Eesti koolinoorte L täppisteaduste olümpiaadi

lõppvoor MATEMAATIKAS

Tartus, 8. märtsil 2003. a.

IX klass

Lahendamisaega on 5 tundi.
Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti.
Taskuarvutit kasutada ei lubata.

1. Ringjoonel võetakse punktid A_1, A_2, $\ldots$, A_m ja B_2, B_3, $\ldots$, B_n nii, et $A_1A_2\ldots A_m$ on korrapärane m-nurk ja $A_1B_2\ldots B_n$ on korrapärane n-nurk, kusjuures $n > m$ ning punkt B_2 paikneb punktide A_1 ja A_2 vahel. Leia nurga $B_2A_1A_2$ suurus.

2. Leia kõik sellised positiivsed täisarvud n, mille korral

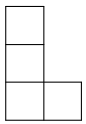
$$n + \left[\frac{n}{6}\right] \neq \left[\frac{n}{2}\right] + \left[\frac{2n}{3}\right].$$

   Siin $[x]$ tähistab reaalarvu x täisosa, s.t. suurimat täisarvu, mis ei ole suurem arvust x.

3. Ristkülikus $ABCD$, kus $|AB| < 2|AD|$, on E külje AB keskpunkt ning F selline punkt lõigul CE, et $\angle CFD = 90^\circ$. Tõesta, et kolmnurk FAD on võrdhaarne.

4. Nõia-Ella asus segama nõiarohtu, mis koosneb 140 ml põdrasamblateest, 160 ml kärbseseeneleotisest ja 50 ml hundijalaveest. Ta võttis tühja 350 ml pudeli, valas sinna 140 ml põdrasamblateed ning asus lisama kärbseseeneleotist, kui tema musta kassi Mefisto kräunumine teda eksitas. Seetõttu valas Nõia-Ella kärbseseeneleotist pudelisse kogemata liiga palju ning märkas eksitust alles hiljem, kui pudel sai täis enne, kui kõik 50 ml hundijalavett oli juurde valatud. Nõia-Ella tegi kiire arvutuse, loksutas siis pudeli sisu hoolega segamini, valas osa rohtu pudelist välja ning lisas juurde sobivas vahekorras võetud põdrasamblatee ja hundijalavee segu, kuni pudel sai jälle täis ning selles olev nõiarohi vastas täpselt vajalikule retseptile. Millises vahekorras põdrasamblatee ja hundijalavee segu Nõia-Ella pudelisse lisas?

5. Kas $n \times n$ ruudustikku, millest on välja lõigatud keskmine ruut, on võimalik katta joonisel näidatud papist kujunditega (iga kujund katab 4 ruutu; kujundeid võib pöörata ja ümber keerata), kui



   a) $n = 5$;
   b) $n = 2003$?

Eesti koolinoorte L täppisteaduste olümpiaadi

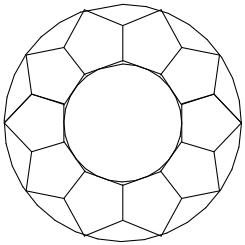
lõppvoor MATEMAATIKAS

Tartus, 8. märtsil 2003. a.

X klass

Lahendamisaega on 5 tundi.
Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti.
Taskuarvutit kasutada ei lubata.

1. Joonisel on kujutatud 10 ühesuurust korrapärast viisnurka, kusjuures igal kahel kõrvutiasetseval viisnurgal on ühine külg. Väiksem ringjoon puutub iga viisnurga üht külge ning suurem ringjoon läbib nende külgede vastastippe. Leia suurema ringjoonega piiratud ringi pindala, kui väiksema ringjoonega piiratud ringi pindala on 1.



2. Leia avaldise $\dfrac{m^2+n^2}{mn}$, kus m ja n on täisarvud, kõik võimalikud täisarvulised väärtused.

3. Teravnurkses kolmnurgas ABC on kõik nurgad suuremad kui 45°. Olgu AM ja BN selle kolmnurga kõrgused. Lõikudel MA ja NB valitakse vastavalt punktid X ja Y nii, et $|MX| = |MB|$ ja $|NY| = |NA|$. Tõesta, et lõigud MN ja XY on paralleelsed.

4. Olgu a, b ja c positiivsed reaalarvud, mis ei ole suuremad arvust 2. Tõesta, et kehtib võrratus

$$\frac{abc}{a+b+c} \leqslant \frac{4}{3}\,.$$

5. Mängu *Clobber* mängitakse kahekesi $2k$ kõrvutiasetsevast ruudust koosneval ribal. Algul on igal ruudul üks nupp, kusjuures vastasmängijate nupud paiknevad vaheldumisi. Igal käigul nihutab mängija ühe oma nupu sellisele naaberruudule, kus paikneb vastase nupp, ning võtab selle vastase nupu laualt ära. Käike tehakse kordamööda ning võidab mängija, kelle käigu järel vastane ei saa enam käiku teha.

   Tõesta, et kui mingi k korral leidub võitev strateegia alustaja vastasmängijal, siis $k+1$ ja $k+2$ korral leidub võitev strateegia alustajal.

Eesti koolinoorte L täppisteaduste olümpiaadi

lõppvoor MATEMAATIKAS

Tartus, 8. märtsil 2003. a.

XI klass

Lahendamisaega on 5 tundi.
Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti.
Taskuarvutit kasutada ei lubata.

1. Euroopa-reisile läinud Juhan seisab kiirtee ääres ja jälgib möödasõitvaid autosid. Mööda kiirteed sõidavad ühtlaste kiirustega ühes suunas Opel ja Trabant ning vastassuunas Mercedes. Hetkel, kui Trabant möödub Juhanist, asuvad Opel ja Mercedes temast vastassuundades võrdsel kaugusel. Hetkel, kui Mercedes möödub Juhanist, asuvad Opel ja Trabant temast vastassuundades võrdsel kaugusel. Tõesta, et hetkel, kui Opel möödub Juhanist, asuvad Mercedes ja Trabant temast vastassuundades võrdsel kaugusel.

2. Tõesta, et mistahes positiivsete reaalarvude a, b ja c korral kehtib võrratus

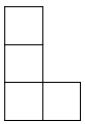
$$\sqrt[3]{abc} + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geqslant 2\sqrt{3}\,.$$

   Millal kehtib siin võrdus?

3. Kolmnurga ABC külgedel BC, CA ja AB võetakse vastavalt punktid A_1, B_1 ja C_1 nii, et lõigud AA_1, BB_1 ja CC_1 lõikuvad ühes punktis. On teada, et punktid A, B_1, A_1 ja B paiknevad ühel ringjoonel ning punktid B, C_1, B_1 ja C paiknevad ühel ringjoonel. Tõesta, et
   a) punktid C, A_1, C_1 ja A paiknevad ühel ringjoonel;
   b) lõigud AA_1, BB_1 ja CC_1 on kolmnurga ABC kõrgused.

4. Tõesta, et leidub lõpmata palju selliseid positiivseid täisarve n, mille korral $\sqrt{n}$ ei ole täisarv ning n jagub arvuga $[\sqrt{n}]$. (Siin $[x]$ tähistab reaalarvu x täisosa, s.t. suurimat täisarvu, mis ei ole suurem arvust x.)

5. Milliste positiivsete täisarvude n korral on võimalik katta $(2n+1) \times (2n+1)$ ruudustik, millest on välja lõigatud üks nurgaruut, joonisel näidatud papist kujunditega (iga kujund katab 4 ruutu; kujundeid võib pöörata ja ümber keerata)?



Eesti koolinoorte L täppisteaduste olümpiaadi

lõppvoor MATEMAATIKAS

Tartus, 8. märtsil 2003. a.

XII klass

Lahendamisaega on 5 tundi.
Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti.
Taskuarvutit kasutada ei lubata.

1. Jüri ja Mari tahavad kumbki katta $n \times n$ ruudustiku joonisel näidatud kaartidega (iga kaart katab ühe ruudu). Jüri tahab seda teha nii, et iga kahe üksteise kõrval paikneva kaardi kõrvutiasetsevad osad oleksid eri värvi, Mari aga nii, et iga kahe üksteise kõrval paikneva kaardi kõrvutiasetsevad osad oleksid sama värvi. Kui palju erinevaid võimalusi ruudustiku soovitud viisil kaartidega katmiseks on Jüril ja kui palju Maril?

2. Lahenda võrrand $\sqrt{x} = \log_2 x$.

3. Kolmnurgas ABC on $\angle C = 90^\circ$. Kiirel CB võetakse punkt D nii, et $|AC| \cdot |CD| = |BC|^2$. Läbi punkti D paralleelselt hüpotenuusiga AB tõmmatud sirge lõikab kiirt CA punktis E. Leia nurga BEC suurus.

4. Nimetame positiivset täisarvu *üksildaseks*, kui selle positiivsete jagajate (1 ja arv ise kaasa arvatud) pöördarvude summa ei võrdu ühegi teise positiivse täisarvu positiivsete jagajate pöördarvude summaga. Tõesta, et
   a) kõik algarvud on üksildased;
   b) leidub lõpmata palju mitteüksildasi positiivseid täisarve.

5. Lotomängus peab mängija märkima piletil 6 arvu 36-st. Loosimisel valitakse neist 36-st arvust juhuslikult välja 6 arvu ning pilet võidab, kui sellel ükski väljavalitud arv ei ole märgitud. Tõesta, et
   a) on võimalik märkida 9 piletil arvud nii, et loosimisel vähemalt üks neist piletitest kindlasti võidaks;
   b) ei ole võimalik märkida 8 piletil arve nii, et loosimisel vähemalt üks neist piletitest kindlasti võidaks.

L Олимпиада по точным наукам учащихся Эстонии

Заключительный тур по МАТЕМАТИКЕ

Тарту, 8 марта 2003 г.

IX класс

Время, отводимое для решения: 5 часов.
Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи дает 7 баллов.
Пользоваться калькулятором не разрешается.

1. На окружности берут точки A_1, A_2, ..., A_m и B_2, B_3, ..., B_n так, что $A_1A_2\ldots A_m$ является правильным m-угольником, а $A_1B_2\ldots B_n$ является правильным n-угольником, причем $n > m$ и точка B_2 расположена между точками A_1 и A_2. Найти величину угла $B_2A_1A_2$.

2. Найти все такие положительные целые числа n, для которых

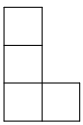
$$n + \left[\frac{n}{6}\right] \neq \left[\frac{n}{2}\right] + \left[\frac{2n}{3}\right].$$

$[x]$ обозначает целую часть действительного числа x, т.е. наибольшее целое число, которое не больше числа x.

3. В прямоугольнике $ABCD$, где $|AB| < 2|AD|$, точка E является серединой стороны AB, а F такая точка на отрезке CE, что $\angle CFD = 90°$. Доказать, что треугольник FAD является равнобедренным.

4. Колдунья Элла начала смешивать волшебное зелье, состоящее из 140 мл отвара ягеля, 160 мл настойки из мухоморов и 50 мл воды из следа волка. Она взяла пустую бутылку объемом 350 мл, налила в нее 140 мл отвара ягеля и стала добавлять настойку из мухоморов, когда ее отвлекло мурлыкание черного кота Мефистофеля. Поэтому колдунья Элла налила в бутылку слишком много настойки из мухоморов, а свою ошибку заметила позже, когда бутылка наполнилась раньше, чем все 50 мл воды из следа волка были добавлены к зелью. Колдунья быстро посчитала, тщательно перемешала содержимое бутылки, вылила часть зелья, а затем добавила в нужной пропорции смеси отвара ягеля и воды из следа волка, пока бутылка снова стала полной и зелье в ней точно соответствовало рецепту. В какой пропорции была смесь отвара ягеля и воды из следа волка, которую колдунья Элла добавила в бутылку?

5. Возможно ли покрыть $n \times n$ клетчатую доску, из которой вырезана центральная клетка, показанными на рисунке фигурами, сделанными из картона (каждая фигура покрывает 4 квадрата, фигуры можно поворачивать и переворачивать), если



   а) $n = 5$;
   б) $n = 2003$?

L Олимпиада по точным наукам учащихся Эстонии

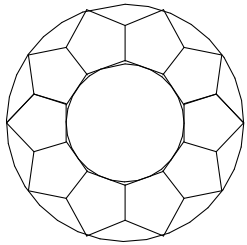
Заключительный тур по МАТЕМАТИКЕ

Тарту, 8 марта 2003 г.

X класс

Время, отводимое для решения: 5 часов.
Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи дает 7 баллов.
Пользоваться калькулятором не разрешается.

1. На рисунке изображены 10 одинаковых правильных пятиугольников, причем каждые два расположенных рядом пятиугольника имеют общую сторону. Меньшая окружность касается одной стороны каждого пятиугольника, а большая окружность проходит через вершины, противоположные этим сторонам. Найти площадь круга, ограниченного большей окружностью, если площадь ограниченного меньшей окружностью круга равна 1.



2. Найти все возможные целочисленные значения выражения $\dfrac{m^2+n^2}{mn}$, где m и n целые числа.

3. В остроугольном треугольнике ABC все углы больше чем 45°. Пусть AM и BN высоты этого треугольника. На отрезках MA и NB выбирают соответственно точки X и Y так, что $|MX| = |MB|$ и $|NY| = |NA|$. Доказать, что отрезки MN и XY параллельны.

4. Пусть a, b и c положительные действительные числа, которые не больше числа 2. Доказать, что выполняется неравенство

$$\frac{abc}{a+b+c} \leqslant \frac{4}{3}\,.$$

5. В игру *Клоббер* играют вдвоем на полосе, состоящей из $2k$ расположенных рядом квадратов. В начале игры на каждом квадрате находится одна фишка, причем фишки противников чередуются. За один ход игрок передвигает одну из своих фишек на такой соседний квадрат, где расположена фишка противника, и затем убирает эту фишку противника со стола. Ходы делают по очереди и побеждает тот игрок, после хода которого противник не может сделать хода.

   Доказать, что если при каком-либо k у противника начинающего игрока найдется выигрышная стратегия, то при $k+1$ и $k+2$ найдется выигрышная стратегия у начинающего игрока.

L Олимпиада по точным наукам учащихся Эстонии

Заключительный тур по МАТЕМАТИКЕ

Тарту, 8 марта 2003 г.

XI класс

Время, отводимое для решения: 5 часов.
Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи дает 7 баллов.
Пользоваться калькулятором не разрешается.

1. Отправившийся в путешествие по Европе Игорь стоит около автострады и наблюдает за проезжающими машинами. По автостраде с постоянными скоростями едут в одном направлении Опель и Трабант, а в противоположном направлении Мерседес. В момент, когда Трабант проедет мимо Игоря, Опель и Мерседес находятся на равном расстоянии в противоположные стороны от Игоря. В момент, когда Мерседес проедет мимо Игоря, Опель и Трабант находятся на равном расстоянии в противоположные стороны от Игоря. Доказать, что в момент, когда Опель проедет мимо Игоря, Мерседес и Трабант будут находится на равном расстоянии в противоположные стороны от Игоря.

2. Доказать, что для любых положительных действительных чисел a, b и c выполняется неравенство

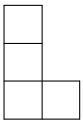
$$\sqrt[3]{abc}+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geqslant 2\sqrt{3}\,.$$

Когда здесь выполняется равенство?

3. На сторонах BC, CA и AB треугольника ABC берут соответственно точки A_1, B_1 и C_1 так, что отрезки AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке. Известно, что точки A, B_1, A_1 и B расположены на одной окружности, а точки B, C_1, B_1 и C также расположены на одной окружности. Доказать, что
   а) точки C, A_1, C_1 и A расположены на одной окружности;
   б) отрезки AA_1, BB_1 и CC_1 являются высотами треугольника ABC.

4. Доказать, что найдется бесконечно много таких положительных целых чисел n, для которых $\sqrt{n}$ не является целым числом и число n делится на $[\sqrt{n}]$. (Здесь $[x]$ обозначает целую часть действительного числа x, т.е. наибольшее целое число, которое не больше числа x.)

5. Для каких положительных целых чисел n возможно покрыть $(2n+1)\times(2n+1)$ клетчатую доску, из которой вырезана одна угловая клетка, изображенными на рисунке фигурами, сделанными из картона (каждая фигура покрывает 4 квадрата, фигуры можно поворачивать и переворачивать)?



L Олимпиада по точным наукам учащихся Эстонии

Заключительный тур по МАТЕМАТИКЕ

Тарту, 8 марта 2003 г.

XII класс

Время, отводимое для решения: 5 часов.
Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи дает 7 баллов.
Пользоваться калькулятором не разрешается.

1. Юра и Маша хотят каждый покрыть $n \times n$ клетчатую доску показанными на рисунке карточками (каждая карточка покрывает один квадрат). Юра хочет это сделать так, чтобы расположенные рядом части любых двух лежащих рядом карточек были бы разного цвета, Маша же хочет сделать так, чтобы расположенные рядом части любых двух лежащих рядом карточек были бы одного цвета. Сколько различных возможностей для покрытия доски карточками желаемым способом имеется у Юры и сколько у Маши?

2. Решить уравнение $\sqrt{x} = \log_2 x$.

3. В треугольнике ABC имеем $\angle C = 90^\circ$. На луче CB берут точку D так, что $|AC| \cdot |CD| = |BC|^2$. Проведенная через точку D параллельно гипотенузе AB прямая пересекает луч CA в точке E. Найти величину угла BEC.

4. Назовем положительное целое число *одиноким*, если сумма чисел, обратных положительным делителям этого числа (включая 1 и само число) не равна сумме чисел, обратных положительным делителям какого-либо другого положительного целого числа. Доказать, что
   а) все простые числа являются одинокими;
   б) существует бесконечно много неодиноких положительных целых чисел.

5. Играющий в лотерею должен отметить на билете 6 чисел из 36. Во время розыгрыша из этих 36 чисел выбирают случайным образом 6 чисел и билет выигрывает, если ни одно из выбранных чисел на нем не отмечено. Доказать, что
   а) возможно отметить числа на 9-ти билетах так, что при розыгрыше по крайней мере один из этих билетов обязательно выиграет;
   б) невозможно отметить числа на 8-ми билетах так, что при розыгрыше по крайней мере один из этих билетов обязательно выиграет.

Eesti koolinoorte L täppisteaduste olümpiaadi

lõppvoor MATEMAATIKAS

Tartus, 8. märtsil 2003. a.

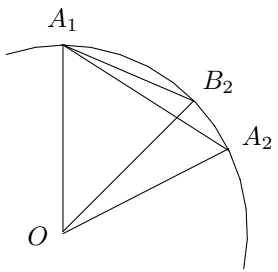
Lahendused ja vastused

IX klass

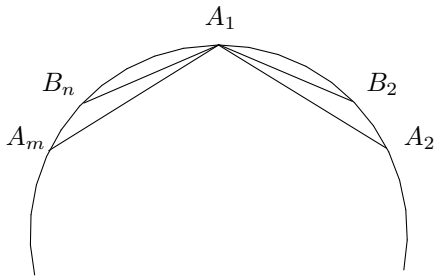
1. *Vastus:* $\dfrac{n-m}{nm}\,\pi$.

Lahendus 1. Paneme tähele, et nurk $B_2A_1A_2$ kui kõõlule B_2A_2 toetuv piirdenurk moodustab poole vastavast kesknurgast B_2OA_2 (vt. joonist 1). Kuna $\angle A_1OA_2 = \dfrac{2\pi}{m}$ ja $\angle A_1OB_2 = \dfrac{2\pi}{n}$, siis

$$\angle B_2A_1A_2 = \frac{\angle B_2OA_2}{2} = \frac{\angle A_1OA_2 - \angle A_1OB_2}{2} = \frac{\pi}{m} - \frac{\pi}{n} = \\ = \frac{n-m}{nm}\,\pi\,.$$



Joonis 1



Joonis 2

Lahendus 2. Korrapärase hulknurga sisenurga suuruse valemist saame $\angle A_mA_1A_2 = \dfrac{m-2}{m}\,\pi$ ja $\angle B_nA_1B_2 = \dfrac{n-2}{n}\,\pi$ (vt. joonist 2). Sümmeetria tõttu

$$\angle B_2A_1A_2 = \frac{\angle B_nA_1B_2 - \angle A_mA_1A_2}{2} = \frac{m(n-2)-n(m-2)}{2nm}\,\pi =$$

$$= \frac{n-m}{nm}\,\pi\,.$$

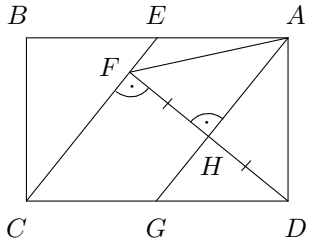
2. *Vastus:* arvud kujul $6k+1$, kus $k = 0, 1, \ldots$.
   Paneme tähele, et kui vaadeldav võrdus kehtib (või ei kehti) mingi n korral, siis kehtib (vastavalt ei kehti) ta ka $n+6$ korral. Tõepoolest, $(n+6) - n = 6$, $\left[\frac{n+6}{6}\right] = \left[\frac{n}{6} + 1\right] = \left[\frac{n}{6}\right] + 1$ ning analoogiliselt $\left[\frac{n+6}{2}\right] = \left[\frac{n}{2}\right] + 3$ ja $\left[\frac{2(n+6)}{3}\right] = \left[\frac{2n}{3}\right] + 4$, mistõttu n suurendamisel 6 võrra suureneb nii võrduse vasak kui ka parem pool täpselt 7 võrra.
   Jääb üle kontrollida võrduse kehtivust $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ korral. Näeme, et

$$0 + \left[\frac{0}{6}\right] = 0 = 0 + 0 = \left[\frac{0}{2}\right] + \left[\frac{2\cdot 0}{3}\right],$$
$$1 + \left[\frac{1}{6}\right] = 1 \neq 0 + 0 = \left[\frac{1}{2}\right] + \left[\frac{2\cdot 1}{3}\right],$$
$$2 + \left[\frac{2}{6}\right] = 2 = 1 + 1 = \left[\frac{2}{2}\right] + \left[\frac{2\cdot 2}{3}\right],$$
$$3 + \left[\frac{3}{6}\right] = 3 = 1 + 2 = \left[\frac{3}{2}\right] + \left[\frac{2\cdot 3}{3}\right],$$
$$4 + \left[\frac{4}{6}\right] = 4 = 2 + 2 = \left[\frac{4}{2}\right] + \left[\frac{2\cdot 4}{3}\right],$$
$$5 + \left[\frac{5}{6}\right] = 5 = 2 + 3 = \left[\frac{5}{2}\right] + \left[\frac{2\cdot 5}{3}\right].$$

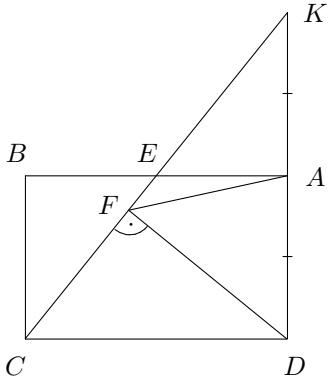
3. *Lahendus 1.* Olgu G külje CD keskpunkt ning H lõikude DF ja AG lõikepunkt (vt. joonist 3). Et lõigud AG ja CE on paralleelsed, siis AG on risti lõiguga DF, s.t. AH on kolmnurga FAD kõrgus. Teisalt saame lõikude AG ja CE paralleelsusest, et $\frac{|FH|}{|HD|} = \frac{|CG|}{|GD|} = 1$, ehk AH on kolmnurga FAD mediaan. Järelikult $|FA| = |DA|$, s.t. kolmnurk FAD on võrdhaarne.

   Lahendus 2. Pikendame lõiku DA üle punkti A ja lõiku CE üle punkti E kuni lõikumiseni punktis K (vt. joonist 4). Kuna $|AE| = \frac{|DC|}{2}$,

siis $|AK| = |AD|$. Joonestame ringjoone keskpunktiga punktis A, mis läbib tippu D ning äsjatõestatu põhjal ka punkti K, kusjuures DK on selle ringjoone diameeter. Et $\angle KFD = 90°$, siis punkt F asub sellel ringjoonel. Seega lõigud AF ja AD on võrdse pikkusega kui selle ringjoone raadiused, s.t. kolmnurk FAD on võrdhaarne.



Joonis 3



Joonis 4

Lahendus 3. Et E on ristküliku külje AB keskpunkt, siis täisnurksed kolmnurgad EAD ja EBC on kongruentsed. Kuna $\angle DAE = \angle DFE = 90°$, siis $AEFD$ on kõõlnelinurk. Järelikult $\angle AFD = \angle AED = \angle BEC$. Teiselt poolt aga saame kõõlnelinurgast $AEFD$, et $\angle ADF = 180° - \angle AEF = \angle BEC$. Niisiis $\angle AFD = \angle ADF$, s.t. kolmnurk FAD on võrdhaarne.

4. *Vastus:* $2:3$.

Lahendus 1. Enne osa segu väljavalamist sisaldas 350 ml täis pudel 140 ml põdrasamblateed, mis moodustas seega $\frac{2}{5}$ pudelis olevast segust ning järelikult ka $\frac{2}{5}$ väljavalatavast segust. Paneme tähele, et:

(1) väljavalatava ja juurdelisatava segu kogused olid võrdsed,

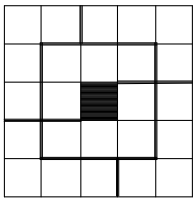
(2) kuna lõpuks oli pudelis põdrasamblateed 140 ml, s.t. niisama palju kui enne, oli juurdelisatavas segus põdrasamblateed niisama palju kui väljavalatavas.

Siit nähtub, et väljavalatavas ja juurdelisatavas segus pidi ka põdrasamblatee osamaht olema sama, s.t. põdrasamblatee ja hundijalavesi

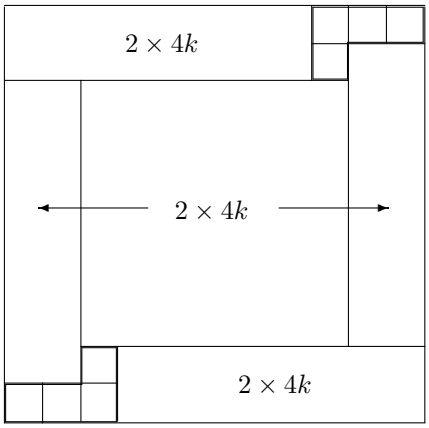
moodustasid ka juurdelisatavas segus vastavalt $\frac{2}{5}$ ja $\frac{3}{5}$ osa. Seega nende ainete koguste omavaheline vahekord oli $2:3$.

Lahendus 2. Olgu x ml ekslikult rohkem pudelisse valatud kärbseseeneleotise maht. Siis segu pudelis enne sellest osa väljavalamist (ja ühtlasi ka väljavalatud segu) sisaldas põdrasamblateed, kärbseseeneleotist ja hundijalavett vahekorras $140:(160+x):(50-x)$. Et kärbseseeneleotist valati välja täpselt x ml (kuna seda hiljem enam juurde ei lisatud), siis põdrasamblateed valati välja $\frac{140}{160+x}\cdot x$ ml ning hundijalavett $\frac{50-x}{160+x}\cdot x$ ml. Tagasi pudelisse valati järelikult põdrasamblateed $\frac{140}{160+x}\cdot x$ ml ning hundijalavett $\frac{50-x}{160+x}\cdot x+x$ ml ning nende segu oli seega vahekorras

$$\frac{\frac{140}{160+x}\cdot x}{\frac{50-x}{160+x}\cdot x+x}=\frac{\frac{140}{160+x}}{\frac{50-x}{160+x}+1}=\frac{140}{(50-x)+(160+x)}=\frac{140}{210}=\frac{2}{3}\,.$$



Joonis 5



Joonis 6

5. *Vastus:* a) jah; b) jah.

a) Sobiv katmisviis on näidatud joonisel 5.

b) Joonisel 6 on näidatud, kuidas katta L-kujunditega riba laiusega

2 ümber $(4k-1) \times (4k-1)$ ruudu (siin kasutame seda, et 2×4 ristkülikut on ilmselt võimalik katta kahe L-kujundiga). Rakendades seda konstruktsiooni 500 korda, saame kattest $n = 3$ jaoks (selle olemasolu on näha jooniselt 5) katte $n = 3 + 500 \cdot 4 = 2003$ jaoks.

X klass

1. *Vastus:* 4.

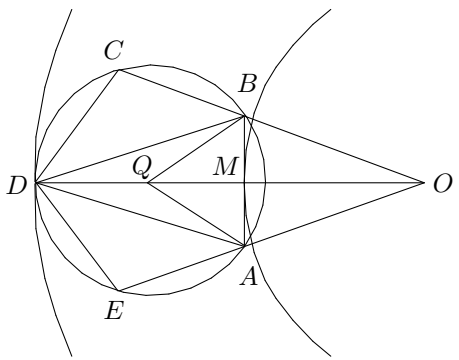
   Olgu üks viisnurkadest $ABCDE$, kus tipud on tähistatud nii, et väiksem ringjoon puutub külge AB ning suurem ringjoon läbib tippu D (vt. joonist 7). Olgu antud ringjoonte ühine keskpunkt O, viisnurga $ABCDE$ ümberringjoone keskpunkt Q ning lõigu AB keskpunkt M, siis

   $$\angle AOB = \frac{360^\circ}{10} = 36^\circ$$

   ning

   $$\angle ADB = \frac{1}{2}\angle AQB = \frac{1}{2} \cdot \frac{360^\circ}{5} = 36^\circ \ .$$

   Võrdhaarsed kolmnurgad AOB ja ADB on seega võrdsed ning $|OD| = |OM| + |MD| = 2\,|OM|$. Et väikese ringjoone raadius on OM ning suure ringjoone raadius OD, siis suure ringjoone pindala on võrdne väikese ringjoone neljakordse pindalaga.



Joonis 7

2. *Vastus:* 2 ja -2.

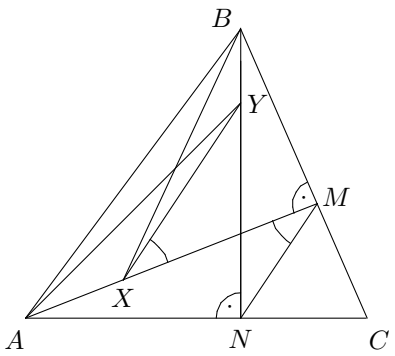
Kui $\dfrac{m^2+n^2}{mn}$ on täisarv, siis mn on arvu m^2+n^2 jagaja, kust näeme, et m on n^2 jagaja ning n on m^2 jagaja. Seega peavad arvude m ja n algteguriteks lahutused sisaldama ühtesid ja samu algtegureid. Näitame nüüd, et ka iga algteguri astendaja arvude m ja n algteguriteks lahutustes peab olema üks ja sama, s.t. $m = \pm n$. Tõepoolest, olgu $m = p^a m'$ ja $n = p^b n'$, kus arvud m' ja n' ei jagu algarvuga p ning $a > b$. Siis arvud mn ja m^2 jaguvad arvuga p^{a+b}, kuid arv n^2 ei jagu (jagub ainult arvuga p^{2b}, kus $2b = b + b < a + b$) — vastuolu.

Järelikult $m = \pm n$, s.t. $\dfrac{m^2+n^2}{mn} = \dfrac{2n^2}{\pm\, n^2} = \pm 2$.

3. Paneme tähele, et $\angle AXB = 180^\circ - \angle MXB = 135^\circ$ (vt. joonist 8) ning analoogiliselt $\angle AYB = 135^\circ$. Niisiis punktid A, X, Y ja B paiknevad ühel ringjoonel ning

$$\begin{aligned}\angle MXY &= 180^\circ - \angle AXY = \angle ABY = \angle ABN = \angle AMN = \\ &= \angle XMN\,.\end{aligned}$$

Sellega olemegi näidanud, et lõigud MN ja XY on paralleelsed.



Joonis 8

4. *Lahendus 1.* Kasutades positiivsete arvude aritmeetilise ja geomeetrilise keskmise vahelist võrratust, saame $a+b+c \geqslant 3\sqrt[3]{abc}$, mistõttu

$$\frac{abc}{a+b+c} \leqslant \frac{abc}{3\sqrt[3]{abc}} = \frac{\sqrt[3]{(abc)^2}}{3}\,.$$

Et $a \leqslant 2$, $b \leqslant 2$ ja $c \leqslant 2$, siis $abc \leqslant 8$ ning

$$\frac{\sqrt[3]{(abc)^2}}{3} \leqslant \frac{\sqrt[3]{64}}{3} = \frac{4}{3}\,.$$

Lahendus 2. Tõestame ülesandes antuga samaväärse võrratuse

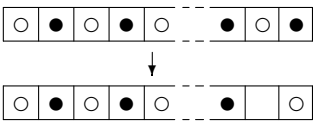
$$\frac{a+b+c}{abc} \geqslant \frac{3}{4}\,.$$

Kirjutades selle võrratuse vasaku poole kolme liidetava summana ning kasutades positiivsete arvude aritmeetilise ja geomeetrilise keskmise vahelist võrratust, saame

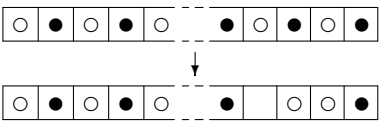
$$\frac{a+b+c}{abc} = \frac{1}{bc} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{bc} \geqslant 3\sqrt[3]{\frac{1}{a^2b^2c^2}}\,.$$

Et $a \leqslant 2$, $b \leqslant 2$ ja $c \leqslant 2$, siis $abc \leqslant 8$ ning $\sqrt[3]{\frac{1}{a^2b^2c^2}} \geqslant \sqrt[3]{\frac{1}{64}} = \frac{1}{4}$, kust saamegi nõutava võrratuse.

5. Kui riba pikkus on $2(k+1)$, võib alustaja oma avakäigul lüüa vastase nupu, mis paikneb riba otsmisel ruudul (vt. joonist 9). Seejärel riba kaks otsmist ruutu enam edasises mängus ei osale (seal oleva alustaja nupuga ei saa enam käia ning ühegi nupuga riba ülejäänud osalt ei saa sinna käia) ning alustaja vastane teeb seega sisuliselt avakäigu ribal pikkusega $2k$. Vastavalt eeldusele on sel juhul võitev strateegia avakäigu tegija vastasmängijal, s.t. meie vaadeldava mängu alustajal.



Joonis 9



Joonis 10

Kui riba pikkus on $2(k+2)$, võib alustaja oma avakäigul oma nupuga, mis paikneb riba otsast lugedes 4. ruudul, lüüa vastase nupu riba otsast lugedes 3. ruudult (vt. joonist 10). Seejärel on riba jaotunud kaheks osaks — kolmest otsmisest ruudust koosnev *väike* osa ja $2k$ ruudust koosnev *suur* osa — ning iga järgmine käik toimub neist

ühe piires. Alustaja edasine strateegia on nüüd järgmine: kui vastane teeb käigu riba väikesel osal, siis teeb ka alustaja oma järgmise käigu väikesel osal ning seejärel riba väike osa edasises mängus enam ei osale; kui vastane teeb aga käigu riba suurel osal, siis alustaja kasutab avakäigu tegija vastasmängijal vastavalt eeldusele olemasolevat võitvat strateegiat $2k$ korral.

XI klass

1. *Lahendus 1.* Asugu Juhan punktis J ning Opel, Trabant ja Mercedes i-ndal vaadeldaval ajahetkel vastavalt punktides O_i, T_i ja M_i (siin $i = 0$ vastab ajahetkele, mil Trabant möödus Juhanist, $i = 1$ ajahetkele, mil Mercedes möödus Juhanist, ning $i = 2$ ajahetkele, mil Opel möödus Juhanist). Siis $T_0 = M_1 = O_2 = J$, $\overrightarrow{M_0J} = -\overrightarrow{O_0J}$, $\overrightarrow{T_1J} = -\overrightarrow{O_1J}$ ning kõigi autode ühtlase kiirusega liikumise tõttu

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{T_2J} - \overrightarrow{T_0J} &= k(\overrightarrow{T_1J} - \overrightarrow{T_0J}) \,, \\
\overrightarrow{M_2J} - \overrightarrow{M_0J} &= k(\overrightarrow{M_1J} - \overrightarrow{M_0J}) \,, \\
\overrightarrow{O_2J} - \overrightarrow{O_0J} &= k(\overrightarrow{O_1J} - \overrightarrow{O_0J}) \,,
\end{aligned}$$

kus k on mingi fikseeritud reaalarv (kusjuures $k \neq 0$ ja $k \neq 1$, kui kõik kolm autot ei möödunud Juhanist korraga, millisel juhul ülesande väide ilmselt kehtib). Arvestades tingimusi $T_0 = M_1 = O_2 = J$, saame need võrrandid kirjutada kujul

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{T_2J} &= k\overrightarrow{T_1J} \,, \\
\overrightarrow{M_2J} &= (1-k)\overrightarrow{M_0J} \,, \\
\overrightarrow{O_0J} &= \frac{k}{k-1}\overrightarrow{O_1J} \,.
\end{aligned}$$

Nüüd

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{M_2J} &= (1-k)\overrightarrow{M_0J} = (k-1)\overrightarrow{O_0J} = k\overrightarrow{O_1J} = -k\overrightarrow{T_1J} = \\
&= -\overrightarrow{T_2J} \,,
\end{aligned}$$

mida oligi tarvis tõestada.

Lahendus 2. Võtame kasutusele fiktiivse auto, mille asukoht igal ajahetkel on Opeli asukoha peegeldus Juhani asukoha suhtes — nimetame seda fiktiivset autot Lepo'ks. Olgu t_0, t_1 ja t_2 ajahetked, mil vastavalt

Trabant, Mercedes ja Opel möödub Juhanist. Siis vastavalt ülesande tingimustele Lepo asub hetkel t_0 samas kohas, kus Mercedes, ja hetkel t_1 samas kohas, kus Trabant.

Kuna kõigi autode liikumine on ühtlane ja sirgjooneline, siis võime valida taustsüsteemi vabalt. Olgu Juhaniga seotud taustsüsteemis Trabanti koordinaat ajahetkedel t_0, t_1 ja t_2 vastavalt 0, x ja y. Siis Opeli peegelduse Lepoga seotud taustsüsteemis on Mercedese koordinaat ajahetkedel t_0 ja t_1 vastavalt 0 ja $-x$ ning ajahetkel t_2 järelikult $-y$. Kuna hetkel t_2 asuvad Juhan, Opel ja Lepo kõik ühes ja samas punktis, siis on sellel hetkel Juhaniga seotud taustsüsteemis Trabanti koordinaat y ja Mercedese koordinaat $-y$.

2. *Vastus:* võrdus kehtib, kui $a = b = c = \sqrt{3}$.

Kasutades kaks korda positiivsete arvude aritmeetilise ja geomeetrilise keskmise vahelist võrratust, saame

$$\sqrt[3]{abc} + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geqslant \sqrt[3]{abc} + 3\sqrt[3]{\frac{1}{abc}} \geqslant 2\sqrt{\sqrt[3]{abc} \cdot 3\sqrt[3]{\frac{1}{abc}}} =$$
$$= 2\sqrt{3}\,.$$

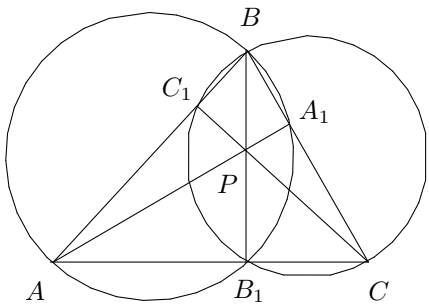
Võrdus kehtib parajasti siis, kui $a = b = c$ ning $\sqrt[3]{abc} = 3\sqrt[3]{\frac{1}{abc}}$, millest saame $\sqrt[3]{a^3} = 3\sqrt[3]{\frac{1}{a^3}}$ ehk $a = \frac{3}{a}$. Järelikult $a = b = c = \sqrt{3}$.

Märkus. Tegelikult olümpiaadil esitatud sõnastuses oli sõna "reaalarvude" asemele kogemata sattunud "täisarvude". Võrratuse tõestust see ei mõjuta, kuid nagu ülaltoodud lahendusest näha, võrdus siin täisarvude korral kehtida ei saa.

3. a) Olgu lõikude AA_1, BB_1 ja CC_1 ühine lõikepunkt P (vt. joonist 11). Et AB_1A_1B on kõõlnelinurk, siis $\angle A_1AB_1 = \angle A_1BB_1$ ning kolmnurgad PA_1B ja PB_1A on sarnased. Seega $\frac{|PA|}{|PB|} = \frac{|PB_1|}{|PA_1|}$, ehk $|PA|\cdot|PA_1| = |PB|\cdot|PB_1|$ (see lõikuvate kõõlude omadus on õigupoolest hästi tuntud). Et ka BC_1B_1C on kõõlnelinurk, siis analoogiliselt saame $|PC|\cdot|PC_1| = |PB|\cdot|PB_1|$. Niisiis $|PA|\cdot|PA_1| = |PC|\cdot|PC_1|$, ehk $\frac{|PA|}{|PC|} = \frac{|PC_1|}{|PA_1|}$, mistõttu kolmnurgad PA_1C ja PC_1A on sarnased ning $\angle A_1AC_1 = \angle A_1CC_1$. Seega CA_1C_1A on samuti kõõlnelinurk,

s.t. punktid C, A_1, C_1 ja A paiknevad ühel ringjoonel.

b) Kuna AB_1A_1B, BC_1B_1C ja CA_1C_1A on kõik kõõlnelinurgad, siis $\angle AA_1B = \angle AB_1B$ ja $\angle AA_1C = \angle AC_1C$ ning samuti $\angle AB_1B = \angle AC_1C$, sest nende nurkade täiendnurgad $\angle CB_1B$ ja $\angle CC_1B$ on võrdsed. Seega $\angle AA_1B = \angle AA_1C = 180^\circ - \angle AA_1B$, millest järeldub, et $\angle AA_1B = \angle AA_1C = 90^\circ$ ja lõik AA_1 on risti küljega BC. Analoogiliselt tõestame, et lõik BB_1 on risti küljega CA ning lõik CC_1 on risti küljega AB.



Joonis 11

4. Nõutud omadusega on kõik arvud kujul $m^2 + m$ ning $m^2 + 2m$, kus m on mistahes positiivne täisarv. Tõepoolest, kuna

$$m^2 < m^2 + m < m^2 + 2m < (m+1)^2 ,$$

siis

$$m < \sqrt{m^2 + m} < \sqrt{m^2 + 2m} < m + 1 ,$$

s.t. $\sqrt{m^2 + m}$ ja $\sqrt{m^2 + 2m}$ ei ole täisarvud ning nende ühine täisosa $\left[\sqrt{m^2 + m}\right] = \left[\sqrt{m^2 + 2m}\right] = m$ on arvude $m^2 + m$ ning $m^2 + 2m$ jagaja.

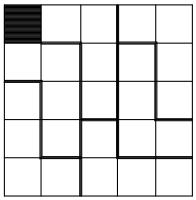
5. *Vastus:* kõik paarisarvud.

Joonisel 13 on näidatud, kuidas konstrueerida antud kattest $n = 2m$ jaoks kate $n = 2(m+1)$ jaoks (siin kasutame seda, et 2×4 ristkülikut on ilmselt võimalik katta kahe L-kujundiga). Rakendades seda konstruktsiooni vajalik arv kordi, saame joonisel 12 näidatud kattest $n = 2$ jaoks katte mistahes paarisarvulise n jaoks.

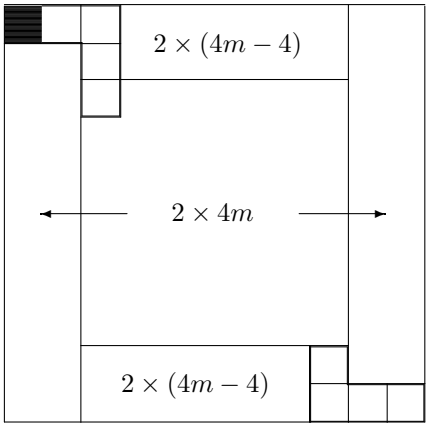
Olgu nüüd $n = 2m + 1$. Värvime ruudustiku read vaheldumisi mustaks ja valgeks. Et kokku on värvitavas kujundis $2n + 1 = 4m + 3$ rida ning iga rida peale ühe äärmise sisaldab paaritu arvu ruute, siis saame kumbagi värvi ruute paaritu arvu. Kuna iga L-kujund katab mistahes paigutuse korral parajasti ühe ühte värvi ruudu ja kolm teist värvi ruutu, peab kattes L-kujundeid olema paaritu arv. Teisalt on kogu kaetavas kujundis ruute kokku

$$(4m + 3)^2 - 1 = 16m^2 + 24m + 8 \ ,$$

see arv aga jagub 8-ga ning järelikult peab kattes L-kujundeid olema paarisarv. Saadud vastuolu näitab, et paarituarvulise n korral ei ole ruudustiku katmine L-kujunditega võimalik.



Joonis 12



Joonis 13

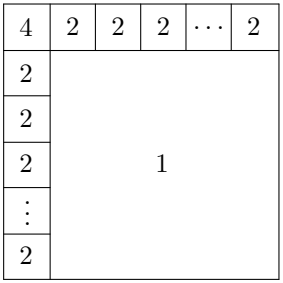
Märkus. Teine võimalus üleminekuks $(4m + 1) \times (4m + 1)$ ruudustiku katmiselt $\big(4(m{+}1)) + 1\big) \times \big(4(m{+}1)) + 1\big)$ ruudustiku katmisele on järgmine: lisame $(4m + 1) \times (4m + 1)$ ruudustiku vasaku ja ülemise serva äärde $4 \times 4m$ ristküliku (mida saab katta 2×4 osade kaupa) ning vasakusse ülemisse nurka väljalõigatud nurgaruuduga 5×5 ruudu (mille katmise võimalus on näidatud joonisel 12).

XII klass

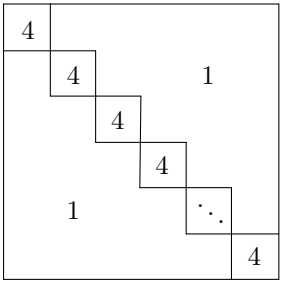
1. *Vastus:* nii Jüril kui ka Maril on kaartide paigutamiseks 4^n võimalust.
   Lahendus 1. Paneme tähele, et kui mingile ruudule on mistahes asendis

kaart juba paigutatud, siis selle ruudu suvalisele naaberruudule (temaga ühist külge omavale ruudule) kaardi paigutamiseks on nii Jüril kui ka Maril 2 võimalust. Kui aga mingis 2×2 ruudus on kolm kaarti juba paigutatud, siis sinna neljanda kaardi paigutamiseks on nii Jüril kui ka Maril ainult üks võimalus. Joonisel 14 on näidatud kaardi paigutamise võimaluste arvud ruudustiku iga ruudu jaoks, kui katta kaartidega kõigepealt ruudustiku ülemine rida vasakult paremale, seejärel vasakpoolne veerg ülevalt alla ning jätkata siis ülejäänud $(n-1)\times(n-1)$ ruudustiku katmist analoogilises järjekorras. Kokku on nii Jüril kui ka Maril kaartide paigutamiseks niisiis $4\cdot 2^{2(n-1)} = 4\cdot 4^{n-1} = 4^n$ võimalust.

Lahendus 2. Paneme tähele, et suvalises 2×2 ruudus saab nii Jüri kui ka Mari kahele ühist külge mitteomavale ruudule kaardid paigutada teineteisest sõltumatult, ning nende kaartide mistahes paigutuse korral on kummalgi neist ülejäänud kahele ruudule kaartide paigutamiseks üksainus võimalus. Järelikult saab nii Jüri kui ka Mari paigutada n kaarti mistahes viisil ruudustiku ühel diagonaalil paiknevatele ruutudele (selleks on 4^n võimalust) ning seejärel on kummalgi neist ülejäänud ruutude kaartidega katmiseks üksainus võimalus (vt. joonist 15).



Joonis 14



Joonis 15

Lahendus 3. Teeme induktsiooni n järgi. Kui $n = 1$, siis on ilmselt nii Maril kui ka Jüril ainsa kaardi paigutamiseks $4 = 4^1$ võimalust. Lisame nüüd sobival viisil kaartidega kaetud $n\times n$ ruudule paremale ühe veeru ja alla ühe rea. Lisatud veeru kõige ülemisele ruudule saab nii Mari kui ka Jüri paigutada kaardi 2 viisil, sest selle vasak äär peab olema sama värvi (vastavalt erinevat värvi) võrreldes temast vasakul asuva kaardiga. Järgmise kaardi asend on kahe naaberkülje värviga juba üheselt määratud jne., lisatud veeru ja rea ühisele ruudule jätame

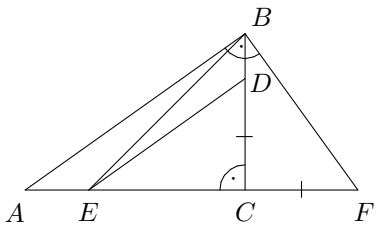
kaardi esialgu paigutamata. Alumise rea vasakpoolse kaardi paigutamiseks on Maril ja Jüril kummalgi samuti 2 võimalust ning kõikide temast paremal asuvate kaartide asend (k.a. lisatud veeru ja rea ühisele ruudule paigutatav kaart) on nüüd üheselt määratud. Kokku on kummalgi võimalusi $(n+1)\times(n+1)$ ruudu katmiseks seega $4^n\cdot 2\cdot 2 = 4^{n+1}$.

2. *Vastus:* selle võrrandi lahendid on $x = 4$ ja $x = 16$.

   Paneme kõigepealt tähele, et arvud 4 ja 16 rahuldavad antud võrrandit: $\sqrt{4} = 2 = \log_2 4$ ning $\sqrt{16} = 4 = \log_2 16$. Näitamaks, et rohkem lahendeid ei ole, uurime funktsiooni $f(x) = \sqrt{x} - \log_2 x$, mille nullkohtadeks on parajasti antud võrrandi lahendid. Leiame

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{x\ln 2} = \frac{\sqrt{x}\ln 2 - 2}{2x\ln 2}\ ,$$

   kust näeme, et $f'(x) = 0$ parajasti siis, kui $\sqrt{x}\ln 2 - 2 = 0$, ehk $\sqrt{x} = \dfrac{2}{\ln 2}$. Seega $x = \left(\dfrac{2}{\ln 2}\right)^2$ on funktsiooni $f(x)$ tuletise ainus nullkoht. Et nii funktsioon $f(x)$ kui ka selle tuletis on oma määramispiirkonnas $(0,\infty)$ pidevad, siis peab funktsiooni $f(x)$ iga kahe nullkoha vahel paiknema üks ekstreemumkoht, mis on selle funktsiooni tuletise nullkohaks. Järelikult ei saa funktsioonil $f(x)$ olla üle kahe nullkoha ning 4 ja 16 on antud võrrandi ainsad lahendid.



Joonis 16

3. *Vastus:* 45°.

   Lahendus 1. Võtame kiirel AC niisuguse punkti F, et $\angle ABF = 90^\circ$ (vt. joonist 16). Siis punkt C paikneb lõigul AF ning Eukleidese teoreemist saame $|AC|\cdot|CF| = |BC|^2$. Järelikult $|CD| = |CF|$. Et $\angle DCE = \angle FCB = 90^\circ$ ja

$$\angle CDE = \angle CBA = 90^\circ - \angle BAC = \angle CFB\ ,$$

   siis kolmnurgad CDE ja CFB on võrdsed ning $|CE| = |CB|$. Et

$\angle ECB = 90^\circ$, siis on kolmnurk ECB täisnurkne ja võrdhaarne ning tema alusnurga BEC suurus on 45°.

Lahendus 2. Paneme tähele, et kolmnurk EDC on sarnane kolmnurgaga ABC, kusjuures sarnasustegur on $k = \dfrac{|DC|}{|BC|}$. Ülesandes antud võrdusest saame $\dfrac{|DC|}{|BC|} = \dfrac{|BC|}{|AC|}$. Järelikult

$$|EC| = |AC| \cdot k = |AC| \cdot \frac{|BC|}{|AC|} = |BC| \,.$$

Niisiis on kolmnurk BCE täisnurkne ja võrdkülgne ning $\angle CEB = 45$.

4. Olgu $d_1 = 1$, d_2, $\ldots$, d_{k-1}, $d_k = n$ positiivse täisarvu n kõik positiivsed jagajad loetletuna kasvavas järjekorras, siis $d_1 = \dfrac{n}{d_k}$, $d_2 = \dfrac{n}{d_{k-1}}$, $\ldots$. Tähistades arvu n positiivsete jagajate summa $\sigma(n)$ ning nende pöördarvude summa $\sigma'(n)$, saame

$$\begin{aligned}\sigma'(n) &= \frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} + \ldots + \frac{1}{d_k} = \frac{d_k}{n} + \frac{d_{k-1}}{n} + \ldots + \frac{d_1}{n} = \\ &= \frac{d_1 + d_2 + \ldots + d_k}{n} = \frac{\sigma(n)}{n} \,.\end{aligned}$$

a) Oletame, et mingi algarvu p jaoks leidub selline positiivne täisarv $a \neq p$, et $\dfrac{\sigma(a)}{a} = \sigma'(a) = \sigma'(p) = \dfrac{1+p}{p}$. Et murd $\dfrac{1+p}{p}$ on taandumatu, siis p peab olema arvu a jagaja. Seega arvu a jagajateks on arvu p jagajad 1 ja p ning veel vähemalt arv a ise, mistõttu $\sigma'(a) > \sigma'(p)$ — vastuolu.

b) Olgu a suvaline positiivne täisarv ning p selline algarv, mis ei ole a jagaja. Veendume, et siis $\sigma'(ap) = \sigma'(a) \cdot \sigma'(p)$. Tõepoolest, arvestades esimeses lõigus tõestatut piisab näidata, et $\sigma(ap) = \sigma(a) \cdot \sigma(p)$. Arvu ap jagajateks on aga parajasti arvu a jagajad ja nende korrutised arvuga p, mistõttu

$$\begin{aligned}\sigma(a) \cdot \sigma(p) &= (d_1 + d_2 + \ldots + d_k) \cdot (1 + p) = \\ &= (d_1 + d_2 + \ldots + d_k) + (d_1 p + d_2 p + \ldots + d_k p) = \\ &= \sigma(ap) \,.\end{aligned}$$

Niisiis piisab leida sellised arvud a ja b, et $a \neq b$ ning $\sigma'(a) = \sigma'(b)$ — siis ka $ap \neq bp$ ning $\sigma'(ap) = \sigma'(bp)$ mistahes sellise algarvu p korral,

mis ei ole ei a ega b jagaja, ning järelikult on kõik sellised arvud ap mitteüksildased. Sobivad arvud on näiteks $a = 6$ ja $b = 28$:

$$\sigma'(6) = \frac{1+2+3+6}{6} = 2 = \frac{1+2+4+7+14+28}{28} = \sigma'(28)\ .$$

5. a) Olgu 9 piletis märgitud järgmised arvud.

$(1,2,3,4,5,6)$	$(10,11,12,13,14,15)$	$(19,20,21,22,23,24)$
$(1,2,3,7,8,9)$	$(10,11,12,16,17,18)$	$(25,26,27,28,29,30)$
$(4,5,6,7,8,9)$	$(13,14,15,16,17,18)$	$(31,32,33,34,35,36)$

Siis selleks, et ükski esimeses tulbas näidatud kolmest piletist ei võidaks, peavad kuuest väljaloositud arvust vähemalt kaks olema hulgast $\{1,2,\ldots,9\}$. Et ükski järgmises tulbas näidatud kolmest piletist ei võidaks, peavad vähemalt kaks väljaloositud arvu olema hulgast $\{10,\ldots,18\}$. Et ükski viimases tulbas näidatud kolmest piletist ei võidaks, peab väljaloositud arvude seas olema veel kolm arvu hulgast $\{19,\ldots,36\}$. Kuna välja loositakse ainult kuus arvu, siis ei saa kõik need tingimused korraga täidetud olla ning vaadeldavate piletite seas leidub kindlasti võitev pilet.

b) Kui mõni arvudest on märgitud kolmes piletis kaheksast, siis võib väljaloositud arvude komplekt sisaldada selle arvu ja lisaks ülejäänud viiest piletist igaühest ühe märgitud arvu, ning ükski kaheksast piletist ei võida. Vaatleme nüüd juhtu, kus iga arv on märgitud ülimalt kahes piletis kaheksast. Siis 48 piletites kokku märgitud arvu seas peavad vähemalt 12 arvu esinema kaks korda (sest üldse on 36 erinevat arvu). Üldisust kitsendamata olgu need arvud 1, 2, …, 12. Vaatleme kaht piletit (tähistame need A ja B), kus on märgitud arv 1. Et piletites A ja B on kokku märgitud veel ülimalt 10 erinevat arvu, siis üks arvudest 2, …, 12 ei ole märgitud kummaski neist piletitest ning peab seega olema märgitud kahes ülejäänud kuuest piletist — üldisust kitsendamata olgu see arv 12 ning need kaks piletit C ja D. Siis aga võib väljaloositud arvude komplekt sisaldada arvud 1, 12 ja lisaks ülejäänud neljast piletist (mis ei ole A, B, C ega D) igaühest ühe märgitud arvu, ning ükski kaheksast piletist ei võida.

9. klass

Ülesanne 1 (Urmo Kaber)

On tehtud korrektne joonis ja ülesandest aru saadud	1 p.
Leidub ülesande lahendamise idee	3 p.
Lahenduskäik õige, kuid lõpetamata	5 p.
Täielik lahendus	7 p.

Ülesanne 2 (Eno Tõnisson)

Leitud, et arv 1 sobib	1 p.
Vaadatud läbi arvud 1 kuni 6 ja leitud, et 1 sobib	2 p.
Õige vastus ilma põhjenduseta	2 p.
Vastuseks pakutud, et n ei jagu 3-ga ega 2-ga, ja selle lünklik põhjendus	2 p.
Õige vastus; vaadatud läbi rohkem kui kuus esimest positiivset täisarvu	3 p.
Näidatud, et arvud kujul n=6k+1 sobivad, aga vastuseks on pakutud suurem hulk	4 p.
Õige vastus; vaadatud läbi arvud 1 kuni 6 ja esitatud lünklik põhjendus	5 p.
Täielik lahendus	7 p.

Ülesanne 3 (Mart Abel)

Lahendus vaid erijuhu jaoks (näiteks eeldatud, et punkt F poolitab lõigu EC)	1 p.
Õige lahendus, kuid ühe väite juures selgitus puudulik	6 p.
Täielik lahendus	7 p.

Ülesanne 4 (Ahti Peder)

Arvutatud mahud peale esimest pudelisse kallamist	2p.
Arvutatud mahud peale väljakallamist	2p.
Leitud põdrasamblatee ja hundijalavee suhe viimasel kallamisel	3p.
	7p.

Ülesanne osutus enamusele lihtsaks. Mõnes töös oletati, kui palju rohkem kärbseseeneleotist valati.

Ülesanne 5 (Martin Pettai)

a) osa eest:	2 p.
b) osa eest	5 p.
	7 p.

Punktide jaotus b) osa piires (žürii lahendus):

Juht n=3 või mõni teine n=3 (mod 4), kus n<=2003; peab olema tekstis mainitud	1 p.
Näitamine, kuidas juhu n=4k-1 võimalikkusest saada juhu n=4k+3 võimalikkus	2 p.
Eelmise kahe punkti põhjal juhu n=2003 võimalikkuse järeldamine	2 p.
	5 p.

Punktide jaotus b) osa piires (lahendus ruudu osadeks jaotamise abil):

Osadeks jaotamise ja nende ristkülikutega katmise idee	1 p.
Osadeks jaotamine nii, et iga osa on võimalik katta 3x8 ja 2x4 ristkülikutega	2 p.
3x8 ristküliku katmine	1 p.
2x4 ristküliku ja 3x3 ruudu (ilma keskmise ruuduta) katmine kokku: mõlemad peavad olema näidatud	1 p.
	5 p.

10. klass

Ülesanne 1 (Uve Nummert)

Avaldatud viisnurga küljepikkus või mõned nurgad, lahendus sisuliselt puudub	0 p.
Õige lahendusidee, kuid lahenduse algul arvutusviga, mis viib edasise valele teele	2 p.
Õige lahendusidee, kuid lahendus lõpetamata või lahenduse teises pooles arvutusviga, mis tingib vale lõpptulemuse	4 p.
Lahenduse seisukohalt oluline väide põhjendamata; lisaks arvutusviga, mis ei mõjuta lõpptulemust	5 p.
Lahenduse seisukohalt oluline väide põhjendamata, muidu täielik lahendus	6 p.
Kusagil segi aetud väikese ringjoone raadiuse ja pindala arvväärtused, mistõttu vastus vale; muidu täielik lahendus	6 p.
Täielik lahendus	7 p.

Ülesanne 2 (Nikita Salnikov)

Tähelepanek, et m on n^2 jagaja ja n on m^2 jagaja	1 p.
Näitamine, et arvudel n ja m on samad algtegurid	2 p.
Näitamine, et nende algtegurite astendajad on võrdsed	2 p.
Õige ja täielik vastus	2 p.
	7 p.

Ainult vastuse eest ilma lahenduseta	1 p.

Ülesanne 3 (Oleg Petšonkin)

On kirjutatud ilma selgituseta, et kolmnurgad MNO ja XYO on sarnased	0 p.
Pool lahendust, s.t. õige lahenduse viis, aga viga keskel	2 p.
Õige lahendus, aga puuduvad selgitused	6 p.
Täielik lahendus	7 p.

Ülesanne 4 (Leopold Parts)

Ainult öeldud, et avaldise väärtus on maksimaalne, kui a=b=c=2	0 p.
Kirjutatud välja sobiv aritmeetilise-geomeetrilise või aritmeetilise-harmoonilise keskmise vaheline võrratus	1 p.
Korrektne lahendus pisivigadega (samaväärsuste asemel kirjas valepidi järeldused)	6 p.
Täielik lahendus	7 p.

Ülesanne osutus lihtsaks, kuna seda oli võimalik lahendada juhtude läbivaatuse abil

Ülesanne 5 (Meelis Kull)

Idee kasutada k+1 ja k+2 korral ära eelduse kohaselt k jaoks leiduvat strateegiat	1 p.
Õige strateegia kirjeldus k+1 korral	2 p.
Õige avakäik k+2 korral	2 p.
Edasine õige strateegia kirjeldus k+2 korral	2 p.
	7 p.

11. klass

Ülesanne 1 (Hendrik Nigul)

Väide, et Mercedese kiirus on võrdne Opeli ja Trabanti kiiruste summaga	1 p.
Selle väite tõestus	3 p.
Õige järeldus	3 p.
	7 p.
Osaline lahendus erijuhul (nt Opeli ja Trabanti võrdsete kiiruste korral)	2 p.

Ülesanne 2 (Konstantin Tretjakov)

Lahendused, kus põhjendamata prooviti eeldada, et a=b=c	0 p.
Intuitiivne arutelu, miks täisarvuliste a,b,c korral võrdus kehtida ei saa	1 p.
Lahendust pole, aga on idee kasutada aritmeetilise/geomeetrilise/harmoonilise keskmise vahelist võrratust	2 p.
Täielik lahendus	7 p.

Ülesanne 3 (Reimo Palm)

a) osa eest	4 p.
b) osa eest	3 p.
	7 p.
Punktide jaotus a) osa piires	
Tõestatud väide $PA*PA_1=PC*PC_1$	3 p.
Kõõlnelinurkades nurkade arvutamine ja lõppjäreldus	1 p.
	4 p.

Ülesanne 4 (Hannes Jukk, Elts Abel)

Tähelepanek, et vahemikus $(k^2;(k+1)^2)$ kahe järjestikuse täisarvu ruutude vahel paiknevate arvude juured ei ole täisarvud, koos põhjendusega	2 p.
Tähelepanek, et vahemikus $(k^2;(k+1)^2)$ olevate täisarvude juurte täisosad on võrdsed arvuga k, koos põhjendusega	2 p.
Saadud vahemikust $(k^2;(k+1)^2)$ ülesande tingimusi rahuldava sobiva arvu juure üldkuju	2 p.
Põhjendus, et sobivaid arve on lõpmata palju	1 p.
	7 p.
Leitud ainult mõned sobivad arvud	1 p.

Ülesanne 5 (Peeter Laud)

Näidatud, et mõne n (näiteks 2 või 4) korral on katmine võimalik	1 p.
Näidatud, et paarisarvulise n korral on katmine võimalik (antud konstruktsioon)	2 p.
Tõestatud, et paarituarvulise n korral ei ole katmine võimalik	4 p.
	7 p.

12. klass

Ülesanne 1 (Kati Metsalu-Smotrova)

Pole midagi kasulikku tehtud	0 p.
Olemas mõned kasulikud ideed, kuid edasi pole neid arendatud	2 p.
Variantide arv ainult ühe mängija jaoks õigesti arvutatud	4 p.
Idee õige, kuid pole osatud variante loendada	5 p.
Saadud õige vastus, kuid siis on hakatud sealt mingeid variante maha arvestama	6 p.
Täielik lahendus	7 p.

Ülesanne 2 (Mati Abel)

Ainult leitud 1 õige lahend (selgitused puuduvad)	1 p.
Ainult leitud 2 õiget lahendit (selgitused puuduvad)	2 p.
Leitud 2 õiget lahendit ja on püütud midagi põhjendada	3 p.
Leitud 2 õiget lahendit ja põhjendust õigesti alustatud	4 p.
Graafiliselt lahendatud ning põhjendamata, miks rohkem lahendeid ei ole, või põhjendamisel kasutatud ebaõiget tulemust	5 p.
Graafiliselt lahendatud ja osaliselt põhjendatud, miks on ainult 2 lahendit, või tehtud põhjendamisel arvutusviga	6 p.
Täielik lahendus	7 p.

Ülesanne 3 (Jan Villemson)

Täielik lahendus	7 p.

Ülesanne 4 (Valdis Laan)

Tõestus, et algarvud on üksildased	3 p.
Leitud üks mitteüksildaste arvude paar	1 p.
Tõestus, et leidub lõpmata palju mitteüksildasi arve	3 p.
	7 p.

Ainult näidatud, et kaks algarvu ei moodusta “mitteüksildast paari”.	0 p.

Ülesanne 5 (Emilia Käsper)

a) osa	3 p.
b) osa	4 p.
	7 p.

Lahendused, kus oli näidatud võitev konstruktsioon 10 pileti jaoks, said a) osa eest 1 punkti.