Eesti koolinoorte LI täppisteaduste olümpiaadi

lõppvoor MATEMAATIKAS

Tartus, 3. aprillil 2004. a.

IX klass

Lahendamisaega on 5 tundi.
Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti.
Taskuarvutit kasutada ei lubata.

1. Leia kõik sellised reaalarvude paarid (x, y), mille korral

$$\frac{x+6}{y} + \frac{13}{xy} = \frac{4-y}{x}\,.$$

2. Viie erineva positiivse täisarvu a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 positiivsed vahed $a_i - a_j$ (neid vahesid on kokku 10) on kõik erinevad. Leia arvudest a_i suurima vähim võimalik väärtus.

3. Kumera nelinurga $ABCD$ külgedel AB ja BC võetakse vastavalt punktid M ja N nii, et kumbki lõikudest AN ja CM jaotab nelinurga $ABCD$ kaheks võrdse pindalaga osaks. Tõesta, et lõigud MN ja AC on paralleelsed.

4. Tõesta, et arv $n^n - n$ jagub 24-ga mistahes paaritu naturaalarvu n korral.

5. Kolm erinevat võrdse raadiusega ringjoont lõikuvad punktis Q. Ringjoon $\mathcal{C}$ puutub neid kõiki. Tõesta, et Q on ringjoone $\mathcal{C}$ keskpunkt.

Eesti koolinoorte LI täppisteaduste olümpiaadi

lõppvoor MATEMAATIKAS

Tartus, 3. aprillil 2004. a.

X klass

Lahendamisaega on 5 tundi.
Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti.
Taskuarvutit kasutada ei lubata.

1. Leia kõik sellised positiivsete täisarvude kolmikud $(x,\, y,\, z)$, mille korral $x < y < z$ ning $\text{SÜT}\,(x,\, y) = 6$, $\text{SÜT}\,(y,\, z) = 10$, $\text{SÜT}\,(z,\, x) = 8$ ja $\text{VÜK}\,(x,\, y,\, z) = 2400$.

2. Rööpküliku $ABCD$ külgedel BC ja AB võetakse vastavalt punktid M ja N nii, et $|AM| = |CN|$. Olgu P lõikude AM ja CN lõikepunkt. Tõesta, et nurga APC poolitaja läbib tippu D.

3. Õpetaja oli kirjutanud tahvlile arvu, mis koosnes teatud arvust numbritest 4 ja neile järgnevatest samapaljudest numbritest 8, kui koolikell helises. Vahetunnil astus Juku tahvli juurde ja lisas arvu ette veel ühe numbri 4 ja lõppu numbri 9. Tõesta, et tekkinud arv on mingi täisarvu ruut.

4. Algul on punkti $(0, 0)$ kirjutatud arv 1 ning tasandi igasse teise täisarvuliste koordinaatidega punkti arv 0. Iga sekundi järel asendatakse kõik need arvud, kirjutades igasse täisarvuliste koordinaatidega punkti selle punkti neljas naaberpunktis eelmisel sekundil olnud arvude summa. Leia kõigis täisarvuliste koordinaatidega punktides olevate arvude summa n sekundi järel.

5. Reaalarvud a, b ja c rahuldavad võrdusi $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ ja $a^3 + b^3 + c^3 = 1$. Leia summa $a + b + c$ väärtus.

Eesti koolinoorte LI täppisteaduste olümpiaadi

lõppvoor MATEMAATIKAS

Tartus, 3. aprillil 2004. a.

XI klass

Lahendamisaega on 5 tundi.
Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti.
Taskuarvutit kasutada ei lubata.

1. Leia kõik sellised täisarvude paarid $(a,\, b)$, et $a^2 + ab + b^2 = 1$.

2. Läbi nurga AOB poolitajal valitud punkti M tõmmatakse sirge, mis lõikab nurga haarasid OA ja OB vastavalt punktides K ja L. Tõesta, et summa $\dfrac{1}{|OK|} + \dfrac{1}{|OL|}$ väärtus ei sõltu punkti M läbiva sirge valikust, s.t. on määratud nurga AOB suurusega ja punkti M valikuga nurgapoolitajal.

3. Tasandi 25 punktist, mille mõlemad koordinaadid on täisarvud hulgast $\{-2,\, -1,\, 0,\, 1,\, 2\}$, märgitakse mingid 17 punkti. Tõesta, et leiduvad sellised kolm märgitud punkti, millest üks on kaht ülejäänut ühendava lõigu keskpunkt.

4. Leia kõik funktsioonid $f(x)$, mis on määratud mittenegatiivsetel reaalarvudel x, omandavad mittenegatiivseid reaalarvulisi väärtusi ning rahuldavad mistahes mittenegatiivsete reaalarvude x ja y korral tingimust

$$x \cdot f(y) + y \cdot f(x) = f(x) \cdot f(y) \cdot \big(f(x) + f(y)\big)\,.$$

5. BAU-keele tähestik koosneb kolmest tähest B, A ja U. On teada, et alustades mistahes n-tähelisest BAU-keele sõnast ning rakendades korduvalt järgmisi reegleid (1) ja (2), saame kõik n-tähelised BAU-keele sõnad ja ainult need:
   (1) kirjutame sõna kõik tähed vastupidises järjekorras;
   (2) asendame kaks kõrvutiasetsevat tähte: BA $\to$ UU, AU $\to$ BB, UB $\to$ AA, UU $\to$ BA, BB $\to$ AU või AA $\to$ UB.

   Kui BBAUABAUUABAUUUABAUUUUABB on BAU-keele sõna, kas siis BAU-keeles leidub sõna
   a) BUABUABUABUABAUBAUBAUBAUB;
   b) ABUABUABUABUAUBAUBAUBAUBA?

Eesti koolinoorte LI täppisteaduste olümpiaadi

lõppvoor MATEMAATIKAS

Tartus, 3. aprillil 2004. a.

XII klass

Lahendamisaega on 5 tundi.
Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti.
Taskuarvutit kasutada ei lubata.

1. Ringi sisepiirkonnas võetakse punkt K nii, et punktist K läbi ringi keskpunkti O tõmmatud kiir ja selle kiirega risti olev punkti K läbiv ringjoone kõõl jaotavad ringi kolmeks võrdse pindalaga osaks. Olgu L vaadeldava kõõlu üks otspunkt. Kas kehtib võrratus $\angle KOL < 75^\circ$?

2. Albert ja Brita mängivad 19 kõrvutiasetsevast ruudust koosneval ribal järgmist mängu. Algul on riba keskmisel ruudul üks nupp. Igal käigul ütleb Albert ühe 5-st väiksema positiivse täisarvu ning Brita nihutab nuppu vastava arvu ruutude võrra oma valitud suunas — seejuures ei tohi aga Brita nihutada nuppu ühes suunas rohkem kui kaks korda järjest. Tõesta, et Albert saab öelda arve nii, et hiljemalt 19. käigul on Brita sunnitud nupuga ribalt välja käima.

3. Olgu K, L ja M vastavalt kolmnurga ABC tippudest A, B ja C tõmmatud kõrguste aluspunktid. Tõesta, et $\overrightarrow{AK}+\overrightarrow{BL}+\overrightarrow{CM}=\overrightarrow{0}$ siis ja ainult siis, kui kolmnurk ABC on võrdkülgne.

4. Olgu a, b ja c sellised positiivsed reaalarvud, et $a^2+b^2+c^2=3$. Tõesta, et kehtib võrratus

$$\frac{1}{1+2ab}+\frac{1}{1+2bc}+\frac{1}{1+2ca}\geqslant 1\,.$$

5. Olgu n ja c ühistegurita positiivsed täisarvud. Mistahes täisarvu i korral tähistagu i' korrutise ci jagamisel n-ga tekkivat jääki. Olgu $A_0A_1\ldots A_{n-1}$ korrapärane n-nurk. Tõesta, et
   a) kui lõigud A_iA_j ja A_kA_l on paralleelsed, siis lõigud $A_{i'}A_{j'}$ ja $A_{k'}A_{l'}$ on samuti paralleelsed;
   b) kui lõigud A_iA_j ja A_kA_l on risti, siis lõigud $A_{i'}A_{j'}$ ja $A_{k'}A_{l'}$ on samuti risti.

LI Олимпиада по точным наукам учащихся Эстонии

Заключительный тур по МАТЕМАТИКЕ

Тарту, 3 апреля 2004 г.

IX класс

Время, отводимое для решения: 5 часов.
Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи дает 7 баллов.
Пользоваться калькулятором не разрешается.

1. Найти все пары (x, y) действительных чисел, для которых

$$\frac{x+6}{y} + \frac{13}{xy} = \frac{4-y}{x} .$$

2. Все положительные разности $a_i - a_j$ пяти разнличных положительных целых чисел a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 (таких разностей всего 10) различны. Найти наименьшее возможное значение наибольшего из чисел a_i.

3. На сторонах AB и BC выпуклого четырехугольника $ABCD$ берут соответственно точки M и N так, что каждый из отрезков AN и CM делит четырехугольник $ABCD$ на две равные по площади части. Доказать, что отрезки MN и AC параллельны.

4. Доказать, что число $n^n - n$ делится на 24 при любом нечетном натуральном числе n.

5. Три различные окружности одинакового радиуса пересекаются в точке Q. Окружность $\mathcal{C}$ касается их всех. Доказать, что Q является центром окружности $\mathcal{C}$.

LI Олимпиада по точным наукам учащихся Эстонии

Заключительный тур по МАТЕМАТИКЕ

Тарту, 3 апреля 2004 г.

X класс

Время, отводимое для решения: 5 часов.
Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи дает 7 баллов.
Пользоваться калькулятором не разрешается.

1. Найти все такие тройки (x, y, z) положительных целых чисел, для которых $x < y < z$, $\text{НОД}(x, y) = 6$, $\text{НОД}(y, z) = 10$, $\text{НОД}(z, x) = 8$ и $\text{НОК}(x, y, z) = 2400$.

2. На сторонах BC и AB параллелограмма $ABCD$ берут соответственно точки M и N так, что $|AM| = |CN|$. Пусть P точка пересечения отрезков AM и CN. Доказать, что биссектриса угла APC проходит через вершину D.

3. Учитель написал на доске число, состоящее из некоторого количества цифр 4 и такого же количества следующих за ними цифр 8. В этот момент прозвенел звонок. На перемене Коля подошел к доске и приписал в начале числа еще одну цифру 4, а в конце числа цифру 9. Доказать, что полученное число является квадратом некоторого целого числа.

4. В начале в точке $(0,0)$ написано число 1, а во всех других точках плоскости, имеющих целочисленные координаты, написано число 0. Каждую секунду все эти числа изменяют, записывая в каждой точке плоскости с целочисленными координатами сумму чисел, находившихся в предыдущую секунду в четырех соседних к ней точках. Найти сумму чисел, находяшихся во всех точках с целочисленными координатами, через n секунд.

5. Действительные числа a, b и c удовлетворяют равенствам $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ и $a^3 + b^3 + c^3 = 1$. Найти значение суммы $a + b + c$.

LI Олимпиада по точным наукам учащихся Эстонии

Заключительный тур по МАТЕМАТИКЕ

Тарту, 3 апреля 2004 г.

XI класс

Время, отводимое для решения: 5 часов.
Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи дает 7 баллов.
Пользоваться калькулятором не разрешается.

1. Найти все такие пары (a, b) целых чисел, что $a^2 + ab + b^2 = 1$.

2. Через выбранную на биссектрисе угла AOB точку M проводят прямую, которая пересекает стороны угла OA и OB соответственно в точках K и L. Доказать, что значение суммы $\frac{1}{|OK|} + \frac{1}{|OL|}$ не зависит от выбора прямой, проходящей через точку M, т.е. определено величиной угла AOB и выбором точки M на биссектрисе.

3. Из 25 точек плоскости, обе координаты которых являются целыми числами из множества $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$, отмечают некоторые 17 точек. Доказать, что найдутся такие три отмеченные точки, что одна из них является серединой отрезка, соединяющего остальные две точки.

4. Найти все функции $f(x)$, которые определены для неотрицательных действительных чисел x, принимают неотрицательные действительные значения и при любых неотрицательных действительных числах x и y удовлетворяют условию

$$x \cdot f(y) + y \cdot f(x) = f(x) \cdot f(y) \cdot \big(f(x) + f(y)\big) .$$

5. Алфавит языка BAU состоит из трех букв B, A и U. Известно, что начиная с любого n-буквенного слова языка BAU и повторно применяя следующие правила (1) и (2), получим все n-буквенные слова языка BAU и только они:

   (1) запишем все буквы слова в противоположном порядке;

   (2) заменим две расположенные рядом буквы: BA $\to$ UU, AU $\to$ BB, UB $\to$ AA, UU $\to$ BA, BB $\to$ AU или AA $\to$ UB.

   Если BBAUABAUUABAUUUABAUUUUABB является словом языка BAU, найдется ли в языке BAU слово

   а) BUABUABUABUABAUBAUBAUBAUB;

   б) ABUABUABUABUAUBAUBAUBAUBA?

LI Олимпиада по точным наукам учащихся Эстонии

Заключительный тур по МАТЕМАТИКЕ

Тарту, 3 апреля 2004 г.

XII класс

Время, отводимое для решения: 5 часов.
Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи дает 7 баллов.
Пользоваться калькулятором не разрешается.

1. Внутри круга берут точку K так, что проведенный из точки K через центр окружности O луч и перпендикулярная этому лучу хорда, проходящая через точку K, делят круг на три равные по площади части. Пусть L один конец рассматриваемой хорды. Выполняется ли неравенство $\angle KOL < 75^\circ$?

2. Альберт и Брита играют на полосе, состоящей из 19 стоящих в ряд клеток, в следующую игру. В начале на центральной клетке полосы находится одна фишка. На каждом ходу Альберт называет некоторое положительное целое число меньше 5-ти, а Брита передвигает фишку на соответствующее число клеток в выбранном ею направлении — при этом Брита не может передвигать фишку в одном направлении более двух раз подряд. Доказать, что Альберт может называть числа так, что не позже чем на 19-м ходу Брита будет вынуждена выйти фишкой за пределы полосы.

3. Пусть K, L и M — основания высот, проведенных соответственно из вершин A, B и C треугольника ABC. Доказать, что $\overrightarrow{AK}+\overrightarrow{BL}+\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{0}$ тогда и только тогда, когда треугольник ABC равносторонний.

4. Пусть a, b и c такие положительные действительные числа, что $a^2+b^2+c^2=3$. Доказать, что выполняется неравенство

$$\frac{1}{1+2ab}+\frac{1}{1+2bc}+\frac{1}{1+2ca} \geqslant 1\,.$$

5. Пусть n и c взаимно простые положительные целые числа. Для любого целого числа i обозначим через i' остаток, возникающий при делении произведения ci на n. Пусть $A_0A_1\ldots A_{n-1}$ правильный n-угольник. Доказать, что
   а) если отрезки A_iA_j и A_kA_l параллельны, то отрезки $A_{i'}A_{j'}$ и $A_{k'}A_{l'}$ также параллельны;
   б) если отрезки A_iA_j и A_kA_l перпендикулярны, то отрезки $A_{i'}A_{j'}$ и $A_{k'}A_{l'}$ также перпендикулярны.

Eesti koolinoorte LI täppisteaduste olümpiaadi

lõppvoor MATEMAATIKAS

Tartus, 3. aprillil 2004. a.

Lahendused ja vastused

IX klass

1. *Vastus:* $x = -3$, $y = 2$.
   Korrutades antud võrduse kõik liikmed läbi teguriga xy, saame

   $$(x+6)\cdot x + 13 = (4-y)\cdot y$$

   ehk

   $$x^2 + 6x + y^2 - 4y + 13 = 0\ .$$

   Paneme tähele, et vasaku poole saab siin esitada ruutude summana:

   $$(x+3)^2 + (y-2)^2 = 0\ ,$$

   kust $x + 3 = 0$ ja $y - 2 = 0$, ehk $x = -3$ ja $y = 2$.

2. *Vastus:* 12.
   Lahendus 1. Olgu vaadeldavad arvud $a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < a_5$. Kuna 10 positiivset vahet $a_i - a_j$ on kõik erinevad, siis suurim neist vahedest $a_5 - a_1$ peab olema vähemalt 10, kust $a_5 \geqslant 11$. Kui aga oleks $a_5 = 11$, siis peaksid need vahed olema parajasti $1, 2, \ldots, 10$ ning peaks kehtima võrdus

   $$\begin{aligned}(a_5 - a_4) + (a_5 - a_3) + (a_5 - a_2) + (a_5 - a_1) + \\ + (a_4 - a_3) + (a_4 - a_2) + (a_4 - a_1) + \\ + (a_3 - a_2) + (a_3 - a_1) + \\ + (a_2 - a_1) = \\ = 4a_5 + 2a_4 - 2a_2 - 4a_1 = 1 + 2 + \ldots + 10 = 55\ .\end{aligned}$$

   See ei ole aga võimalik, sest $4a_5 + 2a_4 - 2a_2 - 4a_1$ on paarisarv.

Niisiis peab suurim antud arvudest olema vähemalt 12. Sobivateks arvudeks on näiteks $1, 3, 8, 11, 12$ (vaadeldavad vahed on siis $1 = 12 - 11$, $2 = 3 - 1$, $3 = 11 - 8$, $4 = 12 - 8$, $5 = 8 - 3$, $7 = 8 - 1$, $8 = 11 - 3$, $9 = 12 - 3$, $10 = 11 - 1$ ja $11 = 12 - 1$).

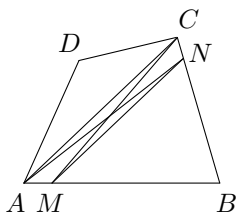
Lahendus 2. Samuti nagu esimeses lahenduses veendume, et 12 jaoks on sobiv näide olemas, ning paneme tähele, et kui suurim arvudest a_i on 11, siis peavad vaadeldavad vahed olema $1, 2, \ldots, 10$. Järelikult sel juhul neist vahedest täpselt 5 on paaritud. Olgu arvude a_i seas x paaritut ja y paarisarvu. Kahe arvu vahe on paaritu parajasti siis, kui need arvud on erineva paarsusega, s.t. üks neist on paaritu ja teine paaris. Kuna paaritu arvu valikuks on x võimalust ning iga valitud paaritu arvu korral on paarisarvu valikuks y võimalust, on erineva paarsusega arvude paari valikuks täpselt xy võimalust. Seega on ka antud arvude paarituid vahesid kokku parajasti xy ning x ja y peavad järelikult rahuldama võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ xy = 5 \end{cases},$$

millel aga puuduvad naturaalarvulised lahendid.

3. Vastavalt konstruktsioonile on punktid M ja N diagonaaliga AC määratud sirgest ühel ja samal pool (vt. joonist 1). Seega piisab tõestada, et nad on sirgest AC võrdsel kaugusel, s.t. kolmnurkade AMC ja ANC tippudest M ja N tõmmatud kõrgused on võrdsed. Selleks näitame, et kolmnurkade AMC ja ANC pindalad on võrdsed. Tõepoolest,

$$\begin{aligned} S_{AMC} &= S_{ABC} - S_{MBC} = S_{ABC} - \frac{1}{2} S_{ABCD} = \\ &= S_{ABC} - S_{ABN} = S_{ANC} \,. \end{aligned}$$



Joonis 1

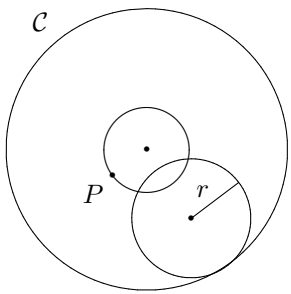
4. Olgu $n = 2k+1$, siis $n^n - n = n^{2k+1} - n = n(n^{2k}-1)$. Näitame, et korrutis $n(n^{2k}-1)$ jagub mistahes paaritu arvu n korral 8-ga ja 3-ga.

   Paneme tähele, et $n^{2k}-1 = (n^k-1)(n^k+1)$ ning kuna n on paaritu, siis n^k-1 ja n^k+1 on kaks järjestikust paarisarvu. Üks neist arvudest jagub niisiis kindlasti 4-ga ning nende korrutis $n^{2k}-1$ jagub 8-ga.

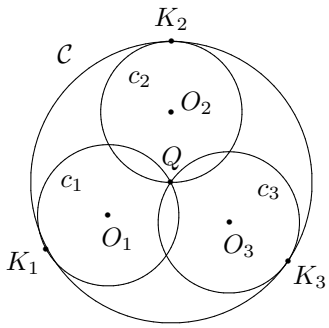
   Kui n jagub 3-ga, siis ilmselt ka $n(n^{2k}-1)$ jagub 3-ga. Kui n ei jagu 3-ga, siis n^k ei jagu 3-ga ning üks arvudest n^k-1 ja n^k+1 jagub 3-ga, mistõttu sel juhul $n^{2k}-1 = (n^k-1)(n^k+1)$ jagub 3-ga.

5. *Lahendus 1.* Vaatleme ringjoone $\mathcal{C}$ sees suvalist punkti P, mis ei ole selle ringjoone keskpunkt. Näitame, et fikseeritud raadiuse r korral leiduvad ülimalt kaks ringjoont raadiusega r, mis puutuvad ringjoont $\mathcal{C}$ seestpoolt ja läbivad punkti P. Selleks veeretame ringjoont raadiusega r seespool mööda ringjoont $\mathcal{C}$; ilmselt läbib veeretatav ringjoon punkti P mitte rohkem kui kahes asendis (ehk samaväärselt: mistahes ringjoont $\mathcal{C}$ seestpoolt puutuval fikseeritud ringjoonel on ülimalt kaks ühist punkti sellise ringjoonega, mille keskpunkt on ringjoone $\mathcal{C}$ keskpunktis ja mis läbib punkti P — vt. joonist 2). Seega ei saa üksi niisugune punkt P olla kolme erineva võrdse raadiusega ringjoone lõikepunktiks, mis kõik puutuvad ringjoont $\mathcal{C}$.

   Märkus. Ringjoone $\mathcal{C}$ keskpunkt sobib punkti Q rolli, sest mistahes ringjoont $\mathcal{C}$ seestpoolt puutuv ringjoon, mille raadius on pool ringjoone $\mathcal{C}$ raadiusest, läbib ringjoone $\mathcal{C}$ keskpunkti ning võime valida suvalised kolm sellist ringjoont.



Joonis 2



Joonis 3

Lahendus 2. Olgu väiksemad ringjooned c_1, c_2 ja c_3 keskpunktidega O_1, O_2 ja O_3 ning olgu K_1, K_2 ja K_3 vastavalt nende puutepunktid ringjoonega $\mathcal{C}$ (vt. joonist 3). Olgu ringjoone $\mathcal{C}$ keskpunkt O. Iga $i = 1, 2, 3$ korral asuvad punktid K_i, O_i ja O ühel sirgel (sest ringjoontel c_i ja $\mathcal{C}$ on punktis K_i ühine puutuja, mis on risti nende raadiustega K_iO_i ja K_iO). Et ilmselt $|OK_1| = |OK_2| = |OK_3|$ ning ringjoonte c_i raadiuste võrdsuse tõttu $|O_1K_1| = |O_2K_2| = |O_3K_3|$, siis $|O_1O| = |O_2O| = |O_3O|$. Samas aga ringjoonte c_i raadiuste võrdsuse tõttu ka $|O_1Q| = |O_2Q| = |O_3Q|$. Seega punktid O ja Q langevad kokku (kumbki neist on kolmnurga $O_1O_2O_3$ ümberringjoone keskpunkt).

Lahendus 3. Olgu väiksemate ringjoonte c_1, c_2 ja c_3 ühine raadius r. Vaatleme ringjoont $\mathcal{C}_1$, mille keskpunkt on väiksemate ringjoonte ühises punktis Q ning raadius on $2r$. Et iga väiksema ringjoone c_i punktist Q kaugeim punkt K_i on selle ringjoone punktist Q tõmmatud diameetri teine otspunkt, siis asuvad need punktid K_i punktist Q parajasti kaugusel $2r$, s.t. ringjoon $\mathcal{C}$ puutub iga ringjoont c_i vastavas punktis K_i. Et kõiki kolme ringjoont c_1, c_2 ja c_3 puutuvaid ringjooni saab olla ülimalt üks, siis $\mathcal{C}_1 = \mathcal{C}$, s.t. Q on ringjoone $\mathcal{C}$ keskpunkt.

X klass

1. *Vastus:* (24, 30, 800) ja (24, 150, 160).

   Lahendus 1. Et arv x jagub nii 6-ga kui 8-ga, siis ta jagub arvuga $\text{VÜK}\,(6,8) = 24$. Analoogiliselt y jagub arvuga $\text{VÜK}\,(6,10) = 30$ ning z jagub arvuga $\text{VÜK}\,(10,8) = 40$. Seega leiduvad sellised positiivsed täisarvud x', y', z', et $x = 24x'$, $y = 30y'$ ja $z = 40z'$, ning

$$\begin{aligned} 6 &= \text{SÜT}\,(x,y) = \text{SÜT}\,(24x',30y') = 6\cdot\text{SÜT}\,(4x',5y')\,, \\ 10 &= \text{SÜT}\,(y,z) = \text{SÜT}\,(30y',40z') = 10\cdot\text{SÜT}\,(3y',4z')\,, \\ 8 &= \text{SÜT}\,(z,x) = \text{SÜT}\,(40z',24x') = 8\cdot\text{SÜT}\,(5z',3x')\,. \end{aligned}$$

   Neist võrdustest järeldub, et $\text{SÜT}\,(4x',5y') = 1$, $\text{SÜT}\,(3y',4z') = 1$ ja $\text{SÜT}\,(5z',3x') = 1$. Siit näeme, et arvud x', y', z' on paarikaupa ühistegurita ning $\text{SÜT}\,(x',5) = 1$, $\text{SÜT}\,(y',4) = 1$ ja $\text{SÜT}\,(z',3) = 1$. Näitame nüüd, et $\text{VÜK}\,(24x',30y',40z') = \text{VÜK}\,(120x',120y',120z')$. Selleks veendume, et võrduse kumbki pool jagub teisega. Võrduse parem pool ilmselt jagub vasakuga — kuna parem pool jagub arvudega

$120x'$, $120y'$, $120z'$, siis ammugi jagub ta arvudega $24x'$, $30y'$, $40z'$ ning järelikult ka viimaste vähima ühiskordsega. Näitame nüüd, et vasak pool jagub arvudega $120x'$, $120y'$, $120z'$ ning järelikult ka arvuga $\text{VÜK}\,(120x', 120y', 120z')$. Tõepoolest, vasak pool jagub arvudega $24x'$ ja 5 ning kuna $\text{SÜT}\,(x', 5) = 1$, siis ka $\text{SÜT}\,(24x', 5) = 1$ ning vasak pool jagub arvuga $24x' \cdot 5 = 120x'$. Analoogiliselt näitame, et vasak pool jagub ka arvudega $120y'$ ja $120z'$. Nüüd saame

$$\begin{aligned} 2400 &= \text{VÜK}\,(x, y, z) = \text{VÜK}\,(24x', 30y', 40z') = \\ &= \text{VÜK}\,(120x', 120y', 120z') = 120 \cdot \text{VÜK}\,(x', y', z') = \\ &= 120 \cdot x'y'z', \end{aligned}$$

kus viimane võrdus tuleneb sellest, et arvud x', y', z' on paarikaupa ühistegurita. Järelikult $x'y'z' = 20$ ning kuna x', y' ja z' on paarikaupa ühistegurita, siis nende väärtusteks saavad olla mingis järjekorras arvud $1, 1, 20$ või arvud $1, 4, 5$. Et aga arvude $x = 24x'$, $y = 30y'$ ja $z = 40z'$ jaoks kehtiks tingimus $x < y < z$, siis peab esimesel juhul olema $x' = 1$, $y' = 1$ ja $z' = 20$, teisel juhul aga on kaks võimalust: $x' = 1$, $y' = 4$, $z' = 5$ või $x' = 1$, $y' = 5$, $z' = 4$. Neile võimalustele vastavad arvukolmikud (x, y, z) on vastavalt $(24, 30, 800)$, $(24, 120, 200)$ ja $(24, 150, 160)$. Vahetu kontroll näitab, et esimene ja kolmas arvukolmik rahuldavad ülesande tingimusi, teine kolmik aga ei sobi, sest arvude $y = 120$ ja $z = 200$ suurim ühistegur on siin 10 asemel 40.

Lahendus 2. Olgu d kolme arvu x, y, z suurim ühistegur. Siis neist arvudest mistahes paari suurim ühistegur jagub d-ga, seega $\text{SÜT}\,(x, y) = d \cdot p$, $\text{SÜT}\,(y, z) = d \cdot q$ ja $\text{SÜT}\,(z, x) = d \cdot r$, kus p, q, r on mingid paarikaupa ühistegurita positiivsed täisarvud (tõepoolest, kui nt. arvudel p ja q oleks ühine tegur $s > 1$, siis oleks $d \cdot s$ arvude x, y, z ühine tegur, mis oleks vastuolus d valikuga). Näitame, et arvud x, y, z esituvad kujul

$$x = d \cdot p \cdot r \cdot x'; \quad y = d \cdot p \cdot q \cdot y'; \quad z = d \cdot q \cdot r \cdot z' ,$$

kus x', y', z' on jällegi mingid paarikaupa ühistegurita positiivsed täisarvud. Tõepoolest, kuna arv x jagub arvudega $d \cdot p$ ja $d \cdot r$, siis $\dfrac{x}{d}$ jagub ühistegurita arvudega p ja r ning seega jagub arvuga $p \cdot r$. Seega x jagub arvuga $d \cdot p \cdot r$, s.t. esitub kujul $x = d \cdot p \cdot r \cdot x'$; analoogiliselt

saame esitada ka y ja z. Kui nüüd nt. arvudel x' ja y' oleks ühine tegur $t > 1$, siis oleks $d \cdot p \cdot t$ arvude x ja y ühine tegur, mis oleks vastuolus p valikuga.

Näitame nüüd, et $\text{VÜK}\,(x, y, z) = d \cdot pqr \cdot x'y'z'$. Tõepoolest, kuna $\text{SÜT}\,(x, y) = dp$, $x = dp \cdot rx'$ ja $y = dp \cdot qy'$, siis $\text{VÜK}\,(x, y) = dp \cdot rx' \cdot qy' = dqr \cdot px'y'$. Kuna $\text{VÜK}\,(x, y, z)$ jagub arvudega $\text{VÜK}\,(x, y) = dqr \cdot px'y'$ ja $z = dqr \cdot z'$, siis $\dfrac{\text{VÜK}\,(x, y, z)}{dqr}$ jagub arvudega $px'y'$ ja z'. Seejuures $px'y'$ ja z' on ühistegurita — eespool näitasime, et x', y', z' on paarikaupa ühistegurita, ning kui arvudel p ja z' oleks ühine tegur $u > 1$, siis oleks $d \cdot u$ arvude x, y, z ühine tegur, mis oleks vastuolus d valikuga. Niisiis $\dfrac{\text{VÜK}\,(x, y, z)}{dqr}$ jagub korrutisega $px'y'z'$ ning $\text{VÜK}\,(x, y, z)$ jagub arvuga $dqr \cdot px'y'z' = d \cdot pqr \cdot x'y'z'$. Et samas $d \cdot pqr \cdot x'y'z'$ on arvude x, y ja z ühine kordne, siis $\text{VÜK}\,(x, y, z) = d \cdot pqr \cdot x'y'z'$.

Ülesande tingimustest saame, et $d = \text{SÜT}\,(6,\ 8,\ 10) = 2$ ning $p = 3$, $q = 5$ ja $r = 4$. Seega

$$\begin{aligned} \text{VÜK}\,(x, y, z) &= d \cdot pqr \cdot x'y'z' = \\ &= 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 4 \cdot x'y'z' = 2400\,. \end{aligned}$$

Siit leiame, et $x'y'z' = 20$. Edasi arutleme samuti nagu esimeses lahenduses.

Lahendus 3. Tähistagu $p \triangleright a$ algarvu p astendajat arvu a esituses algarvude astmete korrutisena. Uurime kõigepealt algarvu 2 astendajaid: ülesande tingimustest saame

$$\min(2 \triangleright x, 2 \triangleright y) = 2 \triangleright 6 = 1\,, \tag{1}$$

$$\min(2 \triangleright x, 2 \triangleright z) = 2 \triangleright 8 = 3\,, \tag{2}$$

$$\max(2 \triangleright x, 2 \triangleright y, 2 \triangleright z) = 2 \triangleright 2400 = 5\,. \tag{3}$$

Võrdusest (2) saame, et $2 \triangleright z \geqslant 3$ ja $2 \triangleright x \geqslant 3$. Võrdusest (1) saame nüüd, et $2 \triangleright y = 1$, ning võrdustest (2) ja (3) leiame, et üks astendajaist $2 \triangleright x$ ja $2 \triangleright z$ peab olema 3 ja teine 5. Kokkuvõttes saime niisiis kaks

võimalust:

$$\begin{cases} 2 \triangleright x = 3 \\ 2 \triangleright y = 1 \\ 2 \triangleright z = 5 \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} 2 \triangleright x = 5 \\ 2 \triangleright y = 1 \\ 2 \triangleright z = 3 \end{cases} \quad . \tag{4}$$

Vaatleme nüüd algarvu 3 astendajaid:

$$\min(3 \triangleright x, 3 \triangleright y) = 3 \triangleright 6 = 1 \ , \tag{5}$$

$$\min(3 \triangleright x, 3 \triangleright z) = 3 \triangleright 8 = 0 \ , \tag{6}$$

$$\max(3 \triangleright x, 3 \triangleright y, 3 \triangleright z) = 3 \triangleright 2400 = 1 \ . \tag{7}$$

Võrdusest (5) ja (7) saame, et $3 \triangleright x = 3 \triangleright y = 1$, ning võrdusest (6), et $3 \triangleright z = 0$. Niisiis

$$\begin{cases} 3 \triangleright x = 1 \\ 3 \triangleright y = 1 \\ 3 \triangleright z = 0 \end{cases} \quad . \tag{8}$$

Uurime lõpuks algarvu 5 astendajaid:

$$\min(5 \triangleright x, 5 \triangleright y) = 5 \triangleright 6 = 0 \ , \tag{9}$$

$$\min(5 \triangleright y, 5 \triangleright z) = 5 \triangleright 10 = 1 \ , \tag{10}$$

$$\max(5 \triangleright x, 5 \triangleright y, 5 \triangleright z) = 5 \triangleright 2400 = 2 \ . \tag{11}$$

Võrdusest (10) saame, et $5 \triangleright y \geqslant 1$ ja $5 \triangleright z \geqslant 1$. Võrdusest (9) saame nüüd, et $5 \triangleright x = 0$, ning võrdustest (10) ja (11) leiame, et üks astendajaist $5 \triangleright y$ ja $5 \triangleright z$ peab olema 1 ja teine 2. Kokkuvõttes saime jällegi kaks võimalust:

$$\begin{cases} 5 \triangleright x = 0 \\ 5 \triangleright y = 1 \\ 5 \triangleright z = 2 \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} 5 \triangleright x = 0 \\ 5 \triangleright y = 2 \\ 5 \triangleright z = 1 \end{cases} \quad . \tag{12}$$

Kuna arvude x, y, z vähim ühiskordne 2400 ülejäänud algarvudega ei jagu, ei jagu ka ükski arvudest x, y, z nendega. Tingimustest (4), (8) ja (12) saame nüüd kokku neli võimalust:

$$\begin{cases} x = 2^3 \cdot 3^1 \cdot 5^0 = 24 \\ y = 2^1 \cdot 3^1 \cdot 5^1 = 30 \\ z = 2^5 \cdot 3^0 \cdot 5^2 = 800 \end{cases} , \quad \begin{cases} x = 2^3 \cdot 3^1 \cdot 5^0 = 24 \\ y = 2^1 \cdot 3^1 \cdot 5^2 = 150 \\ z = 2^5 \cdot 3^0 \cdot 5^1 = 160 \end{cases} ,$$

$$\begin{cases} x = 2^5 \cdot 3^1 \cdot 5^0 = 96 \\ y = 2^1 \cdot 3^1 \cdot 5^1 = 30 \\ z = 2^3 \cdot 3^0 \cdot 5^2 = 200 \end{cases} , \quad \begin{cases} x = 2^5 \cdot 3^1 \cdot 5^0 = 96 \\ y = 2^1 \cdot 3^1 \cdot 5^2 = 150 \\ z = 2^3 \cdot 3^0 \cdot 5^1 = 40 \end{cases} .$$

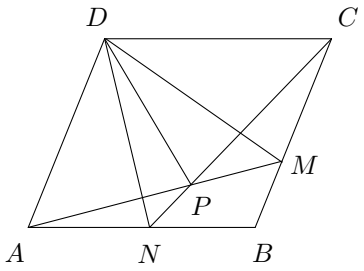
Kontroll näitab, et need kõik rahuldavad ülejäänud ülesande tingimusi peale selle, et $x < y < z$. Kuna $x < y < z$, siis jäävad järele kaks esimest võimalust.

2. Tõestamaks, et punkt paikneb nurgapoolitajal, piisab näidata, et see punkt on vaadeldava nurga haaradest võrdsel kaugusel. Niisiis on meil vaja näidata, et punkt D paikneb võrdsel kaugusel sirgetest AM ja CN (vt. joonist 4).

   Paneme tähele, et kolmnurkade AMD ja DNC pindalad on võrdsed:

$$S_{AMD} = \frac{1}{2} S_{ABCD} = S_{DNC} \ ,$$

   sest kummagi kolmnurga aluseks on rööpküliku $ABCD$ külg ja kõrguseks sellele küljele tõmmatud rööpküliku kõrgus. Et nende kolmnurkade küljed AM ja CN on võrdse pikkusega, siis peavad olema võrdse pikkusega ka neile külgedele tipust D tõmmatud kõrgused. See aga tähendabki, et punkt D on sirgetest AM ja CN võrdsel kaugusel.



Joonis 4

3. *Lahendus 1.* Paneme tähele, et $49 = 7^2$, $4489 = 67^2$, $444889 = 667^2$. Näitame, et

$$\underbrace{44\ldots4}_{n}\underbrace{88\ldots8}_{n-1}9 = \underbrace{66\ldots6}_{n-1}7^2 \ .$$

   Tõepoolest, $6 \cdot \underbrace{66\ldots6}_{n-1}8 = 4\underbrace{00\ldots0}_{n-1}8$ ning seega

$$\underbrace{66\ldots6}_{n-1}7^2 - 1 = \underbrace{66\ldots6}_{n} \cdot \underbrace{66\ldots6}_{n-1}8 =$$

$$= \underbrace{11\ldots1}_{n} \cdot 4\underbrace{00\ldots0}_{n-1}8 =$$
$$= \underbrace{44\ldots4}_{n}\underbrace{88\ldots8}_{n} \ .$$

Lahendus 2. Tõestame induktsiooniga n järgi, et

$$\underbrace{66\ldots6}_{n-1}7^2 = \underbrace{44\ldots4}_{n}\underbrace{88\ldots8}_{n-1}9 \ .$$

Tõepoolest, $n = 1$ korral $7^2 = 49$. Eeldame nüüd, et $n-1$ jaoks väide kehtib, ning kontrollime, et see kehtib siis ka n korral:

$$\begin{aligned}
\underbrace{66\ldots6}_{n}7^2 &= (\underbrace{66\ldots6}_{n-1}70-3)^2 = \\
&= (10 \cdot \underbrace{66\ldots6}_{n-1}7-3)^2 = \\
&= 100 \cdot \underbrace{44\ldots4}_{n}\underbrace{88\ldots8}_{n-1}9 - 60 \cdot \underbrace{66\ldots6}_{n-1}7 + 9 = \\
&= \underbrace{44\ldots4}_{n}\underbrace{88\ldots8}_{n-1}909 - 4\underbrace{00\ldots0}_{n-1}20 = \\
&= \underbrace{44\ldots4}_{n+1}\underbrace{88\ldots8}_{n}9 \ .
\end{aligned}$$

Lahendus 3. Olgu

$$x = \underbrace{11\ldots1}_{n} = \frac{1}{9} \cdot \underbrace{99\ldots9}_{n} = \frac{1}{9} \cdot (10^n - 1) \ .$$

Siis $10^n = 9x + 1$ ning

$$\begin{aligned}
\underbrace{44\ldots4}_{n}\underbrace{88\ldots8}_{n-1}9 &= \underbrace{44\ldots4}_{n} \cdot 10^n + \underbrace{88\ldots8}_{n} + 1 = \\
&= 4x \cdot 10^n + 8x + 1 = \\
&= 4x(9x+1) + 8x + 1 = \\
&= 36x^2 + 12x + 1 = (6x+1)^2 \ .
\end{aligned}$$

Lahendus 4. Paneme tähele, et

$$\begin{aligned}\underbrace{44\ldots4}_{n}\underbrace{88\ldots8}_{n-1}9 &= \underbrace{44\ldots4}_{2n},(4)+\underbrace{44\ldots4}_{n},(4)+0,(1)=\\ &= 10^{2n}\cdot\frac{4}{9}+10^{n}\cdot\frac{4}{9}+\frac{1}{9}=\\ &= \left(10^{n}\cdot\frac{2}{3}\right)^{2}+2\cdot10^{n}\cdot\frac{2}{9}+\frac{1}{9}=\\ &= \left(10^{n}\cdot\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\right)^{2}.\end{aligned}$$

Kuna $10^n\cdot\frac{2}{3}+\frac{1}{3}=\frac{10^n\cdot2+1}{3}$ ning $10^n\cdot2+1$ jagub 3-ga, siis on tegemist esitusega täisarvu ruuduna.

Lahendus 5. Korrutades arvu $\underbrace{44\ldots4}_{n}\underbrace{88\ldots8}_{n-1}9$ arvuga $3^2=9$, saame

$$9\cdot\underbrace{44\ldots4}_{n}\underbrace{88\ldots8}_{n-1}9=4\underbrace{00\ldots0}_{n-1}4\underbrace{00\ldots0}_{n-1}1=2\underbrace{00\ldots0}_{n-1}1^2\,.$$

Seega $\underbrace{44\ldots4}_{n}\underbrace{88\ldots8}_{n-1}9=\left(\frac{2\overbrace{00\ldots0}^{n-1}1}{3}\right)^2=\underbrace{66\ldots6}_{n-1}7^2$.

4. *Vastus:* 4^n.

   Alghetkel on kõigis tasandi täisarvuliste koordinaatidega punktides olevate arvude kogusumma $1=4^0$. Iga järgmise sekundi arvude kogusummasse annab eelmise sekundi iga arv x panuse $4x$, seega suureneb arvude kogusumma igal sammul 4 korda, andes n sekundi järel tulemuseks 4^n.

5. *Vastus:* 1.

   Kuna $a^2+b^2+c^2=1$, siis $-1\leqslant a,\,b,\,c\leqslant1$. Sel juhul aga $a^2\geqslant a^3$, $b^2\geqslant b^3$ ja $c^2\geqslant c^3$. Kuna $a^2+b^2+c^2=a^3+b^3+c^3$, siis peavad kõigis kolmes võrratuses tegelikult kehtima võrdused: $a^2=a^3$, $b^2=b^3$ ja $c^2=c^3$. Järelikult a, b, c saavad olla vaid 0 või 1, ning võrduse $a^2+b^2+c^2=1$ tõttu peavad täpselt kaks neist olema 0 ja kolmas 1.

Ülesande tingimusi rahuldavad seega kolmikud $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ ja $(0,0,1)$; igal juhul saame $a+b+c=1$.

XI klass

1. *Vastus:* $(1,0)$, $(-1,0)$, $(0,1)$, $(0,-1)$, $(1,-1)$, $(-1,1)$.
Lahendus 1. Võrdus $a^2+ab+b^2=1$ on samaväärne sellega, et

$$2(a^2+ab+b^2)=a^2+b^2+(a+b)^2=2\,.$$

Seega peab üks arvudest a, b ja $a+b$ olema 0 ning kaks ülejäänut 1 või -1. Siit leiame kergesti kõik sobivad paarid $(a,\,b)$.

Lahendus 2. Et $a^2+b^2-2ab=(a-b)^2\geqslant 0$, $a^2+b^2+2ab=(a+b)^2\geqslant 0$, siis $|ab|\leqslant \frac{1}{2}(a^2+b^2)$. Võrdusest $a^2+ab+b^2=1$ saame nüüd, et $a^2+b^2\leqslant 2$, s.t. a ja b väärtused peavad olema hulgast $\{0,\,1,\,-1\}$. Edasi näeme, et kui $|a|=|b|=1$, siis peab olema $ab=-1$, s.t. $a=-b$, ning kui üks arvudest a, b on 0, siis teine peab olema 1 või -1. Neid tingimusi arvestades leiame kõik sobivad paarid.

Lahendus 3. Paneme tähele, et kui $a=b$, siis saame võrrandi $3a^2=1$, millel täisarvulised lahendid puuduvad. Seega igas sobivas paaris (a,b) peab olema $a\neq b$.
Lahutades antud võrduse mõlemast poolest ab, saame $a^2+b^2=1-ab$, millest $1-ab\geqslant 0$ ehk $ab\leqslant 1$. Liites antud võrduse mõlemale poole ab, saame $(a+b)^2=1+ab$, kust $ab\geqslant -1$. Niisiis $|ab|\leqslant 1$, s.t. a ja b väärtused peavad olema hulgast $\{0,\,1,\,-1\}$. Jääb üle kontrollida, et kõik sellised paarid $(a,\,b)$, kus täiendavalt $a\neq b$, ka sobivad.

Lahendus 4. Samuti nagu eelmises lahenduses leiame, et $a\neq b$. Korrutades antud võrduse pooled läbi teguriga $a-b\neq 0$, saame niisiis samaväärse tingimuse

$$a^3-b^3=a-b\,.$$

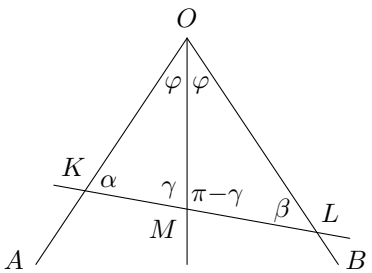
Selle võrduse saame kirjutada kujul $a^3-a=b^3-b$ ehk

$$a(a-1)(a+1)=b(b-1)(b+1)\,.$$

Tähistame $f(n) = n(n-1)(n+1)$, siis nõutav võrdus omandab kuju $f(a) = f(b)$. On ilmne, et piirkonnas $n > 1$ on f rangelt kasvav. Samuti näeme, et $f(-n) = -f(n)$, seega ka $n < -1$ korral on f rangelt kasvav ning piirkondades $n < -1$ ja $n > 1$ on f väärtused erineva märgiga. Kokkuvõttes on võrdus $f(a) = f(b)$ võimalik ainult siis, kui a ja b väärtused on mõlemad hulgast $\{0, 1, -1\}$. Teisalt, kõigil sellistel juhtudel tõepoolest $f(a) = 0 = f(b)$.

2. *Lahendus 1.* Tähistame $\angle KOM = \angle LOM = \varphi$, $\angle OKM = \alpha$, $\angle OLM = \beta$ ja $\angle OMK = \gamma$, siis $\angle OML = \pi - \gamma$ (vt. joonist 5). Rakendades siinusteoreemi kolmnurgas OKM saame $\dfrac{|OK|}{\sin\gamma} = \dfrac{|OM|}{\sin\alpha}$, kust $\dfrac{1}{|OK|} = \dfrac{1}{|OM|} \cdot \dfrac{\sin\alpha}{\sin\gamma}$. Siinusteoreemist kolmnurgas OLM saame analoogiliselt, et $\dfrac{1}{|OL|} = \dfrac{1}{|OM|} \cdot \dfrac{\sin\beta}{\sin\gamma}$. Niisiis

$$\begin{aligned}
\frac{1}{|OK|} + \frac{1}{|OL|} &= \frac{1}{|OM|} \cdot \frac{\sin\alpha + \sin\beta}{\sin\gamma} = \\
&= \frac{1}{|OM|} \cdot \frac{\sin(\varphi+\gamma) + \sin(\varphi+\pi-\gamma)}{\sin\gamma} = \\
&= \frac{1}{|OM|} \cdot \frac{\sin\varphi\cos\gamma + \cos\varphi\sin\gamma - \sin\varphi\cos\gamma + \cos\varphi\sin\gamma}{\sin\gamma} = \\
&= \frac{1}{|OM|} \cdot 2\cos\varphi\,.
\end{aligned}$$



Joonis 5

Näeme, et summa $\dfrac{1}{|OK|}+\dfrac{1}{|OL|}$ väärtus on üheselt määratud nurgaga $\varphi=\dfrac{\angle AOB}{2}$ ning punkti M kaugusega nurga tipust O, s.t. ei sõltu punkti M läbiva sirge KL valikust.

Lahendus 2. Tähistame nurgad samuti nagu eelmises lahenduses. Siinusteoreemist kolmnurgas OKL leiame, et

$$\frac{|OK|}{\sin\beta}=\frac{|OL|}{\sin\alpha}=\frac{|KL|}{\sin 2\varphi}\ ,$$

kust

$$\frac{1}{|OK|}+\frac{1}{|OL|}=\frac{1}{|KL|}\cdot\left(\frac{\sin 2\varphi}{\sin\beta}+\frac{\sin 2\varphi}{\sin\alpha}\right)\ .$$

Edasi saame siinusteoreemist kolmnurgas OKM, et

$$\frac{1}{\sin\alpha}=\frac{|KM|}{|OM|\sin\varphi}\ ,$$

ning kolmnurgas OLM analoogiliselt

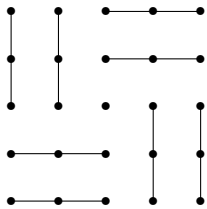
$$\frac{1}{\sin\beta}=\frac{|LM|}{|OM|\sin\varphi}\ .$$

Kokkuvõttes

$$\frac{1}{|OK|}+\frac{1}{|OL|}=\frac{|KM|+|LM|}{|KL|}\cdot\frac{\sin 2\varphi}{|OM|\cdot\sin\varphi}=\frac{2\cos\varphi}{|OM|}\ .$$

3. *Lahendus 1.* Kui punkt $(0,0)$ on märgitud, siis paneme tähele, et ülejäänud punktid jagunevad 12 paariks, kus iga paari punktid on punkti $(0,0)$ suhtes sümmeetrilised, s.t. $(0,0)$ on neid ühendava lõigu keskpunkt. Et lisaks punktile $(0,0)$ on märgitud veel rohkem kui 12 punkti, siis leidub nende 12 paari hulgas selline, mille mõlemad punktid on märgitud.

   Kui punkt $(0,0)$ ei ole märgitud, siis võime ülejäänud 24 punkti jaotada 8 kõrvutiasetsevate punktide kolmikuks (vt. joonist 6). Et märgitud punkte on rohkem kui $2\cdot 8=16$, siis leidub nende kolmikute hulgas selline, mille kõik kolm punkti on märgitud.



Joonis 6

Lahendus 2. Kui punkt $(0,0)$ on märgitud, siis arutleme samuti nagu esimeses lahenduses. Kui punkt $(0,0)$ ei ole märgitud, siis olgu märgitud k punkti $(x,0)$ ja m punkti $(0,y)$ — üldisust kitsendamata võime eeldada, et $k \geqslant m$. Oletame nüüd, et nõutava omadusega punktikolmikut ei leidu. Vaadeldes y-teljega paralleelseid vertikaale näeme, et kui mingil vertikaalil x-teljel paiknev punkt on märgitud, siis saab sellel vertikaalil olla kokku ülimalt 3 märgitud punkti (x-telje suhtes sümmeetrilised punktid ei tohi olla korraga märgitud); kui aga x-teljel paiknev punkt ei ole märgitud, siis saab sellel vertikaalil olla kokku ülimalt 4 märgitud punkti. Niisiis saab sel juhul märgitud punkte kokku olla ülimalt $m + 3k + 4(4-k) = m - k + 16 \leqslant 16$ — vastuolu.

4. *Vastus:* $f(x) = 0$ ja $f(x) = \sqrt{x}$.

Lahendus 1. Võttes antud võrduses $x = y$, saame $2xf(x) = 2f(x)^3$. Kui $f(x) \neq 0$, siis saame siit $x = f(x)^2$, ehk $f(x) = \sqrt{x}$. Seega iga x korral kas $f(x) = 0$ või $f(x) = \sqrt{x}$ ning juhul, kui ühegi $x_0 > 0$ korral ei ole $f(x_0) = 0$, kehtib iga x korral $f(x) = \sqrt{x}$. Oletame nüüd, et leidub selline reaalarv $x_0 > 0$, mille korral $f(x_0) = 0$. Siis saame antud võrdusest iga positiivse reaalarvu y korral $x_0 f(y) = 0$, s.t. $f(y) = 0$ iga y korral. Jääb üle kontrollida, et mõlemad funktsioonid $f(x) = 0$ ja $f(x) = \sqrt{x}$ rahuldavad ülesande tingimusi.

Lahendus 2. Võttes $x = y = 1$, saame $2f(1) = 2f(1)^3$, mistõttu $f(1) = 1$ või $f(1) = 0$. Kui $f(1) = 1$, siis võttes antud võrduses $y = 1$, saame iga x korral $x + f(x) = f(x)(f(x)+1)$, millest $f(x)^2 = x$ ja $f(x) = \sqrt{x}$. Kui $f(1) = 0$, siis võttes samuti $y = 1$, saame $f(x) = 0$ iga x korral.

5. *Vastus:* a) ei; b) jah.

Lahendus 1. a) Nimetame sõna *väärtuseks* avaldise $b + 2a$ väärtust, kus b ja a on vastavalt tähtede B ja A arvud selles sõnas. Paneme tähele, et mistahes lubatud teisendus ei muuda sõna väärtuse jagamisel 3-ga tekkivat jääki. Et antud BAU-keeles olemasoleva sõna väärtus on $7 \cdot 1 + 8 \cdot 2 = 23$ ja uuritava sõna väärtus on $9 \cdot 1 + 8 \cdot 2 = 25$, siis uuritavat sõna BAU-keeles olla ei saa.

b) Näitame, et siin uuritav sõna on antud sõnast lubatud teisendustega konstrueeritav. Selleks veendume, et lubatud teisendustega on võimalik omavahel vahetada sõna mistahes kaks kõrvutist tähte. Tõepoolest, kui need kõrvutised tähed on BA, AU või UB, siis asendame need kõigepealt vastavalt tähtedega UU, BB või AA, pöörame kogu sõnas tähtede järjekorra ümber (asendusega saadud tähed UU, BB või AA sellest ei muutu), siis asendame need tähed UU, BB või AA tagasi vastavalt tähtedega BA, AU või UB, ning lõpuks pöörame veelkord kogu sõnas tähtede järjekorra ümber. Kui aga algsed kõrvutised tähed on AB, UA või BU, siis teeme samad sammud vastupidises järjekorras (pöörame ümber, asendame, pöörame ümber, asendame).

Korduvalt kõrvutisi tähti vahetades saame omavahel vahetada mistahes kaks tähte (nihutame kõigepealt teise tähe sammhaaval esimese kõrvale ja tõstame esimesest üle ning seejärel nihutame esimese tähe samamoodi teise tähe esialgsesse asukohta). Paneme tähele, et antud BAU-keele sõnas on 7 tähte B, 8 tähte A ja 10 tähte U, uuritavas sõnas aga 8 tähte B, 9 tähte A ja 8 tähte U. Seega võime kõigepealt asendada antud sõnas mingid kõrvutised tähed UU tähtedega BA ning siis sobivalt tähti ümber järjestades saame uuritava sõna.

Lahendus 2. a) Samuti nagu esimese lahenduse b) osas veendume, et lubatud teisendustega on võimalik mistahes kaks tähte omavahel ära vahetada. Seega mingi uuritava sõna olemasoluks BAU-keeles on tarvilik ja piisav, et mingis BAU-keele sõnas on sama palju tähti A, B ja U kui uuritavas sõnas. Kontrollime mõlemal juhul, kas vajalikud tähtede B, A ja U arvud on lubatud asenduste abil saavutatavad. Olgu x sooritatavate asenduste BA $\to$ UU ja UU $\to$ BA arvude vahe, y asenduste AU $\to$ BB ja BB $\to$ AU arvude vahe ning z asenduste UB $\to$ AA ja AA $\to$ UB arvude vahe. Esialgses sõnas on 7 tähte B, 8 tähte A ja 10 tähte U, uuritavas sõnas aga 9 tähte B, 8 tähte A ning 8 tähte U. Koostame võrrandisüsteemi tähtede arvude jaoks (võrrandid käivad

vastavalt tähtede B, A ja U kohta):

$$\begin{cases} 7 - x + 2y - z = 9 \\ 8 - x - y + 2z = 8 \\ 10 + 2x - y - z = 8 \end{cases}.$$

Lahutades esimesest võrrandist teise saame võrrandi $3y - 3z = 2$, millel täisarvuline lahend puudub. Järelikult ei ole see võrrandisüsteem täisarvudes lahenduv ning uuritavat sõna antud sõnast konstrueerida ei saa.

b) Siin uuritavas sõnas on 8 tähte B, 9 tähte A ja 9 tähte U. Vastav võrrandisüsteem on

$$\begin{cases} 7 - x + 2y - z = 8 \\ 8 - x - y + 2z = 9 \\ 10 + 2x - y - z = 8 \end{cases}.$$

Selle võrrandisüsteemi üheks lahendiks on $x = 0$, $y = z = 1$. Seega saame uuritava sõna antud sõnast konstrueerida, rakendades üks kord asendusi AU $\to$ BB ja UB $\to$ AA ning muutes seejärel tähtede järjekorda.

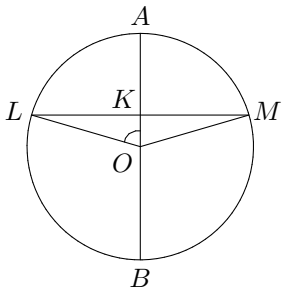
XII klass

1. *Vastus:* jah.

Olgu AB ringjoone diameeter, millel paikneb punkt K (vt. joonist 7). Nihutades punkti K (ja samuti seda läbivat kõõlu LM) mööda diameetrit AB kaugemale ringjoone keskpunktist O, väheneb nurk KOL ning ühtlasi väheneb ka kõõluga LM ja ringjoone kaarega LAM piiratud segment. Seega piisab näidata, et kui $\angle KOL = 75^\circ$, siis see segment moodustab rohkem kui kolmandiku kogu ringi pindalast.

Olgu ringi raadius r ja $\angle KOL = 75^\circ$, siis nurga LOM sisse jääva sektori pindala on $\frac{150}{360} \cdot \pi r^2 = \frac{5}{12} \cdot \pi r^2$ ning kolmnurga LOM pindala on

$$\begin{aligned} S_{LOM} &= 2S_{LOK} = |LK| \cdot |OK| = r^2 \cdot \sin \angle KOL \cdot \cos \angle KOL = \\ &= \frac{1}{2} r^2 \cdot \sin 2\angle KOL = \frac{1}{4} r^2 . \end{aligned}$$



Joonis 7

Kõõluga LM ja ringjoone kaarega LAM piiratud segmendi pindala on sel juhul niisiis

$$\frac{5}{12}\cdot\pi r^2-\frac{1}{4}\,r^2=\Big(\frac{5}{12}-\frac{1}{4\pi}\Big)\pi r^2\ .$$

Et $\pi>3$, siis $\dfrac{1}{4\pi}<\dfrac{1}{12}$ ning järelikult $\dfrac{5}{12}-\dfrac{1}{4\pi}>\dfrac{4}{12}=\dfrac{1}{3}$. Seega moodustab vaadeldav segment juhul, kui $\angle KOL=75^\circ$, tõepoolest rohkem kui kolmandiku kogu ringi pindalast.

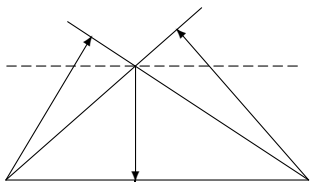
2. Näitame, et mistahes hetkel on Albertil võimalik valida üks suund ja ülimalt 3 käiguga saavutada olukord, kus nupp on liikunud esialgsest asukohast 1 ruudu võrra valitud suunas. Tõepoolest, nimetame valitud suunda *õigeks* ja teist suunda *valeks* ning vaatleme järgmist algoritmi:
   1) Albert ütleb arvu 1; kui Brita käib seepeale nupuga õiges suunas, siis on Alberti eesmärk saavutatud.
   2) Kui Albert eelmisel sammul eesmärki ei saavutanud (Brita käis nupuga vales suunas), siis ütleb ta nüüd arvu 2; kui Brita käib seepeale nupuga õiges suunas, siis on nupp kokkuvõttes nihkunud 1 ruudu võrra õiges suunas ning Alberti eesmärk on saavutatud.
   3) Kui Albert eelmistel sammudel eesmärki ei saavutanud (Brita käis mõlemal korral vales suunas), siis ütleb ta nüüd arvu 4; et seepeale peab Brita vastavalt mängureeglitele käima nupuga õiges suunas, siis on nupp kokkuvõttes nihkunud 1 ruudu võrra õiges suunas ning Alberti eesmärk on saavutatud.

   Esimesel käigul öelgu Albert nüüd arv 4 — seepeale käib Brita nupuga 4 ruudu võrra mingis suunas. Edaspidi loeme selle suuna *õigeks* ning

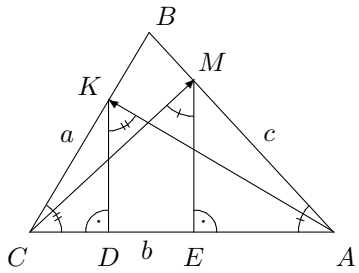
Albert saab ülalkirjeldatud algoritmi 6 korda rakendades, s.t. kokku ülimalt $1 + 6 \cdot 3 = 19$ käiguga, sundida Britat nihutama nuppu veel 6 ruudu võrra samas suunas, s.t. üle riba otsa välja.

Märkus. Saab näidata, et Brital on võimalik käia nii, et varem kui 19. käigul ta nupuga ribalt välja ei astu.

3. *Lahendus 1.* Kui kolmnurk ABC on võrdkülgne, siis on vektorid $\overrightarrow{AK}$, $\overrightarrow{BL}$ ja $\overrightarrow{CM}$ võrdse pikkusega ja paarikaupa 120° nurga all, mistõttu $\overrightarrow{AK} + \overrightarrow{BL} + \overrightarrow{CM} = \overrightarrow{0}$.
Oletame nüüd ümberpöördult, et $\overrightarrow{AK} + \overrightarrow{BL} + \overrightarrow{CM} = \overrightarrow{0}$. Olgu kolmnurgas ABC külgede BC, CA ja AB pikkused vastavalt a, b ja c ning pindala S, siis $|\overrightarrow{AK}| = \dfrac{2S}{a}$, $|\overrightarrow{BL}| = \dfrac{2S}{b}$ ja $|\overrightarrow{CM}| = \dfrac{2S}{c}$.
Pöörates vektoreid $\overrightarrow{AK}$, $\overrightarrow{BL}$ ja $\overrightarrow{CM}$ vastupäeva 90° võrra, muutuvad nad vastavate kolmnurga külgedega paralleelseteks ja kuna nende vektorite summa on nullvektor, saab neist kokku panna kolmnurga, mis on sarnane kolmnurgaga ABC. Olgu sarnasusteguriks k, siis $|\overrightarrow{AK}| = ka$, $|\overrightarrow{BL}| = kb$ ja $|\overrightarrow{CM}| = kc$. Järelikult $\dfrac{2S}{a} = |\overrightarrow{AK}| = ka$, kust $a = \sqrt{\dfrac{2S}{k}}$. Analoogiliselt leiame, et ka $b = c = \sqrt{\dfrac{2S}{k}}$, s.t. kolmnurk ABC on võrdkülgne.



Joonis 8



Joonis 9

Lahendus 2. Samuti nagu eelmises lahenduses veendume, et võrdkülgse kolmnurga ABC korral nõutav tingimus kehtib. Kehtigu nüüd kolmnurgas ABC tingimus $\overrightarrow{AK}+\overrightarrow{BL}+\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{0}$. Esmalt paneme tähele, et

kolmnurk ABC ei saa olla täis- või nürinurkne, sest siis oleks kummagi teravnurga tipust tõmmatud kõrgusvektori projektsioon kolmanda (täis- või nürinurga tipust tõmmatud) kõrgusvektori sihile juba üksinda sama pikk kui see kolmas kõrgusvektor, mistõttu need vektorid ei saaks summana enda nullvektorit (vt. joonist 8). Vaatleme nüüd vektorite $\overrightarrow{AK}$, $\overrightarrow{BL}$ ja $\overrightarrow{CM}$ projektsioone küljele AC. Et vektori $\overrightarrow{BL}$ projektsioon küljele AC on 0, kuna tegu on kõrgusvektoriga, siis peavad vektorite $\overrightarrow{AK}$ ja $\overrightarrow{CM}$ projektsioonid küljele AC olema ühepikkused. Olgu $|AC| = b$, $\angle BAC = \alpha$ ja $\angle BCA = \gamma$ ning olgu D ja E vastavalt punktide K ja M projektsioonid küljele AC, siis vektori $\overrightarrow{AK}$ projektsiooni pikkus on

$$\begin{aligned} |AD| &= |AK| \cdot \sin \angle AKD = |AC| \cdot \sin \angle ACB \cdot \sin \angle AKD = \\ &= b \cdot \sin^2 \gamma \end{aligned}$$

ning vektori $\overrightarrow{CM}$ projektsiooni pikkus on analoogiliselt $b \cdot \sin^2 \alpha$ (vt. joonist 9). Et need oleksid võrdsed, peab olema $\alpha = \gamma$. Analoogilise arutlusega külje AB jaoks saame, et $\alpha = \beta$, s.t. kolmnurk ABC on võrdkülgne.

4. *Lahendus 1.* Rakendades iga murru nimetajale aritmeetilise ja geomeetrilise keskmise vahelist võrratust, saame

$$\frac{1}{1+2ab} + \frac{1}{1+2bc} + \frac{1}{1+2ca} \geqslant \frac{1}{1+a^2+b^2} + \frac{1}{1+b^2+c^2} + \frac{1}{1+c^2+a^2} \,.$$

Rakendades nüüd kogu avaldisele aritmeetilise ja harmoonilise keskmise vahelist võrratust, saame

$$\begin{aligned} &\frac{1}{1+a^2+b^2} + \frac{1}{1+b^2+c^2} + \frac{1}{1+c^2+a^2} \geqslant \\ &\quad \geqslant 3 \cdot \frac{3}{(1+a^2+b^2)+(1+b^2+c^2)+(1+c^2+a^2)} = \\ &\quad = \frac{9}{3+2(a^2+b^2+c^2)} = \frac{9}{3+2\cdot 3} = 1 \,. \end{aligned}$$

Lahendus 2. Aritmeetilise ja harmoonilise keskmise vahelisest võrratu-

sest saame

$$\frac{1}{1+2ab}+\frac{1}{1+2bc}+\frac{1}{1+2ca}\geqslant\frac{9}{3+2ab+2bc+2ca}=$$
$$=\frac{9}{a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca}=\frac{9}{(a+b+c)^2}\ .$$

Aritmeetilise ja ruutkeskmise vahelisest võrratusest saame

$$\frac{a+b+c}{3}\leqslant\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}}\ ,$$

kust ruutu tõstes saame

$$\frac{(a+b+c)^2}{9}\leqslant\frac{a^2+b^2+c^2}{3}=\frac{3}{3}=1\ .$$

Seega

$$\frac{1}{1+2ab}+\frac{1}{1+2bc}+\frac{1}{1+2ca}\geqslant\frac{9}{(a+b+c)^2}\geqslant 1\ .$$

Lahendus 3. Korrutades tõestatava võrratuse mõlemad pooled läbi teguriga $(1+2ab)(1+2bc)(1+2ca)$, koondades saadavas võrratuses sarnased liikmed ning jagades läbi 8-ga, saame tõestatavaga samaväärse võrratuse

$$\frac{1+ab+bc+ac}{4}\geqslant a^2b^2c^2\ .$$

Paneme nüüd tähele, et

$$1=\frac{3}{3}=\frac{a^2+b^2+c^2}{3}\geqslant\sqrt[3]{a^2b^2c^2}\ ,$$

kust $abc\leqslant 1$ ning seega

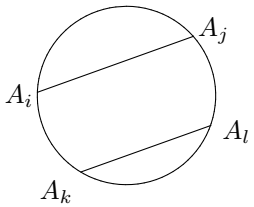
$$a^2b^2c^2=(abc)^2\leqslant\sqrt{abc}\ .$$

Niisiis tõepoolest

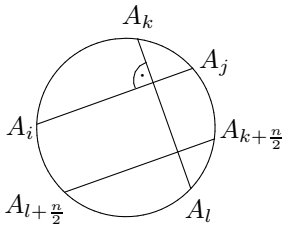
$$\frac{1+ab+bc+ac}{4}\geqslant\sqrt[4]{a^2b^2c^2}=\sqrt{abc}\geqslant a^2b^2c^2\ .$$

5. *Lahendus 1.* a) Lõigud A_iA_j ja A_kA_l on paralleelsed parajasti siis, kui $i-k \equiv l-j \pmod{n}$ (vt. joonist 10). Seega

$$\begin{aligned} A_iA_j \parallel A_kA_l &\Rightarrow i-k \equiv l-j \pmod{n} \Rightarrow \\ &\Rightarrow c(i-k) \equiv c(l-j) \pmod{n} \Rightarrow \\ &\Rightarrow ci-ck \equiv cl-cj \pmod{n} \Rightarrow \\ &\Rightarrow i'-k' \equiv l'-j' \pmod{n} \Rightarrow \\ &\Rightarrow A_{i'}A_{j'} \parallel A_{k'}A_{l'} \ . \end{aligned}$$



Joonis 10



Joonis 11

b) Paneme kõigepealt tähele, et mistahes kahe vaadeldava lõigu vaheline nurk on $\dfrac{\pi}{n}$ täisarvuline kordne — seega nurk $\dfrac{\pi}{2}$ saab esineda ainult paarisarvulise n korral. Et arvud c ja n on ühistegurita, siis peab c sel juhul olema paaritu, mistõttu $c \cdot \dfrac{n}{2} \equiv \dfrac{n}{2} \pmod{n}$.

Ilmselt on lõigud A_iA_j ja A_kA_l risti parajasti siis, kui lõik A_iA_j on paralleelne nurga $\dfrac{\pi}{2}$ võrra pööratud lõiguga A_kA_l. Pöörates lõiku A_kA_l ümber vaadeldava hulknurga ümberringjoone keskpunkti nurga $\dfrac{\pi}{2}$ võrra, saame lõigu $A_{k+\frac{n}{4}}A_{l+\frac{n}{4}}$ (vt. joonist 11; kui n ei jagu 4-ga, siis tuleb lõigu $A_{k+\frac{n}{4}}A_{l+\frac{n}{4}}$ asemel vaadelda samasihilist lõiku $A_{k+\frac{n+2}{4}}A_{l+\frac{n-2}{4}}$, mis järgnevas arutelus midagi ei muuda). Seega

$$A_iA_j \perp A_kA_l \iff i-\left(k+\frac{n}{4}\right) \equiv \left(l+\frac{n}{4}\right)-j \pmod{n} \iff$$

$$\iff i - k \equiv l - j + \frac{n}{2} \pmod{n}$$

ning

$$\begin{aligned} A_iA_j \perp A_kA_l &\Rightarrow i - k \equiv l - j + \frac{n}{2} \pmod{n} \Rightarrow \\ &\Rightarrow c(i-k) \equiv c\Big(l - j + \frac{n}{2}\Big) \pmod{n} \Rightarrow \\ &\Rightarrow ci - ck \equiv cl - cj + c\,\frac{n}{2} \pmod{n} \Rightarrow \\ &\Rightarrow i' - k' \equiv l' - j' + \frac{n}{2} \pmod{n} \Rightarrow \\ &\Rightarrow A_{i'}A_{j'} \perp A_{k'}A_{l'} \pmod{n}\,. \end{aligned}$$

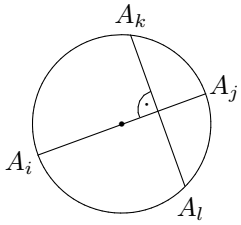
Lahendus 2. Samuti nagu esimeses lahenduses tõestame a) osa. Tuntud geomeetriateoreemi põhjal

$$\begin{aligned} A_iA_j \perp A_kA_l &\iff \overset{\frown}{A_iA_k} + \overset{\frown}{A_jA_l} = \overset{\frown}{A_kA_j} + \overset{\frown}{A_lA_i} \iff \\ &\iff (k-i) + (l-j) \equiv (j-k) + (i-l) \pmod{n} \iff \\ &\iff 2(k+l-i-j) \equiv 0 \pmod{n}\,, \end{aligned}$$

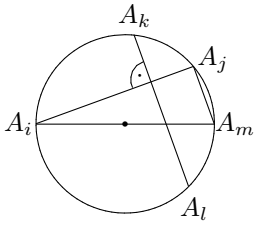
kus vaadeldavad kaared on võetud hulknurga ümberringjoonel. Seega

$$\begin{aligned} A_iA_j \perp A_kA_l &\Rightarrow 2(k+l-i-j) \equiv 0 \pmod{n} \Rightarrow \\ &\Rightarrow 2c(k+l-i-j) \equiv 0 \pmod{n} \Rightarrow \\ &\Rightarrow 2(k'+l'-i'-j') \equiv 0 \pmod{n} \Rightarrow \\ &\Rightarrow A_{i'}A_{j'} \perp A_{k'}A_{l'}\,. \end{aligned}$$

Lahendus 3. Samuti nagu esimeses lahenduses tõestame a) osa ja paneme tähele, et n on paaris ja c paaritu, mistõttu $c \cdot \frac{n}{2} \equiv \frac{n}{2} \pmod{n}$. Seega $c(i + \frac{n}{2}) = ci + c\,\frac{n}{2} \equiv ci + \frac{n}{2} \pmod{n}$, ehk hulknurga ümberringjoone diameetrile vastab alati diameeter. Edasi vaatleme kahte juhtu.



Joonis 12



Joonis 13

Kui lõik A_iA_j on hulknurga ümberringjoone diameeter, siis $j \equiv i + \dfrac{n}{2} \pmod{n}$ ning $A_iA_j \perp A_kA_l$ siis ja ainult siis, kui $j - k \equiv l - j \pmod{n}$ (vt. joonist 12). Siis $cj - ck = c(j-k) \equiv$ $\equiv c(l-j) = cl - cj \pmod{n}$ ehk $j' - k' \equiv l' - j' \pmod{n}$ ning järelikult $A_{i'}A_{j'} \perp A_{k'}A_{l'}$.

Kui lõik A_iA_j ei ole hulknurga ümberringjoone diameeter, siis vaatleme sellist tippu A_m, et A_iA_m on diameeter (vt. joonist 13). Siis $A_iA_j \perp A_jA_m$, sest nurk $A_iA_jA_m$ toetub ümberringjoone diameetrile A_iA_m. Kuna diameetrile vastab diameeter, siis toetub ka nurk $A_{i'}A_{j'}A_{m'}$ diameetrile, mistõttu $A_{i'}A_{j'} \perp A_{j'}A_{m'}$. Kuna $A_iA_j \perp A_jA_m$ ja $A_iA_j \perp A_kA_l$, siis $A_jA_m \parallel A_kA_l$ ning a) osa põhjal $A_{j'}A_{m'} \parallel A_{k'}A_{l'}$. Seega $A_{i'}A_{j'} \perp A_{k'}A_{l'}$.

9. klass

Ülesanne 1 (Toomas Paaver)

Antud võrrandi teisendamine sobivale kujule	**3 p.**
Õigete järelduste tegemine leitud kujust (ruutude summa ärakasutamine)	**3 p.**
Õige vastus	**1 p.**
	7 p.

Erijuht: lahendus lisaeeldusel, et x ja y on täisarvud 4 p.

Ülesanne 2 (Urmo Kaber)

Esitatud sobiv arvude viisik, kus suurim arv on 13	**3 p.**
Esitatud sobiv arvude viisik, kus suurim arv on 12	**5 p.**
Täielik lahendus (koos minimaalsuse põhjendusega)	**7 p.**

Paljud ei mõistnud, et mingi lahendi leidmine ei tõesta veel seda, et väiksema maksimumiga lahendit ei ole. Enamusel puudus tõestus, miks leitud lahendis arvude maksimum on võimalikest vähim.

Ülesanne 3 (Elts Abel)

Näitamine, et kolmnurkade AMO ja CNO pindalad on võrdsed, kus O on AN ja CM lõikepunkt	**3 p.**
Näitamine, et kolmnurkade AMC ja ANC pindalad on võrdsed (või sobivate kolmnurkade sarnasuse näitamine)	**2 p.**
Näitamine, et punktid M ja N asuvad sirgest AC võrdsel kaugusel (või vajalike nurkade võrdsuse näitamine)	**1 p.**
Tõestuse lõpuleviimine	**1 p.**
	7 p.

Ülesanne 4 (Lea Lepmann)

Avaldise esitamine korrutisena ja tähelepanek, et tuleb kontrollida jaguvust 3-ga ja 8-ga	**1 p.**
8-ga jaguvuse tõestus	**3 p.**
3-ga jaguvuse tõestus	**3 p.**
	7 p.

Kui 8-ga jaguvuse asemel oli tõestatud ainult 2-ga jaguvus, siis sai selle osa eest 1 punkti. Kui oli väite kehtivust näidatud ainult mõne konkreetse arvu korral, sai kokku 1 punkti.

Ülesanne 5 (Meelis Kull)

Tõestus, et punktid K_i, O_i ja O on ühel sirgel, kus O on ringjoone keskpunkt, O_i väikeste ringjoonte keskpunktid ja K_i puutepunktid ringjoonega C	**3 p.**
Selle alusel tõestus, et Q=O	**4 p.**
	7 p.

10. klass

Ülesanne 1 (Reimo Palm)

Tähelepanek, et x, y ja z peavad jaguma vastavalt 24-ga, 30-ga ja 40-ga	**2 p.**
Arvude x, y ja z ülejäänud algtegurite leidmine ilma tingimust VÜK(x,y,z)=2400 arvestamata	**2 p.**
Arvude x, y ja z ülejäänud algtegurite valimine nii, et VÜK(x,y,z)=2400	**2 p.**
Sobivate variantide väljavalimine tingimuse x<y<z järgi	**1 p.**
	7 p.

Ülesanne 2 (Mati Abel)

On märgata sobivat lahenduse ideed	**1 p.**
Lahendus õigesti alustatud	**2 p.**
Põhiliselt täielikus lahenduses puudub mingi väite põhjendus	**6 p.**
Täielik lahendus	**7 p.**

Ülesanne 3 (Kalle Kaarli)

Kirja pandud vaadeldava arvu üldkuju ja püütud seda teisendada	**1 p.**
Põhjendus antud ühel erijuhul	**1 p.**
Põhjendus antud kahel-kolmel erijuhul	**2 p.**
Õige vastus koos veenva põhjendusega	**7 p.**

Katset anda lahendus üldjuhul, mis ei viinud sihile, hindasin 2-4 punktiga. Põhimõtteliselt õigelt lahenduselt võtsin punkti maha väga halva vormistuse eest.

Ülesanne 4 (Ahti Peder)

Leitud punktide väärtused peale esimest ja peale teist sekundit	**1 p.**
Leitud summa peale esimest ja peale teist sekundit	**1 p.**
Püstitatud hüpotees, et summa on 4^n	**1 p.**
Püstitatud hüpotees tõestatud	**4 p.**
	7 p.

Kui punkti väärtus järgmisel sekundil leiti kui *tema enda ja* tema nelja naabri eelmise sekundi väärtuste summa, siis sai lahendus kokku kuni 1 p.

Ülesanne 5 (Nikita Salnikov)

Tõestus, et a, b, c kuuluvad lõigule [-1,1]	**2 p.**
Tähelepanek, et sel juhul $x^2 \geq x^3$	**1 p.**
Näitamine, et $x^2 = x^3$, kus x = a, b, c	**2 p.**
Näitamine, et a, b, c peavad olema 0 või 1	**1 p.**
Õige vastus	**1 p.**
	7 p.

Kui on ainult näidatud, et kolmik 1,0,0 sobib ja leitud vastus 1 sellel juhul, siis sai 1 p.

11. klass

Ülesanne 1 (Anton Stalnuhhin)

Loetletud puuduste eest võeti 7 punktist punkte maha järgnevalt:

Kasutatud ilma põhjenduseta, et $a \neq b$	**- 1 p.**
Kasutatud tõestuseta, et kui a ja b on täisarvud ja kehtib a*(a+1)*(a-1)=b*(b+1)*(b-1), siis a*(a+1)*(a-1)=b*(b+1)*(b-1)=0	**- 2 p.**
Vastus on mittetäielik või sisaldab valesid paare	**- 1 p.**

Ülesanne 2 (Oleg ja Dmitri Petšonkin)

Ainult rakendatud siinusteoreemi õigetele kolmnurkadele	**2 p.**
Rakendatud siinusteoreemi ning avaldatud |OL| ja |OK|	**3 p.**
Täielik lahendus arvutusveaga	**6 p.**
Täielik lahendus	**7 p.**

Ülesanne 3 (Hannes Jukk)

Tõestus juhu jaoks, kus punkt (0,0) on märgitud	**3 p.**
Tõestus juhu jaoks, kus punkt (0,0) on märkimata	**4 p.**
	7 p.

Punktid mittetäielike lahenduste eest, kus polnud neid kahte juhtu eraldi vaadeldud:

Vaadeldud ainult 'optimaalset' konfiguratsiooni, kus on märgitud 2x2 ruutude tipud 5x5 ruudu nurkades. Näidatud, et sel juhul ei saa enam 17. punkti märkida, ning üritatud põhjendada, miks sellist konfiguratsiooni vaadeldakse.	1 p.
Selgitatud, miks peab ridade (veergude) seas olema vähemalt kaks 4 märgitud punktiga rida (veergu), ning siis need juhud *osaliselt* läbi vaadatud.	4 p.
Eelnevale lisaks selgitus, miks 4 punkti ühes reas (veerus) on maksimaalne	5 p.

Ülesanne 4 (Jan Villemson)

Lahendi $f(x)=0$ leidmine	**1 p.**
Lahendi $f(x)=\sqrt{x}$ leidmine	**1 p.**
Tõestus, et juhul kui $f(x_0)\neq 0$, siis $f(x_0)=\sqrt{x_0}$	**2 p.**
Tõestus, et juhul kui leidub $x_0>0$, mille korral $f(x_0)=0$, siis $f(x)=0$ iga x korral	**3 p.**
	7 p.

Ülesanne 5 (Oleg Košik)

a) osa	**4 p.**
b) osa	**3 p.**
Sealhulgas: näitamine, et on võimalikud teisendused $XY \leftrightarrow ZZ \leftrightarrow YX$	*1 p.*
b) osa lahenduse lõpuleviimine	*2 p.*
	7 p.

Punktid a) osa mittetäielike lahenduste eest:

On aru saadud, et vastus (sõna on või ei ole BAU keeles) sõltub ainult sõnas esinevate tähtede arvudest	1 p.
On koostatud õige võrrandisüsteem	2 p.

12. klass

Ülesanne 1 (Mihkel Kree)

Jõutud võrrandini, mille muutujatest avaldub otsitav nurk; midagi olulist edasi pole osatud järeldada.	**3 p.**
Jõutud olulise võrratuseni, kuid pole osatud kasutada monotoonsust	**4 p.**
Täielik lahendus	**7 p.**

Ülesanne 2 (Indrek Zolk)

Detailne algoritmi kirjeldus, kuidas Albert peab arve ütlema, et sundida Brita nupuga ribalt välja käima	**5 p.**
Sealhulgas: valitud esimeseks sammuks 4 ning võetud Brita valitud suund soovitavaks	*1 p.*
ülejäänud osa, mis katab ammendavalt kõikvõimalikud Brita suunavalikud	*4 p.*
Põhjendus, miks kirjeldatud algoritm lahendab ülesande	**2 p.**
	7 p.

Suurem osa lahendajatest märkas, et esimesel käigul tasub Brita nupp võimalikult ääre lähedale viia ning seejärel sundida ta sellessamas suunas ribalt välja. Mõne lahendaja pakutu polnud paraku ammendav algoritm, sest käsitles vaid mõningaid Brita käigusuundi. Mitmele võistlejale valmistas raskusi ka põhjendamine, miks esitatud algoritm ikkagi ülimalt 19 käigu järel töö lõpetab.

Ülesanne 3 (Hendrik Nigul)

Tarvilikkus: tõestus, et võrdkülgses kolmnurgas kehtib vektorvõrdus AK+BL+CM=0	**1 p.**
Piisavus: tõestus, et kui kehtib AK+BL+CM=0, siis kolmnurk on võrdkülgne	**6 p.**
	7 p.

Tüüpilised mittetäielikud piisavuse tõestused (punktid piisavuse osa eest):

Olemas ainult idee kasutada projektsiooni	1 p.
Olemas idee konstrueerida kõrgusvektoritest uus kolmnurk	2 p.
Tõestatud, et kõrgusvektoritest konstrueeritud kolmnurk on sarnane kolmnurgaga ABC	4 p.

Ülesanne 4 (Aleksei Lissitsin)

Tõestatava võrratuse teisendamine kujule $1+ab+ac+bc \geq 4(abc)^2$	**1 p.**
Aritm. ja geom. keskmiste vahelise võrratuse abil tõestus, et kehtib $(1+ab+ac+bc)/4 \geq (abc)^{1/2}$	**2 p.**
Näitamine, et võrdusest $a^2+b^2+c^2 = 3$ järeldub $abc \leq 1$	**2 p.**
Tähelepanek, et siis $(abc)^2 \leq (abc)^{1/2}$, ning lõppjärelduse tegemine	**2 p.**
	7 p.

Kõik edukad lahendused kasutasid üht, žürii pakututest erinevat ideed. Sellise lahenduse põhisammud on kirjeldatud ülaltoodud hindamisskeemis.

Ülesanne 5 (Härmel Nestra)

a) osa (paralleelsus)	**3 p.**
b) osa (ristseis)	**4 p.**
	7 p.

Punktid tüüpiliste mittetäielike lahenduste eest kummaski osas:

a) osa: Tehtud ainult üleminek kongruentsidele	1 p.
b) osa: Tehtud ainult diameetri jaoks	2 p.
b) osa: Põhjendatud üleminek kongruentsidele	2 p.
b) osa: Tähele pandud, et $c*(n/2) \equiv (n/2)$ (modulo n)	1 p.

Ülesanne käis ootamatult paljudele üle jõu. Suurel osal võistlejaist näib puuduvat igasugune ettekujutus tehetest kongruentsidel, kuigi antud olukord (käimine ringiratast mööda korrapärase hulknurga tippe) on tüüpiline, kus seda vaja läheb. Ei saadud hakkama ka ülesande tingimuste ümberkirjutamisega arvuliste muutujate abil, kui kongruentse ei tuntud. Mitmed eksisid paralleelsuse tingimuse kirjapanemisel suunaga (i-k=l-j asemel kirjutati i-k=j-l), seda isegi juhul, kui samas kõrval oli konkreetse olukorra jaoks joonis tehtud.
Paralleelsuse osas ma ei nõudnud kongruentsile üleminekul erilisi põhjendusi, piisas õige seose väljakirjutamisest. Seevastu ristseisu osas ma seda ilmseks ei lugenud ja põhjenduste puudumisel võtsin punkte maha. Samuti võtsin punkti maha, kui polnud üleminekul öeldud, et tegemist on samaväärse tingimusega, sest kasutada oli seda vaja ju mõlemas suunas.