{n+2}^{(i+2)}$, lisades $+1+1$, ja ühe summa hulgas $S_{n+2}^{(i-2)}$, lisades $-1-1$ (indekseid vaatleme *modulo* 8). Ühestki summast hulgas $S_n^{(i)}$ ei saa kahe liidetava lisamisel summat hulgast $S_{n+2}^{(m)}$, kus $m = i \pm 1$ või $|m-i| > 2$. Seega

$$\begin{aligned}
|S_{n+2}^{(0)}| &= 2|S_n^{(0)}| + |S_n^{(2)}| + |S_n^{(6)}| \,, \\
|S_{n+2}^{(2)}| &= 2|S_n^{(2)}| + |S_n^{(0)}| + |S_n^{(4)}| \,, \\
|S_{n+2}^{(4)}| &= 2|S_n^{(4)}| + |S_n^{(2)}| + |S_n^{(6)}| \,, \\
|S_{n+2}^{(6)}| &= 2|S_n^{(6)}| + |S_n^{(0)}| + |S_n^{(4)}| \,.
\end{aligned}$$

Nüüd $n = 2k$ korral

$$\begin{aligned}
|S_{n+2}^{(4)}| &= 2|S_n^{(4)}| + |S_n^{(2)}| + |S_n^{(6)}| = \\
&= 2|S_n^{(4)}| + (2|S_{n-2}^{(2)}| + |S_{n-2}^{(0)}| + |S_{n-2}^{(4)}|) + \\
&\qquad + (2|S_{n-2}^{(6)}| + |S_{n-2}^{(0)}| + |S_{n-2}^{(4)}|) = \\
&= 2|S_n^{(4)}| + 2|S_{n-2}|
\end{aligned}$$

(sest $S_{n-2}^{(1)} = S_{n-2}^{(3)} = S_{n-2}^{(5)} = S_{n-2}^{(7)} = 0$) ning seega vastavalt induktsiooni eeldusele

$$\begin{aligned}
|S_{n+2}^{(4)}| &= 2 \cdot 2^{k-1}(2^{k-1}-1) + 2 \cdot 2^{2k-2} = 2^{2k-1} - 2^k + 2^{2k-1} = \\
&= 2^{2k} - 2^k = 2^k(2^k - 1) \,.
\end{aligned}$$

Lahendus 3. Samuti nagu eelmises lahenduses nummerdame kaheksanurga tipud päripäeva 0-st 7-ni (käsitledes tippude numbreid *modulo* 8) ning vaatleme roboti liikumistele üksüheselt vastavaid summasid S, kus liidetavateks on 1 ja -1. Robot jõuab n minutiga tipust $A = 0$ tippu $B = 4$ parajasti siis, kui vastav summa S koosneb n liidetavast ja $S \equiv 4 \pmod 8$. See tingimus aga kehtib parajasti siis, kui $n = 2k \geqslant 4$ ja summas S on parajasti $k+2+4i$ liidetavat $+1$, kus i on mingi täisarv — seega võime vabalt valida $\ldots$, $k-6$, $k-2$, $k+2$, $k+6$, $\ldots$ liidetavat, mille ette paneme plussi, ning ülejäänute ette paneme miinuse. (Tõepoolest, olgu s liidetavat plussmärgiga, siis $2k-s$ liidetavat on miinusmärgiga ja $S = s-(2k-s) = 2s-2k \equiv 4 \pmod 8$ ehk samaväärselt $s-k \equiv 2 \pmod 4$.)

Võimalusi roboti tee valimiseks nii, et ta n minutiga jõuaks punk-

tist A punkti B, on niisiis $\ldots + C_{2k}^{k-6} + C_{2k}^{k-2} + C_{2k}^{k+2} + C_{2k}^{k+6} + \ldots$, kus C_t^s tähistab kombinatsioonide arvu t elemendist s kaupa ning $C_t^s = 0$, kui $s < 0$ või $s > t$.

Märkus. Näitame induktsiooniga k järgi, et

$$\Sigma_{2k} = \ldots + C_{2k}^{k-6} + C_{2k}^{k-2} + C_{2k}^{k+2} + C_{2k}^{k+6} + \ldots = 2^{k-1}(2^{k-1} - 1)\,.$$

Kui $k = 2$, siis $C_4^0 + C_4^4 = 2 = 2^1 \cdot (2^1 - 1)$. Kehtigu nüüd väide k korral, siis $k+1$ jaoks saame (kasutades seost $C_{t+1}^s = C_t^{s-1} + C_t^s$)

$$\begin{aligned}
\Sigma_{2k+2} &= \ldots + C_{2k+2}^{k-5} + C_{2k+2}^{k-1} + C_{2k+2}^{k+3} + C_{2k+2}^{k+7} + \ldots = \\
&= \ldots + C_{2k+1}^{k-6} + C_{2k+1}^{k-5} + C_{2k+1}^{k-2} + C_{2k+1}^{k-1} + \\
&\qquad + C_{2k+1}^{k+2} + C_{2k+1}^{k+3} + C_{2k+1}^{k+6} + C_{2k+1}^{k+7} + \ldots = \\
&= \ldots + C_{2k}^{k-7} + 2C_{2k}^{k-6} + C_{2k}^{k-5} + C_{2k}^{k-3} + \\
&\qquad + 2C_{2k}^{k-2} + C_{2k}^{k-1} + C_{2k}^{k+1} + 2C_{2k}^{k+2} + \\
&\qquad + C_{2k}^{k+3} + C_{2k}^{k+5} + 2C_{2k}^{k+6} + C_{2k}^{k+7} + \ldots = \\
&= \ldots + C_{2k}^{k-7} + C_{2k}^{k-5} + C_{2k}^{k-3} + C_{2k}^{k-1} + C_{2k}^{k+1} + C_{2k}^{k+3} + \\
&\qquad + C_{2k}^{k+5} + C_{2k}^{k+7} + \ldots + 2 \cdot 2^{k-1}(2^{k-1} - 1) = \\
&= \ldots + C_{2k-1}^{k-8} + C_{2k-1}^{k-7} + C_{2k-1}^{k-6} + C_{2k-1}^{k-5} + \\
&\qquad + C_{2k-1}^{k-4} + C_{2k-1}^{k-3} + C_{2k-1}^{k-2} + C_{2k-1}^{k-1} + \\
&\qquad + C_{2k-1}^{k} + C_{2k-1}^{k+1} + C_{2k-1}^{k+2} + C_{2k-1}^{k+3} + \\
&\qquad + C_{2k-1}^{k+4} + C_{2k-1}^{k+5} + C_{2k-1}^{k+6} + C_{2k-1}^{k+7} + \ldots + \\
&\qquad + 2 \cdot 2^{k-1}(2^{k-1} - 1) = \\
&= 2^{2k-1} + 2 \cdot 2^{k-1}(2^{k-1} - 1) = 2^k(2^{k-1} + 2^{k-1} - 1) = \\
&= 2^k(2^k - 1)\,.
\end{aligned}$$

XII klass

1. *Vastus:* 17 minutit.

   Veendume kõigepealt, et kogu seltskonnal on võimalik tunnel läbida 17 minutiga:

   1) Peeter ja Jüri läbivad tunneli (2 minutit);

2) Peeter toob tõrviku tagasi (1 minut);
3) Kati ja Mari läbivad tunneli (10 minutit);
4) Jüri toob tõrviku tagasi (2 minutit);
5) Peeter ja Jüri läbivad tunneli (2 minutit).

Näitame nüüd, et vähem kui 17 minutiga pole kõigil võimalik tunnelit läbida. Ilmselt tuleb tunnel kokku läbida paaritu arv kordi ning vähemalt 5 korda: 3 korda pärisuunas ja 2 korda vastassuunas tõrviku tagasitoomiseks (ühest tõrviku tagasitoomisest ei piisa, kuna selle järel on tunneli alguses vähemalt 3 inimest, kes ei saa korraga tunnelit läbida). Kui tunnel läbitakse 7 või rohkem korda, siis kulub selleks mitte vähem kui $10 + 2 + 5 \cdot 1 = 17$ minutit. Kui tunnel läbitakse 5 korda, siis pärisuunaliselt minnakse iga kord kahekesi ja see võtab aega vähemalt 2 minutit, kusjuures üks kord (kui läbiminejaks on Mari) kulub aega 10 minutit. Kui tõrviku tagasitoojaks on mõlemal korral Peeter, siis peab Peeter osalema ka igas tunnelit pärisuunaliselt läbivas paaris, mistõttu Kati ja Mari peavad tunneli läbima eraldi ning kokku kulub mitte vähem kui $10 + 5 + 2 + 2 \cdot 1 = 19$ minutit. Kui aga ühel korral ei ole tõrviku tagasitoojaks Peeter, siis kulub kokku mitte vähem kui $10 + 2 + 2 + 2 + 1 = 17$ minutit.

2. *Vastus:* ei.

Olgu N ainult numbritest 2 ja 0 koosnev arv, mis lõpeb t nulliga ($t \geqslant 0$), siis

$$N = \overline{2\ldots2} \cdot 10^t = \overline{1\ldots1} \cdot 2^{t+1} \cdot 5^t \ ,$$

kus arvus $2\ldots2$ punktiiriga näidatud osa koosneb numbritest 2 ja 0 (arvus $1\ldots1$ vastavalt 1 ja 0). Kuna tegur $\overline{1\ldots1}$ ei jagu 2-ga ega 5-ga, siis juhul, kui $N = n^k$, peavad nii $t+1$ kui ka t olema arvu k kordsed, mistõttu $k = 1$.

3. Viies kõik liikmed ühele poole, avades sulud ja koondades sarnased liikmed saame, et ülesandes antud võrratus on samaväärne võrratusega

$$a^4 + b^4 + c^4 - 2a^2b^2 - 2b^2c^2 - 2c^2a^2 < 0 \ .$$

Teisendame selle võrratuse vasakut poolt:

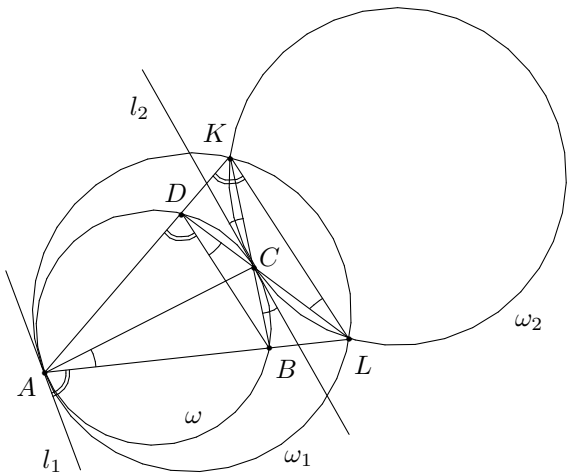
$$a^4 + b^4 + c^4 - 2a^2b^2 - 2b^2c^2 - 2c^2a^2 =$$

$$
\begin{aligned}
&= (a^2+b^2-c^2)^2 - 4a^2b^2 = \\
&= (a^2+b^2-c^2-2ab)(a^2+b^2-c^2+2ab) = \\
&= \big((a-b)^2-c^2)\big)\big((a+b)^2-c^2\big) = \\
&= (a-b+c)(a-b-c)(a+b+c)(a+b-c)\ .
\end{aligned}
$$

Ülesandes antud võrratus on niisiis samaväärne võrratusega

$$(a+b+c)(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b) > 0\ . \tag{1}$$

Siin esimene tegur on positiivne ning ülejäänud teguritest ei saa rohkem kui üks korraga olla negatiivne (olgu näiteks $a+b-c<0$ ja $b+c-a<0$, siis nende võrratuste liitmisel saame $2b<0$ — vastuolu). Seega kehtib võrratus (1) siis ja ainult siis, kui arvudest a, b ja c mistahes kahe summa on suurem kolmandast, s.t. need arvud on mingi kolmnurga külgede pikkusteks.



Joonis 8

4. *Lahendus 1.* Olgu ω_1 ja ω_2 vastavalt kolmnurkade AKL ja CKL ümberringjooned (vt. joonist 8). Oletame, et ringjooned ω ja ω_2 puutuvad teineteist punktis C, ning olgu l_2 nende ühine puutuja. Et kõõlule toetuv piirdenurk on võrdne nurgaga selle kõõlu ja tema otspunktis

ringjoonele tõmmatud puutuja vahel, siis

$$\angle KLC = \angle KCl_2 = \angle BCl_2 = \angle BDC\ ,$$

mistõttu $KL \parallel BD$. Seega $\angle ADB = \angle AKL$ ning järelikult ringjoonele ω punktis A tõmmatud puutuja moodustab kõõluga AB sama suure nurga nagu ringjoonele ω_1 punktis A tõmmatud puutuja moodustab kõõluga AL. Et punktid A, B ja L on ühel sirgel, siis ringjoontel ω ja ω_1 on punktis A ühine puutuja l_1, s.t. need ringjooned puutuvad teineteist punktis A.

Rakendades sama arutelu vastassuunas näitame, et ringjoonte ω ja ω_1 puutumisest punktis A järeldub ringjoonte ω ja ω_2 puutumine punktis C.

Lahendus 2. Samuti nagu esimeses lahenduses olgu ω_1 ja ω_2 vastavalt kolmnurkade AKL ja CKL ümberringjooned. Kui ringjooned ω ja ω_1 puutuvad teineteist punktis A, siis leidub selline homoteetiateisendus keskpunktiga punktis A, mis viib ringjoone ω ringjooneks ω_1. Et K on sirge AD lõikepunkt ringjoonega ω_1 ja L on sirge AB lõikepunkt ringjoonega ω_1 ning punktid B ja D paiknevad ringjoonel ω, siis see homoteetia viib punkti D punktiks K ning punkti B punktiks L, mistõttu $KL \parallel BD$. Et seejuures lõigud BK ja DL lõikuvad punktis C, siis leidub homoteetiateisendus keskpunktiga C, mis viib punkti B punktiks K ning punkti D punktiks L. See homoteetia viib siis kolmnurga CDB ümberringjoone ω kolmnurga CKL ümberringjooneks ω_2, mistõttu ringjooned ω ja ω_2 puutuvad teineteist punktis C.

Analoogiliselt näitame, et ringjoonte ω ja ω_2 puutumisest punktis C järeldub ringjoonte ω ja ω_1 puutumine punktis A.

5. *Vastus:* 2002.

Lahendus. Tähistame k võidu võimalike jaotumiste arvu n külalise vahel sümboliga C_n^k. Paneme tähele, et mistahes k võidu jaotumise n külalise vahel saab ühe lisavõidu väljaloosimisega ülejäänud $n-k$ külalise seas täiendada $n-k$ erinevaks $k+1$ võidu jaotumiseks. Iga $k+1$ võidu jaotumine on niimoodi saadav aga $k+1$ erinevast k võidu jaotumisest ($k+1$ võidust ükskõik millise võime lugeda lisavõiduks). Seega mistahes $n > 0$ ja $0 \leqslant k \leqslant n$ korral kehtib valem

$$C_n^{k+1} = \frac{n-k}{k+1} \cdot C_n^k\ . \tag{2}$$

Tähistagu järgnevas n ja m vastavalt külaliste arvu ja tegelikku võitude arvu. Ülesande tingimustest saame võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} C_n^m = 2 \cdot C_n^{m-1} \\ C_n^{m+1} = \dfrac{3}{2} \cdot C_n^m \end{cases} . \tag{3}$$

Asendades siin võrduste vasakud pooled valemi (2) järgi, saame

$$\frac{n-m+1}{m} \cdot C_n^{m-1} = 2 \cdot C_n^{m-1}$$

$$\frac{n-m}{m+1} \cdot C_n^m = \frac{3}{2} \cdot C_n^m$$

Et ülesande tingimuste järgi ilmselt $C_n^m > 0$ ja $C_n^{m-1} > 0$, saame esimesest võrrandist $n - m + 1 = 2m$, kust $n = 3m - 1$, ning teisest võrrandist $2(n - m) = 3(m + 1)$. Asendades siin $n = 3m - 1$, saame $4m - 2 = 3m + 3$, kust $m = 5$ ja $n = 14$. Jääb veel leida võitude jaotumiste arv 14 külalise ja 5 võidu korral:

$$C_{14}^5 = C_{14}^1 \cdot \frac{13}{2} \cdot \frac{12}{3} \cdot \frac{11}{4} \cdot \frac{10}{5} = 14 \cdot 13 \cdot 11 = 2002 \, .$$

9. klass

Ülesanne 1 (Lea Lepmann)

Sisuka lahenduse eest:

näidatud, et tipu L juurde tekib 2 vördset nurka	4 p.
eeldusel, et tipu L juures 2 vördset nurka, on leitud otsitava nurga suurus	3 p.
	7 p.

Joonisel nurgad üldkujul esitatud, kuid lahendusidee puudub	1 p.
Vastus saadud erijuhu põhjal	1 p.

Ülesanne 2 (Elts Abel)

Näidatud, et arvud a,b ja c on sama paarsusega	1 p.
Näidatud, et ei sobi ükski paarisarvudest	3 p.
Näidatud, et ei sobi ükski paaritutest arvudest	3 p.
	7 p.

Ülesanne 3 (Hannes Jukk)

Mõnedel konkreetsetel juhtudel leitud õige miinimum (n=2, n=3)	1 p.
Järjestab arvud $a_1, a_2, \ldots, a_n$ suuruse järjekorras (üldisust kitsendamata)	1 p.
Arvulistel juhtudel proovitud ja sealt jõutud tulemuseni	4 p.
Realiseeritud aritmeetilise jadaga, põhjendamata miks on vähim	4 p.
Põhjendatud, miks m on vähemalt 2n-3, aga realiseerimata miinimum	5 p.
Põhjendatud, miks m on vähemalt 2n-3 ja realiseeritud miinimum	7 p.

Ülesanne 4 (Urmo Kaber)

Vale vastus või ebakorrektne tõestus	0 p.
Esitatud on korrektne tõestuskäik, mis viib õige vastuseni	7 p.

Ülesanne 5 (Mart Abel)

Õige vastus.	1 p.
Näidatud, et hukatu oli tõerääkija.	2 p.
Näidatud, et alguses pidi olema vähemalt 1 tõerääkija.	2 p.
Näidatud, et alguses ei saanud olla rohkem kui 1 tõerääkija.	2 p.
	7 p.

10. klass

Ülesanne 1 (Konstantin Tretjakov)

Tähelepanek, et vd = mn	1 p.
Tuletamine, et (3m-d)(n-d) = 0	2 p.
Lahenduse lõpuni viimine	4 p.
	7 p.

Paljud tõestasid, et sellest, et m jagub n-ga, järeldub antud võrdus. Niisugused lahendused punkte ei saanud.

Ülesanne 2 (Toomas Paaver)

Lootustandev suund, kuid veenev tõestus puudub	1 p.
Veenev ühtepidi tõestus	4 p.
Veenev tõestus mõlemas suunas	7 p.

Ülesanne 3 (Indrek Zolk)

Korrektselt leitud, et ei õnnestu saada rohkem kui 30 paaritut arvu	4 p.
Sealhulgas:	
tuntakse paaris- ja paaritute arvude korrutamise, liitmise ja lahutamise reegleid	*1 p.*
korrektselt põhjendatud, et ei saa olla rohkem kui 30 paaritut arvu	*3 p.*
Põhjendatud, et vaadeldavad 30 paaritut arvu saavad olla kõik erinevad	3 p.
	7 p.

Tööd, kus põhjendus, et ei saa olla rohkem kui 30 paaritut arvu, oli ebatäielik, said selle osa eest 3 asemel 1 punkti. Oluliste arvutusvigadega tööd said 1 punkti vähem.

Kõik lahendajad olid ülesandega vähemalt jõudu proovinud. Enamik lahendajatest leidis, et üle 30 paaritu arvu saada ei õnnestu; tõsiseks raskuseks osutus aga põhjendamine, et need arvud saavad olla kõik erinevad (lõviosa lahendajatest sellele üldse ei mõelnudki). Mõned lahendajad kasutasid teatavaid intuitiivseid tähelepanekuid leidmaks, kuidas võimalikult palju paarituid arve tekitada: näiteks, pidades silmas, et liitmisel-lahutamisel saame võimalikult palju paarituid arve siis, kui liidetavate-lahutatavate paarsused on erinevad, arvati, et on mõistlik valida 4 paaritut ja 3 paarisarvu (tegelikult saame sama tulemuse ka näiteks 5 paaritu ja 2 paarisarvu korral, ülalkirjeldatu pole ka üldse ammendav põhjendus).

Ülesanne 4 (Uve Nummert)

Tähelepanek, et murdjoonel on max. 7 serva	1 p.
Tähelepanek, et murdjoon sisaldab max. 6 diagonaali	1 p.
Näide 3 kuubi serva ja 4 diagonaaliga murdjoone kohta	2 p.
Põhjendus, miks sellest pikemat murdjoont ei leidu	3 p.
	7 p.

Ainult õige vastuse eest ilma sobiva näiteta punkti ei saanud. Kui lahenduses muud punktiväärilist polnud, siis sai mitteoptimaalse näite eest 1 punkti.

Ülesanne 5 (Eno Tõnisson)

Õige vastus, sisuliselt põhjendamata	2 p.
Selgitatud, et arvude summa S(k) pärast k õpilast rahuldab seost S(k)=3S(k-1)-2.	3 p.
Olulise lüngaga põhimõtteliselt õige lahendus	4-5 p.
Õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus	7 p.

11. klass

Ülesanne 1 (Toomas Hinnosaar)

Kasutatud asendust $t=x^4$	1 p.
Leitud saadud ruutvõrrandile lahendid	1 p.
Leitud neli reaalarvulist lahendit algvõrrandile	1 p.
Need 4 lahendit järjestatud	1 p.
Saadud seos $x_1=3x_2$	1 p.
Leitud võimalikud a väärtused +-82/9	1 p.
Näidatud, et positiivne lahend ei sobi	1 p.
	7 p.

Ülesanne 2 (Nikita Salnikov)

Õige koordinaat-lahendus eest, kus on leitud ka üks võõrlahend	6 p.
Sama, arvutusveaga	5 p.
Koostatud võrrand või võrrandisüsteem, mis põhimõtteliselt võib lahenduseni viia, kuid suurte tehniliste raskustega	1 p.

Ülesanne 3 (Leopold Parts)

Korrektselt lahendatud ülesanne	7 p.
On idee vaadelda tahvlil olevate arvude invarianti mingi mooduli järgi	2 p.
Niisama tegurdatud konkreetsete väikeste teguritega	0 p.

Keegi ei vaadelnud väiksemaid arve. Oleks võinud vaadelda ka näiteks, kas 999 korral on asi võimalik. Ka ei mõeldud enamasti idee peale leida mingi omadus, mis jääb tahvlil olevate arvude seas muutumatuks (invariant).

Ülesanne 4 (Kalle Kaarli)

Korralikult näidatud, et N on vähemalt 6	3 p.
Lisaks täielikult tõestatud,et suurem N ei ole võimalik	4 p.
	7 p.

Ülesanne 5 (Reimo Palm)

Täielik lahendus	7 p.
Selgelt tõestatud, et paaritu n korral on võimaluste arv 0	1 p.
Välja arvutatud variantide arv nii n=4 kui ka n=6 korral	1 p.
Näidatud, et igal variandil leidub peegelpilt	1 p.

Kui lahenduses oli mitu mainitud 1 punkti väärilist osa, siis need punktid summeeriti.

Sageli tehti põhjendamatu eeldus, et robot ei tohi enne n-ndat käiku punkti B astuda või vaadeldi ainult ühte tüüpi manöövreid (kaks käiku edasi-tagasi).

12. klass

Ülesanne 1 (Emilia Käsper)

Näidatud, kuidas saavad kõik tunneli läbida 17 minutiga	3 p.
Väidetud, et kõige kiiremini saab tunneli läbida, kui Kati ja Mari läbivad tunneli koos ühe korra	2 p.
Tõestus lõpule viidud (eelnev väide korrektselt põhjendatud)	2 p.
	7 p.

Ülesanne 2 (Valdis Laan)

Olgu $N=a^k$.

Tähelepanek, et a lõpeb 2, 8, või 0-ga	1 p.
Tähelepanek, et N jagub a iga algteguri k-nda astmega	2 p.
On eraldatud 0-d N lõpust	1 p.
On näidatud, et N jagub 2 ja 5 erinevate astmetega	3 p.
	7 p.

Ülesanne 3 (Mati Abel)

Alustatud tõestust: kui a,b ja c on kolmnurga küljed, siis kehtib antud võrratus	1 p.
Sama väidet on püütud tõestada, kuid ei ole lõpetatud	2 p.
Nimetatud väide on tõestatud, kuid pöördväite tõestamist ei ole alustatud	3 p.
Nimetatud väide on tõestatud ja on alustatud pöördväite tõestamist	4 p.
Korrektne tõestus	7 p.

Ülesanne 4 (Oleg Petšonkin)

Püütakse tõestada, et kolmnurk ABD või BDC on võrdhaarne, või et kõigi kolme ringjoone keskpunktid ja punktid A ja C paiknevad ühel sirgel.	0 p.
On näidatud, et ringjoonte keskpunktid ja puutepunkt asuvad ühel sirgel	1 p.
Täielik lahendus	7 p.

Ülesanne 5 (Ahti Peder)

Mõistlik arutluskäik	1 p.
Võrrandisüsteemi koostamine	2 p.
Võrrandisüsteemi lahenduse korrektne lõpuleviimine	4 p.
	7 p.

Üllatas suur maksimaalse arvu punktide saajate hulk. Koolis vähe analüüsitav teema osutus osavõtjatele raudvara hulka kuuluvaks. Ainult mõnes töös oli viga kombinatsioonide valemi definitsioonis. Selle põhjal võib oletada, et edaspidi võib sellest temaatikast ka hoopis raskemaid ülesandeid lahendamiseks välja pakkuda.